

Übungen zur Algebraischen Zahlentheorie I

- Weihnachtsblatt -

Prof. Dr. K. Wingberg
J. Bartels

WS 2009/2010
abzugeben bis Donnerstag, den 7. Januar 2010 um 9:15 Uhr
in den Kästen neben dem Seifertraum

<http://www.mathi.uni-heidelberg.de/~bartels/Vorlesung>

Name: /name/ Matrikelnummer: /nr/
Übungsleiter: /uebleiter/
2. Name: /namezwei/ 2. Matrikelnummer: /nrzwei/

Man achte auf eine saubere Darstellung und eine ordentliche Schrift.
Bitte keine maschinell erstellten Lösungen abgeben.
N.B.: Alle hier erworbenen Punkte dienen allein der Pflege Ihres Punktekontos: es handelt sich um Zusatzpunkte. Sollten Sie sich dazu entschließen, diesen Zettel nicht zu bearbeiten, ist das kein Nachteil, sofern Sie am Ende in den restlichen Blättern mehr als 50% der Punkte haben.

Aufgabe	1	2	3	4	Σ
Punkte					

Rekapitulation: Eine proendliche Gruppe G ist ein projektiver Limes endlicher Gruppen G_i :

$$G = \varprojlim_i G_i.$$

Diese sei von nun an gegeben.

1 . Aufgabe (6 Punkte):

Zeigen Sie, daß für eine kompakte Hausdorffsche Gruppe G die folgenden Aussagen gleichwertig sind:

- G ist eine proendliche Gruppe.
- G ist vollkommen unzusammenhängend.
- Es gibt eine Umgebungsbasis \mathfrak{U} offener Normalteiler des Einselements $\iota \in G$.

2 . Aufgabe (6 Punkte):

Es sei A ein G -Modul, d.h. außer den Eigenschaften aus Def. 3.1 gelte, daß die Operation $G \times A \rightarrow A$ bezüglich einer vorab gegebenen Topologie auf A , welche das Hausdorffsche Axiom erfüllt, stetig ist. Zeigen Sie, daß diese Aussagen gleichwertig sind:

- Die Operation auf A ist bezüglich der diskreten Topologie auf A stetig.
- Der Stabilisator $G_a := \{g \in G \mid g(a) = a\}$ ist für jedes $a \in A$ eine offene Untergruppe.
- $A = \bigcup A^U$, wobei U die offenen Untergruppen von G durchläuft.

3 . Aufgabe (6 Punkte):

Es sei zu $n \in \mathbb{N}$ die Menge $X^n = X^n(G, A) := \text{Abb}(G^{n+1}, A)$ der stetigen Abbildungen $G^{n+1} \rightarrow A$ gegeben. Zeigen Sie, daß

- X^n durch die Vorschrift $(\sigma x)(\sigma_0, \dots, \sigma_n) := \sigma x(\sigma^{-1}\sigma_0, \dots, \sigma^{-1}\sigma_n)$ für $\sigma, \sigma_i \in G$ ein G -Modul wird.
- aus den Abbildungen $\partial^n : X^{n-1} \rightarrow X^n$, $(\partial x)(\sigma_0, \dots, \sigma_n) := \sum_{i=0}^n (-1)^i x(\sigma_0, \dots, \hat{\sigma}_i, \dots, \sigma_n)$ und $\partial^0 : A \rightarrow X^0$, $(\partial a)(\sigma) := a$ eine exakte Sequenz entsteht:

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{\partial^0} X^0 \xrightarrow{\partial^1} X^1 \xrightarrow{\partial^2} \dots$$

- wenn man auf diese Sequenz den Fixmodulfunktor $(_)^G$ anwendet, d.h. aus dieser Sequenz wird

$$0 \rightarrow A^G \xrightarrow{\partial^0} (X^0)^G \xrightarrow{\partial^1} (X^1)^G \xrightarrow{\partial^2} \dots,$$

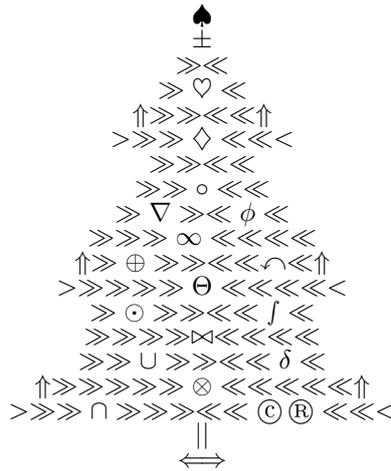
dann ist diese Sequenz zwar noch ein Komplex, d.h. die Verkettung zweier aufeinander folgender Abbildungen ist die Nullabbildung, jedoch nicht mehr exakt.

4 . Aufgabe (6 Punkte):

Es sei H eine weitere proendliche Gruppe. Zeigen Sie daß

$$\text{Hom}(G, H) = \varprojlim_{V \leq H} \varinjlim_{U \leq G} \text{Hom}(G/U, H/V) \text{ gilt,}$$

wobei in beiden Limites die offenen Normalteiler durchlaufen werden und die Übergangsabbildungen durch die kanonischen Projektionen gegeben sind.



Ein angenehmes und ruhiges Weihnachtsfest und Gottes Segen auch im kommenden Jahr!