

Übungen zur Algebraischen Zahlentheorie I

- 2. Blatt -

Prof. Dr. K. Wingberg

WS 2009/2010

J. Bartels

abzugeben bis Donnerstag, den 29. Oktober 2009 um 9:15 Uhr
in den Kästen neben dem Seifertraum

<http://www.mathi.uni-heidelberg.de/~bartels/Vorlesung>

Name: /name/ Matrikelnummer: /nr/
Übungsleiter: /uebleiter/
2. Name: /namezwei/ 2. Matrikelnummer: /nrzwei/

Man achte auf eine saubere Darstellung und eine ordentliche Schrift.
Bitte keine maschinell erstellten Lösungen abgeben.

Aufgabe	1	2	3	4	Σ
Punkte					

1 . Aufgabe (6 Punkte):

Es sei \mathcal{O}_K der Ganzheitsring eines Zahlkörpers K/\mathbb{Q} und daraus \mathbb{Z} -linear unabhängige Elemente $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathcal{O}_K$ gegeben. Zeigen Sie, daß folgendes gilt:

- Teilt eine Primzahl p den Quotienten der Diskriminanten $d(\alpha_1, \dots, \alpha_n)/d(\mathcal{O}_K)$, dann gibt es ganze Zahlen a_1, \dots, a_n , so daß $(a_1, \dots, a_n, p) = 1$ und $(\sum_{i=1}^n a_i \alpha_i)/p \in \mathcal{O}_K$ gilt.
- Es sei α ein primitives Element der Erweiterung K/\mathbb{Q} , dessen Minimalpolynom in p Eisensteinsch ist. Dann teilt p nicht den Quotienten $d(\alpha_1, \dots, \alpha_n)/d(\mathcal{O}_K)$.

2 . Aufgabe (6 Punkte):

Berechnen Sie die Ganzheitsringe von:

- $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$
- $\mathbb{Q}(\alpha)$, wobei α Nullstelle der Gleichung $X^3 + X + 1$ ist.

3 . Aufgabe (6 Punkte):

Es sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt{51})$ und $\mathfrak{a} := (2, 1 + \sqrt{51})$.

- Zeigen Sie, daß $\mathfrak{a} = 2\mathbb{Z} + (1 + \sqrt{51})\mathbb{Z}$ gilt.

- b) Bestimmen Sie $\mathfrak{a}^{-1} = \{x \in K \mid x\mathfrak{a} \subseteq \mathcal{O}_K\}$, welches auch das „gebrochene Ideal“ \mathfrak{a}^{-1} genannt wird.
- c) Zeigen Sie, daß \mathfrak{a} ein Primideal in \mathcal{O}_K ist.
- d) Berechnen Sie die Anzahl der Elemente in $\mathcal{O}_K/\mathfrak{a}$.

4 . Aufgabe (6 Punkte):

Es sei $K = \mathbb{Q}(\alpha)$, wobei α eine Nullstelle des Polynoms $f(X) = X^3 + X^2 - 2X + 8$ ist. Bestimmen Sie den Ganzheitsring dieses Zahlkörpers.

Hinweis: Indexformel und obige Aufgabe!