Übungen zur Algebraischen Zahlentheorie I

- 11. Blatt -

Prof. Dr. K. Wingberg
J. Bartels
.

WS 2009/2010
abzugeben bis Donnerstag, den 14. Januar 2010 um 9:15 Uhr
in den Kästen neben dem Seifertraum

http://www.mathi.uni-heidelberg.de/∼bartels/Vorlesung

Name:	/name/	Matrikelnummer:	/nr/
Übungsleiter:	/uebleiter/		
2. Name:	/namezwei/	2. Matrikelnummer:	/nrzwei/

Man achte auf eine saubere Darstellung und eine ordentliche Schrift.
Bitte keine maschinell erstellten Lösungen abgeben.

Aufgabe	1	2	3	4	$\sum$
Punkte					

---

1 . Aufgabe (6 Punkte):
Es sei $\{[G_i, A_i]\}_{i\in I}$ ein direktes System von Paaren $[G_i, A_i]$, wobei G_i eine proendliche Gruppe, A_i ein G_i-Modul und I eine filtrierende Indexmenge ist. Für $i \leq j$ seien Homomorphismenpaare $[\varphi_i^j, \psi_i^j]$ gegeben, wobei $\varphi_i^j : G_i \to G_j$ ein Homomorphismus proendlicher Gruppen und $\psi_i^j : A_j \to A_i$ ein Homomorphismus abelscher Gruppen ist mit der Eigenschaft, daß $\psi_i^j(\varphi_i^j(g_i)a_j) = g_i\psi_i^j(a_j)$ gilt. Es gelte weiter für $i \leq j \leq k$ das folgende: $[\varphi_i^k, \psi_i^k] = [\varphi_j^k \circ \varphi_i^j, \psi_i^j \circ \psi_j^k]$. Zeigen Sie, daß der direkte Limes dieses Systems wieder ein Paar einer proendlichen Gruppe G mit einer abelschen Gruppe A ist: $[G, A]$.

2 . Aufgabe (6 Punkte):
Dies

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\alpha"] & B \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\beta"] & C \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "i'"] & B' \arrow[r, "j'"] & C' & \end{tikzcd}$$

sei ein kommutatives Diagramm abelscher Gruppen. Zeigen Sie, daß es dann eine kanonische exakte Sequenz

$$Kern(i) \to Kern(\alpha) \to Kern(\beta) \to Kern(\gamma) \to Kokern(\alpha) \to Kokern(\beta) \to Kokern(\gamma) \to Kokern(j')$$

gibt. Wie sieht der Homomorphismus $Kern(\gamma) \to Kokern(\alpha)$ aus?

3 . Aufgabe (6 Punkte):
Es sei G eine Gruppe der Ordnung 2, A eine Gruppe der Ordnung 3, auf welcher G operiert. Berechnen Sie $H^2(G, A)$ für jede mögliche Operation. Was bedeutet das im Hinblick auf die letzte Aufgabe über die Gruppen der Ordnung 6?

4 . Aufgabe (6 Punkte) (Interpretation von $H^2(G, A)$)**:**
Es sei A eine endliche abelsche Gruppe. Wir betrachten die Menge der exakten Sequenzen proendlicher Gruppen

$$1 \to A \to \hat{G} \to G \to 1,$$

so daß eine $G-$Operation auf A durch

$$a^\sigma = \hat{\sigma} a \hat{\sigma}^{-1}$$

gegeben ist. Hierbei sei $\hat{\sigma}$ ein Urbild von $\sigma \in G$ aus der obigen Sequenz. Ist nun ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & \hat{G}' \arrow[r] \arrow[d, "f"] & G \arrow[r] \arrow[d, equal] & 1 \\ 1 \arrow[r] & A \arrow[r] & \hat{G} \arrow[r] & G \arrow[r] & 1 \end{tikzcd}$$

solcher exakten Sequenzen mit einem Isomorphismus f vorhanden, dann werden diese Sequenzen äquivalent genannt und die Menge der Äquivalenzklassen $[\hat{G}]$ wird mit $EXT(G, A)$ bezeichnet.

a) Zeigen Sie, daß die oben genannte Relation tatsächlich eine Äquivalenzrelation ist und in einer gegebenen Sequenz die Vorschrift $a^\sigma := \hat{\sigma} a \hat{\sigma}^{-1}$ die Gruppe A zu einem $G-$Modul macht.

b) Die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \lambda : EXT(G, A) & \to & H^2(G, A) \\ [\hat{G}] & \mapsto & x : G \times G \to A, (\sigma, \tau) \mapsto x(\sigma, \tau) := \widehat{\sigma\tau}\hat{\tau}^{-1}\hat{\sigma}^{-1}, \end{array}$$

wobei $\hat{\ }$ ein Urbild in $\hat{G}$ bezeichnet, liefert einen Isomorphismus. Was ist das Urbild des neutralen Elements?