Vortrag 9: Was ist die Dimension?

Buote Xu, Andreas Risch

04.06.2009

In diesem Kapitel werden wir über einem algebraisch abgeschlossenen Basiskörper k arbeiten.

0 Einführung

Die Dimension ist eine wichtige Invariante einer algebraischen Varietät. Später können wir über Varietäten der Dimension 0 (Punkte), 1 (Kurven) und 2 (Flächen) usw. sprechen. Wir werden im Folgenden drei unterschiedliche Dimensionsbegriffe prägen. Wir werden eine Definition der Dimension geben, die topologischer Natur ist, und weiter den Begriff der Krull-Dimension einführen, sowie die Verknüpfung zum Transzendenzgrad des Quotientenkörpers des affinen Koordinatenringes über k aufzeigen. Diese Begrifflichkeiten werden wir auf algebraische Varietäten anwenden und feststellen, dass sie zu gleichen Ergebnissen führen. Des Weiteren werden wir die Eigenschaften abgeschlossener Untervarietäten sowie die Dimension von Schnitten derer betrachten und eine geometrische Version des Krull'schen Hauptidealsatzes formulieren.

1 Die topologische Definition und die Verbindung zur Algebra

a. Definitionen

Den grundlegenden Umstand, den wir aufzeigen möchten, ist, dass jede abgeschlossene irreduzible Untermenge einer irreduziblen algebraischen Varietät von einer kleineren Dimension als die Varietät selbst ist.

Definition 1.1. *Sei X eine Menge. Eine Kette aus Untermengen von X ist eine Folge $X_0 \subset X_1 \subset ... \subset X_n$, wobei die Mengen X_i voneinander verschieden sind. Eine solche Kette hat die Länge n.*

Definition 1.2. *Sei X ein topologischer Raum. Die Dimension von X ist das Supremum der Längen der Ketten irreduzibler abgeschlossener Untermengen von X (vgl. Satz-Definition I, 3.1.). Sie ist entweder eine natürliche Zahl oder $+\infty$. Wir bezeichnen sie mit* $\dim X$.

b. Topologische Bemerkungen

Satz - Definition 1.3. *Sei X ein topologischer Raum und Y ein topologischer Unterraum von X, so ist* $\dim Y \leq \dim X$. *Ist X endlich dimensional, so definieren wir die Kodimension von Y in X als die Zahl* $\dim X - \dim Y$. *Ist X weiter irreduzibel und von endlicher Dimension und Y eine echte abgeschlossene Untermenge, so ist* $\dim Y < \dim X$.

Beweis: Sei $F_0 \subset ... \subset F_n$ eine Kette aus abgeschlossenen irreduziblen Untermengen von Y mit $n = \dim Y$. Dann ist nach Satz I,3.5. auch $\overline{F}_0 \subset \ldots \subset \overline{F}_n$ eine Kette aus in X abgeschlossenen irreduziblen Untermengen. Diese abgeschlossenen Mengen sind paarweise verschieden, da für jedes i $F_i = \overline{F}_i \cap Y$ ist, weil die Mengen F_i abgeschlossen in Y sind und die F_i wiederum paarweise verschieden sind. Also ist $\dim Y \leq \dim X$. Ist weiter X irreduzibel und von Y verschieden, so fügt man X zu einer maximalen Kette in Y hinzu, und man erhält, dass $\dim Y < \dim X$.

Satz 1.4. *Sei X ein topologischer Raum. Wir nehmen an, dass $X = \bigcup_{i=1}^{n} X_i$, wobei die Mengen X_i abgeschlossen sind. Dann ist* $\dim X = \sup \dim X_i$.

Beweis: Nach Satz 1.3. folgt, dass $\dim X \geq \sup \dim X_i$. Sei nun $p := \sup \dim X_i$. Ist p unendlich, so ist die Aussage klar. Ist p endlich, so nehmen wir an, dass $\dim X > p$. Es gibt also eine Kette $F_0 \subset \ldots \subset F_{p+1}$ mit F_i in X abgeschlossen und irreduzibel. Dann gilt $F_{p+1} = \bigcup_{i=1}^{n}(X_i \cap F_{p+1})$. Da aber F_{p+1} irreduzibel ist und die $X_i \cap F_{p+1}$ abgeschlossen sind, ist F_{p+1} in einer der Mengen X_i enthalten. Damit ist $F_0 \subset \ldots \subset F_{p+1}$ Kette in X_i mit der Länge $p+1$. Dies widerspricht jedoch $p = \sup \dim X_i$. Also gilt $\dim X \leq p$ und weiter $\dim X = p$.

Im Besonderen kann man die obigen Aussagen anwenden, wenn die Mengen X_i die irreduziblen Komponenten einer algebraischen Varietät X sind (vgl. Kapitel III, 4.4.). Das Problem der Dimension ist somit mehr oder weniger auf das Problem der Dimensionen irreduzibler Varietäten reduziert.

c. Beziehung zur Krull-Dimension

Wir führen nun den Begriff der Krull-Dimension eines Rings A ein und wenden diesen auf den affinen Koordinatenring $\Gamma(V)$ einer affinen algebraischen Varietät an.

Definition 1.5. *Sei A ein Ring. Die Krull-Dimension von A ist das Maximum der Längen der Ketten aus Primidealen in A. Wir bezeichnen sie mit* $\dim_{\mathrm{K}} A$.

Beispiel 1.6. 1) Sei R ein Hauptidealring, welcher kein Körper ist. Dann gilt $\dim_{\mathrm{K}} R = 1$. Da R Integritätsring ist, handelt es sich bei (0) um ein Primideal, und jedes weitere von (0) verschiedene Primideal, dessen Existenz, da R kein Körper, jedoch faktorieller Ring ist, sichergestellt ist, ist bereits maximales Ideal, da R ein Hauptidealring ist. Also ist 1 die maximale Länge einer Kette aus Primidealen. Ein Körper hat demnach die Dimension 0.
2) $\dim_{\mathrm{K}} k[X_1, \ldots, X_n] \geq n$, wie die Kette $(0) \subset (X_1) \subset (X_1, X_2) \subset \ldots \subset (X_1, \ldots, X_n)$ zeigt. Tatsächlich ist dieser Ring von der Dimension n (vgl. 1.9 unterhalb).

Satz 1.7. *Sei V eine affine algebraische Varietät und sei $\Gamma(V) = \Gamma(V, O_V)$ die Algebra regulärer Funktionen über V. Dann ist* $\dim V = \dim_{\mathrm{K}} \Gamma(V)$.

Beweis Dies folgt aus der inklusionsumkehrenden Bijektion zwischen affinen algebraischen Untermengen von V, welche nach der Zariski-Topologie gerade die abgeschlossenen irreduziblen Untermengen von V sind, und Primidealen von $\Gamma(V)$ nach Satz I, 4.9. Jeder Kette in $\Gamma(V)$ lässt sich also eindeutig eine Kette in V unter Umkehrung der Inklusion zuordnen und umgekehrt. Damit sind die Dimensionen gleich.

d. Beziehung zum Transzendenzgrad

Nun zeigen wir, dass es noch eine weitere Möglichkeit zur Definition der Dimension gibt. Wir betrachten nun den Transzendenzgrad des Quotientenkörpers des Koordinatenringes über k. In folgenden Abschnitt wird also die Brücke von geometrischen zu algebraischen Objekten geschlagen, so kann man z.B. die Dimension von k^n berechnen.

Theorem 1.8. *Sei A ein Integritätsbereich, welcher eine endlich erzeugte k-Algebra ist und sei $K = Fr(A)$ sein Quotientenkörper. Dann ist die Krull-Dimension von A gleich dem Transzendenzgrad von K über k:* $\dim_{\mathrm{K}} A = \partial_k K$.

Beweis *Introduction to Algebraic Geometry* von Dolgachev, Lecture 11 Lemma 1 & Theorem 1, oder nach Anleitung in Perrin, Problem III.

Korollar 1.9. *Es gilt* $\dim_{\mathrm{K}} k[X_1, ..., X_n] = n$. *Somit folgt, dass der affine Raum k^n von der Dimension n ist.*

Beweis Der Quotientenkörper von $k[X_1, ..., X_n]$ ist gerade $k(X_1, ..., X_n)$, dessen Transzendenzgrad über k durch n gegeben ist (X_i sind gerade Transzendenzbasiselemente). Somit ist nach Theorem 1.8 $\dim_{\mathrm{K}} k[X_1, ..., X_n] = n$. Da $\Gamma(k^n) = k[X_1, ..., X_n]$ gilt mit Satz 1.7 $\dim k^n = \dim_{\mathrm{K}} k[X_1, ..., X_n] = n$.

Korollar 1.10. *Sei V eine irreduzible affine algebraische Varietät, sei $\Gamma(V)$ der zugehöhrige Koordinatenring über V und sei $K(V) = Fr(\Gamma(V))$ der Körper der rationalen Funktionen über V. Dann ist* $\dim V = \dim_{\mathrm{K}} \Gamma(V) = \partial_k K(V)$. *Im Übrigen ist die Dimension einer affinen algebraischen Varietät endlich.*

Beweis Da V irreduzibel ist $\Gamma(V)$ nach Satz I,4.9. ein Integritätsbereich. Nach Satz 1.7. ist $\dim V = \dim_{\mathrm{K}} \Gamma(V)$ und nach Theorem 1.8. wiederum $\dim_{\mathrm{K}} \Gamma(V) = \partial_k K(V)$. Da $\Gamma(V)$ weiter eine endlich erzeugte k-Algebra ist ($\Gamma(V)$ ist Bild unter dem Restriktionshomomorphismus $r : k[X_1, ..., X_n] \to \mathcal{F}(V, k)$ vom Polynomring $k[X_1, ...X_n]$, welcher ebenfalls eine endlich erzeugte k-Algebra ist), ist der Quotientenkörper $K(V)$ eine endliche k-Erweiterung, also ist der Transzendenzgrad von $K(V)$ über k endlich (vgl. Zusammenfassung 3.c). Diese Aussage lässt sich auf affine algebraische Varietäten ausweiten, da sich diese nach Korollar III,4.4. als endliche Vereinigung ihrer Komponenten darstellen lassen. Die Komponenten wiederum sind irreduzibel, also insbesondere abgeschlossen in V. Nach Satz 1.4. ist auch die Dimension der algebraischen Varietät endlich, da sie gleich der maximalen Dimension der Komponenten ist.

e. Von einer Varietät zu einer offenen Untermenge

Wir erläutern im Folgenden die Beziehung zwischen der Dimension einer algebraischen Varietät und einer beliebigen nicht-leeren offenen Untermenge und geben eine Anleitung, wie die Dimension einer algebraischen Varietät ermittelt werden kann.

Satz 1.11. *Sei X eine irreduzible algebraische Varietät und sei U eine nicht-leere offene Untermenge von X. Dann ist* $\dim X = \dim U$ *und diese Dimension ist endlich.*

Beweis Der Beweis erfolgt in mehreren Schritten:
1) Wir behandeln zuerst den Fall, bei welchem X eine irreduzible affine algebraische Varietät mit zugehörigem Ring $\Gamma(X)$ ist, welche nach Definition I,6.15. integer ist. Da die offenen Standardmengen nach Bemerkung I,1.5. eine Basis der offenen Mengen bilden, enthält dann U eine offene Standardmenge $D(f)$, auf welcher $f \in \Gamma(X)$ nicht verschwindet und $\dim D(f) \leq \dim U \leq \dim X$ nach Satz 1.3. ist. Da der affine Koordinatenring $\Gamma(X)_f$ von $D(f)$ ein lokalisierter Ring von $\Gamma(X)$ ist ($\frac{g}{f^n} \in \Gamma(X)_f$ mit $g \in \Gamma(X)$, da f auf $D(f)$ nirgends verschwindet), haben diese beiden Ringe den gleichen Quotientenkörper und folglich X und $D(f)$ die gleiche Dimension nach Satz 1.10., also nach der obigen Ungleichung auch U.
2) Die nicht-leeren offen affinen Untermengen von X haben alle die gleiche Dimension, wie man aus der Betrachtung einer Schnittmenge zweier Untermengen erkennt. Seien U und V zwei nicht-leere offene Untermengen, so gibt es wiederum eine offene Standardmenge $D(f) \subset U \cap V$, da der Schnitt auf Grund der Irreduzibilität von X nicht-leer ist. Für die Dimensionen gilt dann nach Satz 1.3. $\dim D(f) \leq \dim U \cap V \leq \dim U \leq \dim X$, also nach dem Obigen $\dim D(f) = \dim U \cap V = \dim U = \dim X$ und mit dem Entsprechenden für V auch $\dim U = \dim V = \dim X$.
3) Ist nun X eine irreduzible algebraische Varietät, so gilt $\dim X = \dim U = r$ für eine beliebige offene affine Untermenge U, welche zu einer irreduziblen affinen algebraischen Varietät der Dimension r isomorph ist. Angenommen, es gilt $\dim X > r$. Dann gibt es eine Kette $F_0 \subset ... \subset F_n$ irreduzibler in X abgeschlossener Teilmengen F_i, sodass $n > r$ ist. Sei $x \in F_0$ und sei weiter $U \subset X$ eine offene affine Untermenge, welche x enthält. Wir betrachten nun die in U abgeschlossenen Mengen $U \cap F_i$. Diese sind weiter irreduzibel, da sie nicht-leere offene Untermengen der irreduziblen Mengen F_i sind. Außerdem sind sie paarweise verschieden, denn $\overline{F_i \cap U} = F_i$ und die F_i sind paarweise verschieden. Diese Identität ist darauf zurückzuführen ist, dass die $F_i \cap U$ nicht-leere offene Untermengen der irreduziblen Mengen F_i sind und somit nach Satz-Definition I,3.1. dicht in den F_i liegen. Dann besitzt jedoch die Kette $F_0 \cap U \subset ... \subset F_n \cap U$ die Länge n in U, was im Widerspruch zu $\dim U = r < n$ steht. Also ist $\dim U \geq \dim X$ und da $U \subset X$ wegen Satz 1.3. sogar $\dim U = \dim X$
4) Ist schließlich U eine beliebige offene Untermenge einer irreduziblen algebraischen Varietät X, so enthält U nach Satz III,4.3. eine offene affine Untermenge, da diese eine Basis der offenen Untermengen in X bilden.

Kommentar 1.12. Der obige Satz zeigt uns nun eine Methode auf, die Dimension einer beliebigen algebraischen Varietät zu bestimmen.
1) Falls nötig wird die algebraische Varietät X in die endliche Vereinigung ihrer Komponenten zerlegt.
2) Ist X bereits irreduzibel oder eine Komponente, so können wir zu einer affinen offenen Menge übergehen, also X als affin und irreduzibel annehmen.
3) Da nun X affin und irreduzibel ist, können wir eine offene Standardmenge $D(f) \subset X$ wählen und den Transzendenzgrad des Quotientenkörpers $K(X)$ von $\Gamma(V)_f$ über k berechnen.
4) Die Dimension der algebraische Varietät ist nun das Maximum der zu den einzelnen Komponenten gehörenden Transzendenzgrade.

Beispiel 1.13. 1) Es gilt $\dim \mathbf{P}^n(k) = n$. Der $\mathbf{P}^n(k)$ ist die disjunkte Vereinigung der affinen Räume k^i mit $i = 1..n$. Diese haben nach Korollar 1.9. die Dimension $\dim k^i = i$ und somit ist $\dim \mathbf{P}(k^{n+1}) = n$.
2) Eine affine Varietät V der Dimension 0 ist endlich. Zerlegt man V in ihre Komponenten V_i, so haben diese nach Satz 1.4. ebenfalls die Dimension 0, hieraus kann man folgern, dass diese wiederum endlich sind.

Definition 1.14. *Eine algebraische Varietät der Dimension 1 (bzw. 2) wird eine Kurve (bzw. eine Fläche) genannt.*

Schließlich bleibt festzustellen, dass Varietäten Komponenten kleinere Dimension besitzen können, sodass wir uns nun diesen zuwenden werden.

2 Dimension und Gleichungen zählen

a. Der Hauptidealsatz

Sei V eine affine algebraische Varietät der Dimension d und $f \in \Gamma(V)$.

Wir werden uns nun mit Untervarietäten beschäftigen, die Dimension der Untervarietäten von V ist mit der Dimension der Varietät V verknüpft, auf eine ähnliche Art und Weise wie Hyperebenen in der linearen Algebra. Wir erhalten hier allerdings nur Ungleichungen. Wenn wir Gleichungen zählen, können wir die Dimension der dadurch definierten Untervarietäten abschätzen.

Beginnen wir mit 2 Sonderfällen.

Satz 2.1. *a) $V(f)$ ist leer $\Leftrightarrow$ f ist invertierbar in $\Gamma(V)$*
b) $V(f)$ enthält eine irreduzible Komponente $\Leftrightarrow$ f ist Nullteiler

Beweis: a) Ist $f \in \Gamma(V)$ invertierbar, so gibt es ein $g \in \Gamma(V)$, sodass $f \cdot g = 1$, also ist $V(F)$ leer. Ist nun umgekehrt $V(f) = V((f))$ leer, so folgt mit Theorem I,4.1. (schwacher Nullstellensatz), dass $(f) = \Gamma(V)$ ist, also f eine Einheit in $\Gamma(V)$ ist.
b) Sei f Nullteiler, sodass $f \cdot g = 0$ für ein gewisses $g \in \Gamma(V)\backslash\{0\}$ und wegen $V(f \cdot g) = V(f) \cup V(g)$ mit $V(g) \neq V$ gilt: Wenn V_i eine Komponente von V ist, dann ist $V_i = (V(f) \cap V_i) \cup (V(g) \cap V_i)$ und somit auf Grund der Irreduzibilität ist V_i Teilmenge von $V(f)$ oder von $V(g)$. Da nicht alle Komponenten in $V(g)$ enthalten sein können, denn $V(g) \neq V$, muss $V(f)$ zumindest eine Komponente beinhalten. Enthält umgekehrt $V(f)$ nun eine Komponente V_i, so betrachte man ein $g \in \Gamma(V)\backslash\{0\}$, welches auf allen anderen Komponenten von V verschwindet. Dieses existiert nach Bemerkung I, 2.2.2.. Somit ist $f \cdot g = 0$, f also Nullteiler.

Definition 2.2: *Eine algebraische Varietät X wird äquidimensional genannt, wenn all ihre irreduziblen Komponenten die selbe Dimension haben.*

Bemerkungen: Natürlich ist eine irreduzible algebraische Varietät äquidimensional.

Satz 2.3. Krulls Hauptidealsatz (geometrische Form)
Sei V eine äquidimensionale affine algebraische Varietät der Dimension n und $f \in \Gamma(V)$ ein Element welches weder invertierbar noch ein Nullteiler ist. Dann ist $V(f)$ eine äquidimensionale affine algebraische Varietät der Dimension $n-1$.

Beweis: Siehe *Introduction to Algebraic Geometry* von Dolgachev, Lecture 11 Theorem 2 für einen vollständigen Beweis.
Wir werden uns hier auf den trivialen Fall $V = k^n$ beschränken:
Sei f ein nicht-konstantes Polynom (oBdA Grad $f > 0$ in X_n). Nach Kapitel I, 4.12 folgt $V(f) = V(f_1) \cup \ldots \cup V(f_r)$ wobei $f_1 \ldots f_r$ die irreduziblen Komponenten von f sind, die einzelnen $V(f_i)$ sind jeweils irreduzibel. Es muss also $\dim V(f_i) = n - 1$ $\forall i$ gezeigt werden. Wir können also oBdA annehmen, dass f irreduzibel ist, dann gilt

$$\Gamma(V(f)) = k[X_1, \ldots, X_n]/(f),$$

dies ist ein Integritätsring wegen Bemerkung I, Satz 4.9., wir können also Satz 1.8 anwenden. Da also die Krulldimension unseres Ringes mit dem Transzendenzgrad des Quotientenkörpers übereinstimmt, zeigen wir, dass die Bilder $\overline{X}_1, ..., \overline{X}_n \in \Gamma(V(f))$ der Variablen X_i eine Transzendenzbasis bilden (siehe Anhang zur Definition). In der Tat ist $\overline{X}_n$ algebraisch über $k(\overline{X}_1, ..., \overline{X}_{n-1})$, betrachte den Erweiterungskörper $k(\overline{X}_1, ..., \overline{X}_{n-1})$. Wir müssen zeigen, dass für alle Polynome $f \in (\overline{X}_1, ..., \overline{X}_{n-1})[X]$ gilt, dass $f[X] = 0 \Rightarrow f = 0$. Setze $\overline{X}_n$ ein, dann ist $f(\overline{X}_n)$ kongruent 0 mod (f), dies war aber nicht das Nullpolynom. Andererseits sind die Variablen $\overline{X}_1, ..., \overline{X}_{n-1}$ algebraisch unabhängig, denn sonst gäbe es eine polynomielle Gleichung $g(X_1, ..., X_{n-1}) \in (f)$, dies ist jedoch nicht möglich da g nicht von X_n abhängt.

Korollar 2.4. *Sei V eine irreduzible affine algebraische Varietät der Dimension n und $f_1, \ldots, f_r \in \Gamma(V)$. Wenn W eine irreduzible Komponente von $V(f_1, ..., f_r)$ ist, dann gilt $\dim W \geq n - r$.*

Beweis: Induktion über r. $\Gamma(V)$ ist integer, also kann f nicht Nullteiler sein. Sei für den Anfang $r = 1$. Wenn nun f_1 weder irreduzibel noch auf V ganz verschwindet, sind wir fertig - denn nach 2.3 ist $V(f)$ eine äquidimensionale affine algebraische Varietät der Dimension $n - 1$ und somit gilt auch $\dim W = n - 1$. Weiter kann f_1 nicht invertierbar sein, denn sonst wäre nach 2.1. $V(f_1) = \varnothing$. $W \subset V(f_1)$ ist jedoch irreduzibel und somit nicht leer (nach I, Def 3.1). Verschwindet f_1 auf V, dann ist $V(f_1) = V$ und wir erhalten die Aussage da alle irreduziblen Komponenten von V die Dimension n haben nach Voraussetzung. Um schließlich von $r - 1$ auf r zu schließen, wenden wir die Induktionsbehauptung auf die Komponente von $V(f_1)$ an, die W enthält.

Zu bemerken ist, dass für den Fall f Nullteiler $V(f)$ nicht zwangsläufig äquidimensional mit Dimension n oder $n - 1$ sein muss.
Sei zum Beispiel $V = V(XY)$ und $f = x(x + y + 1)$, dann können man beweisen dass $V(f)$ die Vereinigung einer Geraden und eines Punktes ist.

Natürlich können wir diesen Schluss für $r > 1$ Gleichungen nicht verbessern. (Betrachte z.B. den Fall dass alle f_i gleich sind.)

b. Das Schnitt-Theorem

Ein weiteres Mal wird diese Aussage von der linearen Algebra inspiriert, und zwar vom Dimensionssatz über den Schnitt zweier Unterräume. Jedoch erhalten wir hier im Sinne der algebraischen Varietäten nur eine Ungleichung.

Satz 2.5. *Seien X und Y zwei irred. affine algebraische Mengen in k^n der Dimension r resp. s. Dann gilt für jede irred. Komponente $Z \subset X \cap Y$ dass* $\dim Z \geq r + s - n$.

Korollar 2.6. *Sei $\phi : X \to Y$ ein dominanter Morphismus von algebraischen Varietäten. Wenn alle nicht-leeren Fasern von ϕ die Dimension r haben, dann gilt* $\dim X = r + \dim Y$.

Beweis: Perrin Kapitel IV, 3.8.

Beweis zu 2.5: Sei $\Delta(k^n)$ die Diagonale im Produktraum $k^n \times k^n$. Dann bildet die Diagonalabbildung $\Delta : k^n \to k^n \times k^n, x \mapsto (x, x)$
$X \cap Y$ isomorph auf $X \times Y \cap \Delta(k^n)$ ab. Man bemerke, dass $\Delta(k^n) = V(f_1, \ldots, f_n)$, mit $f_i = Z_i - Z_i'$, wobei die Z_i Koordinaten im ersten sowie Z_i' im zweiten k^n sind. Nun kann man Korollar 2.4. auf $V := X \times Y$ und f_i anwenden um die Ungleichung $\dim\, Z \geq \dim\, X \times Y - n$ zu erhalten. Die noch unbekannte Dimension erhält man mit Hilfe von Korollar 2.6., angewandt auf $\phi : X \times Y \to Y$. Für alle $y \in Y$ gilt $\phi^{-1}(y) \cong X$, folgt $\dim X \times Y = \dim X + \dim Y$ und damit auch unsere Behauptung.

Anhang

Bemerkung I,2.2. 2) *Sei V eine affine algebraische Menge. Die Abbildung $V \mapsto I(V)$ ist injektiv und falls weiter $V \subset W$ und $V \neq W$, so existiert ein Polynom welches auf V aber nicht auf W verschwindet.*

Satz-Definition I,3.1. *Sei X ein nicht-leerer topologischer Raum. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*
1) Wenn man X als $X = F \cup G$ darstellen kann, wobei F und G abgeschlossene Untermengen von X sind, so folgt $X = F$ oder $X = G$.
2) Sind U und V zwei offene Untermengen von X und $U \cap V = \varnothing$, dann ist $U = \varnothing$ oder $V = \varnothing$.
3) Jede nicht-offene Untermenge von X liegt dicht in X.
Ein Raum X mit diesen Eigenschaften wird als irreduzibel bezeichnet.

Satz I,3.5. *Sei X topologischer Raum und Y ein Unterraum von X. Ist Y irreduzibel, so gilt dies auch für $\overline{Y}$.*

Theorem I,4.1. (Schwacher Nullstellensatz) *Sei $I \subset k[X_1, ...X_n]$ ein Ideal, welchen von $k[X_1, ...X_n]$ verschieden ist. Dann ist $V(I)$ nicht-leer.*

Satz I,4.9. *Sei V affine algebraische Menge. Dann gibt inklusionsumkehrende Bijektionen $W \mapsto I_V(W)$ und $I \mapsto V(I)$ zwischen affin algebraischen Untermengen W bzw. $V(I)$ in V und den Radikalidealen $I_V(W)$ bzw. I in $\Gamma(V)$. Weiter gelten die folgenden Äquivalenzen:*
a) W irreduzibel $\Leftrightarrow I_V(W)$ Primideal $\Leftrightarrow \Gamma(W)$ integer
b) W ist Punkt $\Leftrightarrow I_V(W)$ maximales Ideal $\Leftrightarrow \Gamma(V) = k$
c) W ist irreduzible Komponente von $V \Leftrightarrow I_V(W)$ ist minimales Primideal von $\Gamma(V)$

Definition I,6.15. *Sei V eine irreduzible algebraische Menge. Dann ist der Ring $\Gamma(V)$ integer. Der Quotientenkörper zu $\Gamma(V)$ ist der Körper der rationalen Funktionen auf V und mit $K(V)$ bezeichnet.*

Satz I,4.12. *Sei $F \in k[X_1, \ldots, X_n]$, $F = F_1^{\alpha_1} \cdots F_r^{\alpha_r}$ die Zerlegung in irreduzible und nicht-assozierte F_i, wobei $\alpha_i > 0$. Dann folgt:*
1) $I(V(F)) = (F_1 \cdots F_r)$. Insbesondere gilt: F irreduzibel $\Rightarrow I(V(F)) = (F)$.
2) Die Zerlegung von $V(F)$ in irreduzible Komponenten ist gegeben durch $V(F) = V(F_1) \cup \ldots \cup V(F_r)$. Insbesondere gilt: F irreduzibel $\Rightarrow V(F)$ irreduzibel.

Satz III,4.3. *Sei X eine algebraische Varietät. Die affinen offenen Mengen bilden eine Basis der offenen Mengen in X. Weiter ist jede offene Menge die endliche Vereinigung affiner offener Mengen und ist somit quasi-kompakt.*

Satz III,4.4. *Eine nicht-leere algebraische Varietät kann eindeutig als endliche Vereinigung disjunkter irreduzibler abgeschlossener Mengen dargestellt werden. Diese werden irreduzible Komponenten genannt.*

Definition A,3.1 *Sei $K \subset L$ eine Körpererweiterung.*
Eine Untermenge $B \subset L$ wird als algebraisch frei *über K bezeichnet (die Elemente*

als algebraisch unabhängig), wenn für jede endl. Untermenge $x_1, \ldots, x_n \subset B$ und jedes Polynom $P \in K[X_1, \ldots, X_n]$ gilt: $P(x_1, \ldots, x_n) = 0 \Rightarrow P = 0$. (Sonst sind die Elemente von B algebraisch abhängig.)
Seien K, L, B definiert wie zuvor, B wird als algebraisches Erzeugendensystem *bezeichnet über K wenn L algebraisch über dem Zwischenkörper $K(B)$ ist.*
Ebenso ist die Menge $B \subset L$ eine Transzendenzbasis *für L über K, wenn sie sowohl algebraisch frei als auch ein algebraisches Erzeugendensystem ist.*