Übungen zur Algebraischen Zahlentheorie I

- Weihnachtsblatt -

Prof. Dr. K. Wingberg WS 2009/2010
J. Bartels abzugeben bis Donnerstag, den 7. Januar 2010 um 9:15 Uhr
. in den Kästen neben dem Seifertraum

http://www.mathi.uni-heidelberg.de/∼bartels/Vorlesung

Name:	/name/	Matrikelnummer:	/nr/
Übungsleiter:	/uebleiter/		
2. Name:	/namezwei/	2. Matrikelnummer:	/nrzwei/

Man achte auf eine saubere Darstellung und eine ordentliche Schrift.
Bitte keine maschinell erstellten Lösungen abgeben.
N.B.: Alle hier erworbenen Punkte dienen allein der Pflege Ihres Punktekontos: es handelt sich um Zusatzpunkte. Sollten Sie sich dazu entschließen, diesen Zettel nicht zu bearbeiten, ist das kein Nachteil, sofern Sie am Ende in den restlichen Blättern mehr als 50% der Punkte haben.

Aufgabe	1	2	3	4	$\sum$
Punkte					

Rekapitulation: Eine proendliche Gruppe G ist ein projektiver Limes endlicher Gruppen G_i:

$$G = \varprojlim_i G_i.$$

Diese sei von nun an gegeben.

1 . Aufgabe (6 Punkte):
Zeigen Sie, daß für eine kompakte Hausdorffsche Gruppe G die folgenden Aussagen gleichwertig sind:

- G ist eine proendliche Gruppe.
- G ist vollkommen unzusammenhängend.
- Es gibt eine Umgebungsbasis $\mathfrak{U}$ offener Normalteiler des Einselements $\iota \in G$.

2 . Aufgabe (6 Punkte):
Es sei A ein $G-$Modul, d.h. außer den Eigenschaften aus Def. 3.1 gelte, daß die Operation $G \times A \to A$ bezüglich einer vorab gegebenen Topologie auf A, welche das Hausdorffsche Axiom erfüllt, stetig ist. Zeigen Sie, daß diese Aussagen gleichwertig sind:

- Die Operation auf A ist bezüglich der diskreten Topologie auf A stetig.
- Der Stabilisator $G_m := \{g \in G | g(a) = a\}$ ist für jedes $a \in A$ eine offene Untergruppe.
- $A = \bigcup A^U$, wobei U die offenen Untergruppen von G durchläuft.

3 . Aufgabe (6 Punkte):
Es sei zu $n \in \mathbb{N}$ die Menge $X^n = X^n(G, A) := Abb(G^{n+1}, A)$ der stetigen Abbildungen $G^{n+1} \to A$ gegeben. Zeigen Sie, daß

a) X^n durch die Vorschrift $(\sigma x)(\sigma_0, ..., \sigma_n) := \sigma x(\sigma^{-1}\sigma_0, ..., \sigma^{-1}\sigma_n)$ für $\sigma, \sigma_i \in G$ ein $G-$Modul wird.

b) aus den Abbildungen $\partial^n : X^{n-1} \to X^n, (\partial x)(\sigma_0, ..., \sigma_n) := \sum_{i=0}^{n}(-1)^i x(\sigma_0, ..., \hat{\sigma_i}, ..., \sigma_n)$ und $\partial^0 : A \to X^0, (\partial a)(\sigma) := a$ eine exakte Sequenz entsteht:

$$0 \to A \xrightarrow{\partial^0} X^0 \xrightarrow{\partial^1} X^1 \xrightarrow{\partial^2} ...$$

c) wenn man auf diese Sequenz den Fixmodulfunktor $(\_)^G$ anwendet, d.h. aus dieser Sequenz wird

$$0 \to A^G \xrightarrow{\partial^0} (X^0)^G \xrightarrow{\partial^1} (X^1)^G \xrightarrow{\partial^2} ...,$$

dann ist diese Sequenz zwar noch ein Komplex, d.h. die Verkettung zweier aufeinander folgender Abbildungen ist die Nullabbildung, jedoch nicht mehr exakt.

4 . Aufgabe (6 Punkte):
Es sei H eine weitere proendliche Gruppe. Zeigen Sie daß

$$Hom(G, H) = \varprojlim_{V \leq H} \varinjlim_{U \leq G} Hom(G/U, H/V) \text{ gilt,}$$

wobei in beiden Limites die offenen Normalteiler durchlaufen werden und die Übergangsabbildungen durch die kanonischen Projektiones gegeben sind.

$$\begin{array}{c}
\spadesuit \\
\pm \\
\gg\ll \\
\gg \heartsuit \ll \\
\Uparrow\gg\gg\ll\ll\Uparrow \\
>\gg\gg \Diamond \ll\ll< \\
\gg\gg\ll\ll \\
\gg\gg \circ \ll\ll \\
\gg \nabla \gg\ll \phi \ll \\
\gg\gg\gg \infty \ll\ll\ll\ll \\
\Uparrow\gg \oplus \gg\gg\ll\ll\curvearrowleft\ll\Uparrow \\
>\gg\gg\gg\gg \Theta \ll\ll\ll\ll< \\
\gg \odot \gg\gg\ll\ll \int \ll \\
\gg\gg\gg\gg\bowtie\ll\ll\ll\ll \\
\gg\gg \cup \gg\gg\ll\ll \delta \ll \\
\Uparrow\gg\gg\gg\gg\gg \otimes \ll\ll\ll\ll\ll\Uparrow \\
>\gg\gg \cap \gg\gg\gg\ll\ll \copyright \circledR \ll\ll< \\
\| \\
\Longleftrightarrow
\end{array}$$

Ein angenehmes und ruhiges Weihnachtsfest und Gottes Segen auch im kommenden Jahr!