1 . Aufgabe (6 Punkte):
Es sei das Polynom $f(X) := X^3 + 2X - 2 \in \mathbb{Q}[X]$ und eine Nullstelle α davon gegeben.

a) Zeigen Sie, daß f irreduzibel ist und berechnen Sie dessen Diskriminante.

b) Folgern Sie, daß $\mathbb{Z}[\alpha]$ der Ganzheitsring der Erweiterung $\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}$ ist.

c) In wieviele Primfaktoren zerfällt das Ideal (5) darin? Geben Sie die zugehörigen Verzweigungsindizes und Trägheitsgrade an.

Lösung:

a) Die Diskriminante eines kubischen Polynoms X^3+pX+q ist $-4p^3-27q^2$, im vorliegenden Fall also $-4.2^3 - 27.2^2 = -4.(8+27) = -2^2.35 = -2^2.5.7 = -140$. Die Irreduzibilität folgt anhand des Eisensteinschen Kriteriums.

b) Wir haben $d(\mathbb{Z}[\alpha]) = (O_{\mathbb{Q}(\alpha)} : \mathbb{Z}[\alpha])^2.d(O_{\mathbb{Q}(\alpha)}) = -2^2.5.7$. Weil $f(X)$ Eisensteinsch für $p = 2$ ist, teilt 2 nicht den Index $(O_{\mathbb{Q}(\alpha)} : \mathbb{Z}[\alpha])$. Also ist $\mathbb{Z}[\alpha] = O_{\mathbb{Q}(\alpha)}$.

c) Das Polynom $X^3 + 2X - 2$ hat modulo 5 nur die Nullstellen 2 und -1. Daher zerfällt $f(X)$ mod 5 in drei lineare Faktoren, einer davon ist in zweiter Potenz vorhanden, weil 5 die Diskriminante teilt. Daher gilt $(5) = \mathfrak{p}_1.\mathfrak{p}_2^2$. Die zugehörigen Trägheitsgrade sind wegen $\sum_{i=1}^2 e_i f_i = 3$ alle $f_i = 1$.

2 . Aufgabe (6 Punkte):
Gegeben sei der Körper $\mathbb{Q}(\sqrt{6})/\mathbb{Q}$.

a) Berechnen Sie sämtliche Grundeinheiten dieses Zahlkörpers.

b) Geben Sie die Struktur der Einheitengruppe an. (Bitte mit Begründung.)

Lösung:

a) In der Menge $\{6.n^2 | n \in \mathbb{N}\}$ ist $n = 2$ das erste $n \in \mathbb{N}$, so daß der Ausdruck $6n^2 = 24$ sich um ± 1 von einem Quadrat $(= 5^2)$ unterscheidet. Daher ist die Grundeinheit $2\sqrt{6} + 5$ die kleinste positive Größe >1, welche die Norm ± 1 hat. Die restlichen Grundeinheiten sind in $\pm 5 \pm 2\sqrt{6}$ enthalten.

b) Die Einheitengruppe ist nach Dirichlet $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ und entspricht $\{\pm 1.(5 + 2\sqrt{6})^n | n \in \mathbb{Z}\}$.

3 . Aufgabe (6 Punkte):
Es sei $K := \mathbb{Q}(\sqrt{-15}) \subseteq \mathbb{C}$ und B eine $\mathbb{Z}-$Basis des zugehörigen Ganzheitsrings.

a) Berechnen Sie die Klassenzahl h_K von K.

b) Errechnen Sie das Volumen der Grundmasche des durch B definierten $\mathbb{Z}-$Gitters.

c) Der Minkowskische Gitterpunktsatz besagt, daß im Fall quadratischer Zahlkörper jede zentralsymmetrische konvexe Menge X einen von Null verschiedenen Gitterpunkt enthält, wenn ihr Volumen ein Vielfaches des Volumens einer Fundamentalmasche, also $c \times vol(\Phi)$ übersteigt. Begründen Sie anhand eines Beispiels, warum diese Abschätzung scharf ist, d.h. c nicht durch eine bessere Konstante $\alpha < c$ ersetzt werden kann. Tip: Fertigen Sie eine Skizze an!

Lösung:

a) Die Diskriminante dieses Körpers ist $d = -15$. Die Ideale $a\mathbb{Z} + \frac{b+\sqrt{-15}}{2}\mathbb{Z}$ mit ganzen Zahlen $|b| \leq a \leq \sqrt{\frac{|-15|}{3}}$ und $a \leq c := \frac{b^2+15}{4a} \in \mathbb{Z}$ bilden ein vollständiges Repräsentantensystem der Idealklassengruppe. Aus den Übungen ist der Satz bekannt:

0.0.1 Satz: *Ist K ein quadratischer Zahlkörper der Diskriminante $D < 0$, dann sind die Idealklassen aus $\mathcal{O}_K$ in Bijektion mit den Tripeln (a, b, c) mit $a \leq \sqrt{\frac{|D|}{3}}$, so daß $b^2 - 4ac = D, |b| \leq a \leq c$ und $b \geq 0$, wenn $|b| = a$ oder $a = c$ gilt.*

Nun ist der Wurzelterm $\sqrt{5} \approx 2.2...$, daher muß gelten $b = 1$ und $a = 1$ oder $a = 2$. Es gibt daher genau 2 Idealklassen: $h_K = 2$.

b) Eine Basis B ist durch $\{1, \frac{1+\sqrt{-15}}{2}\}$ gegeben. Die Übergangsmatrix von den Standardeinheitsvektoren $\{1, i\} \in \mathbb{C}$ ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & \sqrt{15}/2 \end{pmatrix},$$

dessen Determinante $\sqrt{15}/2$ gleichzeitig das Volumen der Grundmasche ist.

c) Beispiel: $\mathbb{Z}[i] \in \mathbb{C}$ hat die zentralsymmetrische Teilmenge $\{x + yi|$ mit $|x|, |y| \leq 1 - \epsilon\}$ Diese hat für $\epsilon > 0$ keinen weiteren Gitterpunkt und ein Volumen $V = (2(1-\epsilon))^2$ für $0 < \epsilon < 1$. Für $\epsilon \to 0$ gilt: $V \to 4$. Im Fall des Körpers $\mathbb{Q}(\sqrt{-15})$ ist es analog: eine Folge von Parallelogrammen, welche in dem Teilbereich von $\mathbb{C}$ liegt, der durch die Geraden $\{x + (\sqrt{15}x \pm \sqrt{15}).i | x \in \mathbb{R}\}$ und die Bedingung $\{|\mathfrak{Im}(z)| \leq \sqrt{15}/2 | z \in \mathbb{C}\}$ und gegen diesen Bereich konvergiert (Skizze) zeigt, daß die Konstante c scharf ist.

4 . Aufgabe (6 Punkte):
Der Körper K sei durch $K := \mathbb{Q}(\sqrt{5}, \sqrt{7})$ definiert.

a) Berechnen Sie die Diskriminante der Erweiterung $K/\mathbb{Q}$.

b) Gegeben sei ein Primideal $\mathfrak{p}|(2)$ aus $\mathcal{O}_K$ in dieser Erweiterung. Geben Sie den Zerlegungs- und den Trägheitskörper an.

c) Es sei $\mathfrak{p}'|(17)$ ein Primideal über (17) in K. Was sind dessen Zerlegungs- und Trägheitskörper?

Lösung:

a) Die Diskriminante ist $(5)^2.(4.7)^2 = 400.49 = 19600$ nach Satz 2.11 in Neukirchs Buch.

b) (2) verzweigt in $\mathbb{Q}(\sqrt{7})$ und $\mathbb{Q}(\sqrt{35})$, daher ist $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ der Trägheitskörper. (2) ist in diesem Körper träge, daher ist der Zerlegungskörper $\mathbb{Q}$.

c) 7 ist ein Quadrat modulo 17, also ist in $\mathbb{Q}(\sqrt{7})$ die Zahl 17 voll zerlegt. In $\mathbb{Q}(\sqrt{5})/\mathbb{Q}$ ist (17) träge, daher ist dessen Trägheitskörper $\mathbb{Q}(\sqrt{5}, \sqrt{7})$ und der Zerlegungskörper $\mathbb{Q}(\sqrt{7})$.

5 . Aufgabe (6 Punkte):
Gegeben sei die Erweiterung $K := \mathbb{Q}(\zeta_{35})/\mathbb{Q}$ mit $\zeta_{35} := e^{2\pi i/35}$. Es werde die Zerlegung von (13) und (7) betrachtet.

a) Ist $\mathfrak{p}|(13)$ in K, welche Struktur hat die Gruppe $G_{\mathfrak{p}}$ und welche Ordnung hat sie?

b) Ist $\mathfrak{p}'|(7)$ in K, Ordnung hat die Gruppe $G_{\mathfrak{p}'}$?

c) Welche Struktur haben die Trägheitsgruppen von $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}'$?

Lösung:

a) $G_{\mathfrak{p}}$ ist abelsch der Ordnung 4, weil $13^2 = 169 \equiv 1 \mod 7$ $13^2 = 169 \equiv -1 \mod 5$ und somit $13^4 \equiv 1 \mod 35$ ist. Sie ist zyklisch, da sie wegen der Unverzweigtheit isomorph zu einer Galoisgruppe einer Erweiterung endlicher Körper ist.

b) $G_{\mathfrak{p}'}$ ist abelsch der Ordnung 6.4=24, da (7) in K verzweigt mit $e = 6$ und $f = 4$. Letzteres gilt, weil 7 eine 4. Einheitswurzel mod 5 ist.

c) Die Trägheitsgruppe verschwindet im ersten Fall, im zweiten ist sie isomorph zu $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

6 . Aufgabe (6 Punkte):
Wir betrachten die Gruppe $G = GL_2(\mathbb{F}_2)$, welche in üblicher Weise auf $A = \mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2 = (\mathbb{F}_2)^2$ (nicht-trivial) operiert.

a) Zeigen Sie, daß $\alpha := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ die Ordnung 3 hat und einen Normalteiler $g \leq G$ erzeugt.
Tip: Die Gruppe G ist endlich von welcher Ordnung?

b) Berechnen Sie das Hauptpolynom (=charakteristisches Polynom) von α und bestimmen Sie A^g.

c) Berechnen Sie $H^1(G, A)$.

Lösung:

a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Also hat α die Ordnung 3. Die Ordnung der Gruppe G selbst ist $(2^2 - 1)(2^2 - 2) = 6$, daher ist $(G : g) = 2$ und $g =< \alpha >$ ein Normalteiler.

b) Das Hauptpolynom ist die Determinante von

$$\begin{pmatrix} X - 1 & -1 \\ -1 & X \end{pmatrix}$$

und entspricht dem Polynom: $X^2 - X - 1$, welches keine Nullstelle in $\mathbb{F}_2$ hat. In Ermangelung einer Nullstelle gibt es auch keine Eigenwerte, A^g ist demnach trivial.

c) $\sharp g = 3$ und $\sharp \mathbb{F}_2^2 = 4$ sind teilerfremd. Daher ist $H^1(g, A) = 0$ und die Hochschild-Serre-Sequenz erlaubt den Schluß: $H^1(G, A) = 0$.