Übungen zur Algebraischen Zahlentheorie I

- 1. Blatt -

Prof. Dr. K. Wingberg
J. Bartels

WS 2009/2010
abzugeben bis Donnerstag, den 22. Oktober 2009 um 9:15 Uhr
in den Kästen neben dem Seifertraum

http://www.mathi.uni-heidelberg.de/~bartels/Vorlesung

Name:	/name/	Matrikelnummer:	/nr/
Übungsleiter:	/uebleiter/		
2. Name:	/namezwei/	2. Matrikelnummer:	/nrzwei/

Man achte auf eine saubere Darstellung und eine ordentliche Schrift.
Bitte keine maschinell erstellten Lösungen abgeben.

Aufgabe	1	2	3	4	$\sum$
Punkte					

---

1 . Aufgabe (6 Punkte):
Finden Sie alle ganzzahligen Lösungen der folgenden Gleichung:

$$x^3 = y^2 + 4.$$

2 . Aufgabe (6 Punkte) (Fermat im Fall $n = 3$):
Es sei $A := \mathbb{Z}[j]$, wobei j eine komplexe Größe sei, für die $j^2 + j + 1 = 0$ gilt. Für eine komplexe Zahl z bezeichne $\overline{z}$ die dazu komplex Konjugierte. Zeigen Sie:

a) Die Abbildung $N : A \to \mathbb{N}; a \mapsto a\overline{a} = |a|^2$ ist multiplikativ und eine Normfunktion, d.h. A ist damit ein euklidischer Ring. Die Einheiten des Rings A sind durch die Menge $\{\pm 1, \pm j, \pm j^2\}$ gegeben.

b) Das Element $\lambda := 1 - j$ ist ein Primelement und $A/\lambda A$ ist ein Körper mit drei Elementen und es gilt: $3 = -j^2\lambda^2$. Die Kuben des Restklassenrings $A/9A = A/\lambda^4 A$ sind $0, \pm 1, \pm\lambda^3$.

c) Es sei u eine Einheit aus A und $x, y, z \in A$, dann folgt aus $x^3 + y^3 = uz^3$, daß $xyz = 0$ gilt.

3 . Aufgabe (6 Punkte):
Es sei $K := \mathbb{Q}(\sqrt{m}, \sqrt{n})$ mit quadratfreien ganzen Größen $m, n \neq 1$ und $k := mn/(m,n)^2$. Zeigen Sie:

a) Ein Element α in K ist genau dann ganz über $\mathbb{Q}$, wenn dessen Relativnorm $N_{K/\mathbb{Q}(\sqrt{m})}(\alpha)$ und $Tr_{K/\mathbb{Q}(\sqrt{m})}$ ganz über $\mathbb{Q}$ sind.

b) Wenn $m \equiv 3 \mod 4$ und $n \equiv k \equiv 2 \mod 4$ gilt, ist jedes Element aus $\mathcal{O}_K$ in der Form

$$\frac{a + b\sqrt{m} + c\sqrt{n} + d\sqrt{k}}{2} \text{ mit } a, b, c, d \in \mathbb{Z} \text{ schreibbar.}$$

Die Relativnorm betrachtend, schließen Sie zum einen, daß a und b gerade sein müssen und für c und d die Relation $c \equiv d \mod 2$ gelten muß und zum anderen, daß

$$\{1, \sqrt{m}, \sqrt{n}, \frac{\sqrt{n} + \sqrt{k}}{2}\}$$

eine Ganzheitsbasis darstellt.

4 . Aufgabe (6 Punkte) (Fortsetzung der vorhergehenden Aufgabe)**:**

a) Ist $m \equiv 1 \mod 4$ und $n \equiv k \equiv 2$ oder $3 \mod 4$, dann ist jedes ganze Element aus $\mathcal{O}_K$ in der Form

$$\frac{a + b\sqrt{m} + c\sqrt{n} + d\sqrt{k}}{2} \text{ mit } a, b, c, d \in \mathbb{Z} \text{ schreibbar.}$$

Dabei gelten die Beziehungen $a \equiv b \mod 2$ und $c \equiv d \mod 2$. Folgern Sie, daß

$$\{1, \frac{1 + \sqrt{m}}{2}, \sqrt{n}, \frac{\sqrt{n} + \sqrt{k}}{2}\} \text{ eine Ganzheitsbasis von } \mathcal{O}_K \text{ ist.}$$

b) Ist $m \equiv n \equiv k \equiv 1 \mod 4$, dann läßt sich jedes ganze Element α aus $\mathcal{O}_K$ in der Form

$$\frac{a + b\sqrt{m} + c\sqrt{n} + d\sqrt{k}}{4} \text{ mit } a, b, c, d \in \mathbb{Z} \text{ schreiben.}$$

Dabei gelten die Beziehungen $a \equiv b \equiv c \equiv d \mod 2$. Addiert man zu α ein geeignetes ganzzahliges Vielfaches von $\left(\frac{1+\sqrt{m}}{2}\right)\left(\frac{1+\sqrt{k}}{2}\right)$, dann erhält man einen Ausdruck der Form

$$\frac{r + s\sqrt{m} + t\sqrt{n}}{2} \text{ mit } r, s, t \in \mathbb{Z} \text{ und } r + s + t \equiv 0 \mod 2.$$

Folgern Sie, daß

$$\{1, \frac{1 + \sqrt{m}}{2}, \frac{1 + \sqrt{n}}{2}, \left(\frac{1 + \sqrt{m}}{2}\right)\left(\frac{1 + \sqrt{k}}{2}\right)\} \text{ eine Ganzheitsbasis von } \mathcal{O}_K \text{ ist.}$$