Vortrag 8: Vertiefung II. Teil
Funktoren und Sequenzen

Simon Rube und Tom Wunder

28. Mai 2009

1 Schnitte des Projektiven Raums

Zu den Definitionen des letzten Vortrages hier noch eine wichtige Bemerkung.
Notation: $R = \Gamma_h(X)$

Bemerkung 1.1. *0) Warnung: Die Garben $\mathcal{O}_X(d)$ hängen fundamental von der Graduierung auf R ab, also von der gewählten Einbettung von X in $\mathbb{P}^n$.*

1) Sei M ein graduierter R-Modul. Dann gilt $\widetilde{M(d)} = \widetilde{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(d) = \widetilde{M}(d)$, denn:
$\widetilde{M(d)} = M \widetilde{\otimes_R R}(d) = \widetilde{M} \otimes_{\widetilde{R}} \widetilde{R(d)} = \widetilde{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(d) = \widetilde{M}(d).$

2) Wir suchen nun einen (rechts-)inversen Funktor für $M \to \widetilde{M}$. Die Korrespondenz zwischen Schnitten und Garben in der projektiven Geometrie ist nicht so perfekt wie im affinen Fall. Sei $\mathcal{F}$ ein $\mathcal{O}_X$-Modul, so definiere einen graduierten R-Modul $\Gamma_\star(\mathcal{F})$ durch

$$\Gamma_\star(\mathcal{F}) = \bigoplus_{d \in \mathbb{Z}} \Gamma(X, \mathcal{F}(d))$$

i) zur Modulstruktur
Sei $s \in R_d = \Gamma_h(X)_d$ Dann definiert s einen globalen Schnitt $s \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X(d))$. Sei außerdem $t \in \Gamma(X, \mathcal{F}(q))$.
a) Betrachte $\mathcal{F}(n) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(d) = \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(n) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(d) \cong \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(n+d) = \mathcal{F}(n+d)$
b) Es gilt: $M \otimes_R N \cong N \otimes_R M$ für R-Moduln M, N.
c) Daher folgt:

$$\Gamma(X, \mathcal{O}_X(d)) \times \Gamma(X, \mathcal{F}(n)) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{O}_X(d)) \otimes_k \Gamma(X, \mathcal{F}(n)) \cong \Gamma(X, \mathcal{F}(n+d)),$$

$$(s, t) \mapsto s \cdot t = s \otimes t$$

Diese Abbildung ist eine nach a),b) wohldefinierte Skalarmultiplikation und macht $\Gamma_*(\mathcal{F})$ zu einem R-Modul.

ii) zur Graduierung
Die Graduierung von $\Gamma_*(\mathcal{F})$ wird gegeben durch die natürliche Abbildung

$$\Gamma(X, \mathcal{O}_X(p)) \otimes_k \Gamma(X, \mathcal{F}(q)) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{F}(p+q)).)$$

Man kann nun verifizieren, dass für einen $\mathcal{O}_X$-Modul $\mathcal{F}$ gilt:

$$\mathcal{F} \simeq \widetilde{\Gamma_\star(\mathcal{F})}$$

(zum Beweis siehe Hartshorne, II, 15.5). Mit anderen Worten: Der Funktor $\Gamma_\star$ ist Rechtsinverses zu $\widetilde{\ }$ *. Genauer: Ein Modul ist quasi-koherent (resp. koherent) genau dann, wenn er von der Form $\widetilde{M}$ ist. (resp. $\widetilde{M}$ für ein M endlichen Typs).*

3) *NB: Der Funktor $\Gamma_\star$ ist jedoch* **nicht** *linksinvers. Sei $\mathcal{F}$ eine Garbe der Form $\widetilde{M}$. Dann sind die Moduln M und $\Gamma_\star(\mathcal{F})$ nicht notwendig isomorph. In der Tat gibt es einen natürlichen Homomorphismus*

$$r_d : M_d \longrightarrow \Gamma(X, \widetilde{M}(d)),\ x \mapsto x/1 \in M_{(f)}(d)\ \forall\ d \in \mathbb{Z}$$

(diese Schnitte ergeben zusammengeklebt einen globalen Schnitt). Nun erhält man einen Homomorphismus vom Grad 0,

$$r : M \longrightarrow \Gamma_\star(\mathcal{F})$$

Hier allerdings müssen wir vorsichtig sein, denn r ist nicht generell injektiv oder surjektiv. Wir werden in Kapitel VII jedoch zeigen, dass r_d für d groß genug ein Isomorphismus ist, falls M endlich erzeugt ist

Die globalen Schnitte des $\mathbb{P}^n$ sind die folgenden.

Satz 1.2. *Sei R_d der Vektorraum der homogenen Polynome vom Grad d in den Variablen $X_0, \dots, X_n$. Dann gilt*

$$\Gamma(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)) = \begin{cases} R_d & , \text{wenn } d \geq 0 \\ 0 & , \text{wenn } d < 0. \end{cases}$$

.

Genauer: $\Gamma(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}) = k$ (siehe Satz 1.11 aus Vortrag 7).

Beweis. Betrache ein $f \in \Gamma(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d))$, $f \neq 0$. Per Definition ist die Einschränkung von f auf die offene Menge $D^+(X_i)$ eine rationale Funktion der Form

$$P_i(X_0, \dots, X_n)/X_i^r$$

mit einem homogenen Polynom P_i vom Grad $d+r$. Nach eventueller Vereinfachung können wir annehmen, dass X_i nicht P_i teilt. Analog ist $f|_{D^+(X_j)}$ von der Form

$$P_j(X_0, \dots, X_n)/X_j^s$$

mit einem homogenen Polynom P_j vom Grad $d+s$ und X_j teilt nicht P_j. Weil diese Elemente Restriktionen von f sind, fallen sie auf dem Schnitt $D^+(X_iX_j)$ zusammen und sind daher gleich im lokalisierten Ring $k[X_0, \dots, X_n]_{(X_iX_j)}$ oder im Quotientenkörper $k(X_0, \dots, X_n)$.
Es folgt, dass $X_j^s P_i = X_i^r P_j$ ist, aber da X_i nicht P_i teilt, folgt $r = 0$ und genauso $s = 0$, also $P_i = P_j$.
Der Schnitt f ist also durch ein homogenes Polynom P_i vom Grad d gegeben, welches unabhängig von i ist. $\square$

Korollar 1.3. *Es gilt*

$$dim_k \Gamma(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)) = \binom{n+d}{n}$$

Beweis. durch Ind(n):

$n = 1$ Dann folgt, dass der Raum der homogenen Polynome R_d vom Grad d in 2 Variablen wird durch folgende Basis aufgespannt

$$X_0^d, X_0^{d-1}, \dots, X_0 X_1^{d-1}, X_1^d$$

$n \mapsto n+1$ Die Monome

$$X_0^{\alpha_0} \cdots X_{n-1}^{\alpha_{n-1}} \text{ mit } \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i = d$$

bilden nach Induktionsvoraussetzung eine Basis des Raumes der homogenen Polynome vom Grad d in n Variablen. Nimmt man nun eine Variable X_n dazu, so betrachte man den neuen Exponenten α_n:
Dieser muss folgende Gleichung erfüllen:

$$\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i = d - \alpha_n$$

Für $\alpha_n = 0$ gibt es nach Voraussetzung $\binom{n+d}{d}$ Basiselemente.
Für $\alpha_n = 1$ gibt es wiederum nach Voraussetzung $\binom{n+d-1}{n}$ linear unabhängige Monome vom Grad $d - 1$.
$\vdots$
Für $\alpha_n = d$ gibt es $\binom{n+d-d}{n} = 1$ Basiselement, nämlich X_n^d.
Nun folgt für die Gesamtanzahl linear unabhängiger Monome vom Grad

d in $n+1$ Variablen:

$$dim_k\Gamma(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}) = \sum_{j=0}^{d} \binom{n+d-j}{n} = \binom{n+d+1}{n+1}$$

$\square$

Bemerkung 1.4. *Im Gegensatz zu affinen Varietäten, deren Schnitträume meistens nicht endlich-dimensional sind, sind Schnitträume der Garbe $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)$ über dem projektiven Raum endlich-dimensional. Dies ist ein generelles Phänomen, wir werden im Kapitel VII zeigen, dass der Raum $\Gamma(X, \mathcal{F})$ ein endlich-dimensionaler k-Vektorraum ist, wenn $\mathcal{F}$ eine koherente Garbe auf einer projektiven Varietät X ist.*

2 Zwei bedeutsame Sequenzen

Beispiel 2.1 (Die exakte Sequenz einer Hyperfläche)**.** *Wir arbeiten nun im projektiven Raum $\mathbb{P}^n$ und betrachen ein homogenes Polynom vom Grad $d > 0$, $F \in R = k[X_0, \ldots, X_n]$, welches nicht das Nullpolynom ist und keine vielfachen Faktoren hat. Sei $X = V_p(F)$ die durch F definierte projektive Hyperebene. Aufgrund des Nullstellensatzes gilt:*

$$I(X) = (F)$$

Die Multiplikation mit F induziert einen Isomorphismus von graduierten R-Moduln vom Grad 0:

$$\phi : R(-d) \longrightarrow I(X),\ 1 \mapsto F \cdot 1$$

(Hier ist Vorsicht geboten: Wir müssen sicherstellen, dass die konstante 1, deren Bild das Polynom F ist, auf beiden Seiten denselben Grad d hat!) Man erhält die exakte Sequenz:

$$0 \longrightarrow R(-d) \xhookrightarrow{\cdot F} R \twoheadrightarrow R/I_p(X) = \Gamma_h(X) \longrightarrow 0$$

Wendet man den exakten Funktor$\widetilde{\ }$ an, so bekommt man die folgende exakte Sequenz:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-d) \xrightarrow{\cdot F} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow 0$$

Satz 2.2 (Die exakte Sequenz eines Schnittes)**.** *Seien $F, G \in R = k[X_0, \ldots, X_n]$ zwei homogene Polynome vom Grad s und t ohne gemeinsame Faktoren und setze $I = (F, G)$. Dann bekommen wir folgende exakte Sequenz von graduierten R-Moduln:*

$$0 \longrightarrow R(-s-t) \xrightarrow{\varphi} R(-s) \oplus R(-t) \xrightarrow{\psi} I \longrightarrow 0$$

wobei $\varphi(C) = (-CG, CF)$ und $\psi(A, B) = AF + BG$.

Beweis. Die Abbildungen φ und ψ sind homogen vom Grad 0. Es ist klar, dass ψ surjektiv auf I abbildet. Der Kern von ψ berechnet sich wie folgt: Sei $AF + BG = 0$

$$\Rightarrow AF = -BG$$

Da F und G teilerfremd sind, teilt FB. Daher folgt

$$B = CF$$

für ein $C \in R$. Eingesetzt: $\Rightarrow A = -CG$ Deswegen gilt:

$$\ker \psi = \text{im } \varphi$$

Die Injektivität von φ ist klar. □

Durch Garbifizierung erhalten wir folgendes Korollar.

Korollar 2.3. *Mit obiger Notation betrachte man $V = V_p(F, G)$. Wie nehmen an, dass $I_p(V) = I = (F, G)$ (wir nehmen also an, dass das Ideal radikal ist). Dies gibt uns die folgende exakte Sequenz:*

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-s-t) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-s) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-t) \longrightarrow \mathcal{I}_V \longrightarrow 0$$

3 Parametrisierung und Veronese-Abbildung

Nun wollen wir erstmal einige Bemerkungen über Morphismen verlieren. Seien $(X, \mathcal{O}_X)$ und $(Y, \mathcal{O}_Y)$ zwei algebraische Varietäten und sei $\varphi : X \to Y$ eine Abbildung. Unter welchen Voraussetzungen ist φ auch ein Morphismus?

Satz 3.1. *Ein Morphismus zu sein ist eine lokale Bedingung: Sei V_i eine offene Überdeckung von Y und für jedes i sei U_{ij} eine offene Überdeckung von $\varphi^{-1}(V_i)$.*
Dann ist φ ein Morphismus genau dann, wenn für alle i, j, $\varphi_{|U_{ij}} : U_{ij} \to V_i$ ein Morphismus ist.

Beweis. Nur die Rückrichtung muss noch bewiesen werden, denn die Hinrichtung folgt sofort aus der Definition von offenen Untervarietäten und dem Restriktionsaxiom. Wir bemerken, dass φ stetig ist. Wenn $V \subset Y$ eine offene Menge und $f \in \Gamma(V, \mathcal{O}_Y)$ ist, dann ist die Restriktion f_i von f auf V_i ein Schnitt und daher ist $f_i\varphi$ eingeschränkt auf U_{ij} ein Schnitt. Durch das Verkleben der einzelnen $f_i\varphi$ bekommt man einen Schnitt $f\varphi$. □

Satz 3.2. *Wenn Y affin ist, ist es ausreichend, sich globale Schnitte anzuschauen:*
φ ist genau dann ein Morphismus, wenn für jedes $f \in \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y)$, $f\varphi \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ ist.

Beweis. Zuerst behandeln wir den Fall, dass X selbst schon affin ist. Dann ist φ regulär und mit Satz 2.5, Vortrag 5 folgt die Behauptung.
Für den allgemeinen Fall, nehme man eine offene affine Überdeckung von X. Dann folgt die Behauptung mit Satz 3.1 und dem affinen Fall. □

Bemerkung 3.3.

1) *Es kann gezeigt werden, dass die natürliche Projektion $k^{n+1}\backslash\{0\} \to \mathbb{P}^n$ ein Morphismus ist.*

2) *Sei $\varphi : X \to Y$ ein Morphismus und V und W seien Untervarietäten von X und Y so, dass $\varphi(V) \subseteq W$. Dann ist die Restriktion $\varphi|_V : V \to W$ ein Morphismus.*

Betrachten wir nun $m+1$ homogene Polynome $F_0, \dots, F_m \in k[X_0, \cdots, X_n]$ vom selben Grad d. Wir definieren eine Abbildung

$$\varphi : \Omega = \mathbb{P}^n - V_p(F_0, \dots, F_m) \longrightarrow \mathbb{P}^m$$

durch die Vorschrift $\varphi(x) = \varphi(x_0, \dots, x_n) = (F_0(x), \dots, F_m(x))$. Hierbei ist zu bemerken, dass

1) die Koordinaten eines Punktes im projektiven Raum nicht alle gleich 0 sind. Deswegen ist φ nicht auf dem ganzen $\mathbb{P}^n$ definiert. Außerdem

2) sind diese Koordinaten homogen, weswegen alle F_i vom selben Grad sein müssen.

Satz 3.4. *Mit obiger Notation ist φ ein Morphismus von Varietäten.*

Beweis. Wir wenden Satz 3.1 und 3.2 an und benutzen die affine Überdeckung $D^+(X_i)$ des $\mathbb{P}^m$. Das Urbild dieser Mengen $D^+(X_i)$ unter φ ist die offene Menge $D^+(F_i)$ und diese bilden eine offene Überdeckung von Ω. Wenn $g \in \Gamma(D^+(X_i), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^m})$ ist, so folgt

$$g = G(X_0, \dots, X_m)/X_i^r$$

Außerdem:

$$g\varphi = G(F_0(X_0, \dots, X_n), \dots, F_m(X_0, \dots, X_n))/F_i(X_0, \dots, X_n)^r$$

Dies ist in der Tat ein Element aus $\Gamma(D^+(F_i), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n})$. □

Bemerkung 3.5. *Wenn V der Abschluß des Bildes von φ ist, zeigt Bemerkung 3.3,2), dass φ sogar einen Morphismus von $\mathbb{P}^n - V_p(F_0, \dots, F_m) \longrightarrow V$ darstellt.*

Beispiel 3.6. *1) (Parametrisierung eines Kegelschnittes)*
Wir betrachten den Morphismus

$$\varphi : \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^2$$

$$(u : v) \mapsto \varphi(u : v) = (u^2 : uv : v^2)$$

Dieser Morphisms ist auf dem ganzen $\mathbb{P}^1$ definiert, weil die Polynome u^2, uv, v^2 keine gemeinsamen Nullstellen im $\mathbb{P}^1$ besitzen. Das Bild von φ ist im Kegelschnitt $C = V_p(XT - Y^2)$ enthalten und es ist leicht einzusehen, dass $\varphi : \mathbb{P}^1 \to C$ bijektiv ist: Wir werden sogar zeigen, dass dies ein Isomorphismus ist.
Dazu:
C wird von den offenen affinen Mengen $D^+(X)$ und $D^+(T)$ im $\mathbb{P}^2$ überdeckt. Wir wissen, dass diese offenen Mengen isomorph sind zum k^2. Für $D^+(X)$ ist dieser Isomorphismus gegeben durch $(1, y, t) \to (y, t)$. Dieser induziert einen Isomorphismus

$$j : C \cap D^+(X) \longrightarrow C_\flat,$$

auf einen affinen Kegelschnitt, definiert durch $y^2 - t = 0$. Es gibt außerdem einen Isomorphismus

$$i : k \longrightarrow D^+(u) \subset \mathbb{P}^1, v \mapsto (1, v)$$

Wenn man diese Abbildungen miteinander verkettet, erhalten wir die Abbildung:

$$k \xrightarrow{i} D^+(u) \xrightarrow{\varphi} C \cap D^+(X) \xrightarrow{j} C_\flat$$

mit

$$v \mapsto (1, v) \mapsto (1, v, v^2) \mapsto (v, v^2)$$

Weil die Komposition dieser drei Abbildungen ein Isomorphismus ist, ist

$$\varphi : D^+(u) \longrightarrow C \cap D^+(X)$$

ebenfalls ein Isomorphismus. Ein ähnliches Argument bei den Variablen v und T zeigt die Behauptung.

Warnung! *In diesem Beispiel sind die zu $\mathbb{P}^1$ und C assoziierten graduierten Ringe nicht dieselben, obwohl $\mathbb{P}^1$ und C isomorph sind:*
φ induziert einen Homomorphismus

$$\varphi^\star : \Gamma_h(C) = k[X, Y, Z]/(XT - Y^2) \longrightarrow \Gamma_h(\mathbb{P}^1) = k[U, V]$$

welcher durch die drei Polynome U^2, UV, V^2 definiert wird. Aber dieser Homomorphismus ist kein Isomorphismus. (sein Bild ist der Unterring $k[U^2, UV, V^2]$) und erhält auch nicht die Graduierung. In der Tat sind die beiden Ringe nicht isomorph (die Lokalisierung von $\Gamma_h(C)$ nach dem Ideal (X, Y, T)) ist nicht regulär, weil sie zum Scheitelpunkt des affinen Kegelschnittes $V(XT - Y^2)$ korrespondiert.(siehe Kapitel V)

2) Kubische Kurve im Raum
Wir betrachten nun den Morphismus

$$\varphi : \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^3,\ \varphi(u : v) \mapsto (u^3 : u^2 v : uv^2 : v^3)$$

Ein ähnliches Argument wie im vorherigen Beispiel zeigt, dass φ ein Isomorphismus zwischen

$$P^1 \text{ und } C = V(XT - YZ, Y^2 - XZ, Z^2 - YT)$$

ist.

3) Die Veronese-Abbildung
Diese verallgemeinert das obige Beispiel. Sei d eine natürliche Zahl und mit $M_0, M_1, \ldots, M_N$ seien die Monome vom Grad d in den Variablen $X_0, \ldots, X_n$ bezeichnet. Es gilt also $N = \binom{n+d}{n} - 1$

Die Veronese-Abbildung (zu dieser Monomordnung) ist der Morphismus

$$\varphi_d : \mathbb{P}^n \longrightarrow \mathbb{P}^N$$

$$\varphi_d(x_0, \ldots, x_n) = (M_0(x), \ldots, M_N(x))$$

Wir betrachen den Einsetzungshomomorphismus

$$\Phi : k[Y_0, \ldots, Y_N] \longrightarrow k[X_0, \ldots, X_n]$$

$$Y_i \mapsto M_i$$

Sei $I = \ker \Phi$. *Dann gilt folgender*

Satz 3.7. *Die Veronese-Abbildung* φ_d *ist ein Isomorphismus vom* $\mathbb{P}^n$ *auf die projektive Varietät* $V = V_p(I)$ *(diese wird Veronese-Varietät genannt).*

Beweis. Der Beweis erfolgt in mehreren Schritten.

- Zunächst führen wir einige Bezeichnungen ein. Seien n und d natürliche Zahlen > 0, wir definieren

$$A := \left\{ \alpha = (\alpha_0, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^{n+1} | \sum_{i=0}^{n} \alpha_i = d \right\}$$

  Es gilt dann $|A| = \binom{n+d}{n}$ und wir setzen $N := |A| - 1$. Als Träger von $\alpha \in A$ bezeichnen wir die Menge der Indices i mit $\alpha_i \neq 0$. Die Breite von α ist die Mächtigkeit seiners Trägers. Für verschiedene Zahlen $i, j \in \{0, 1, \ldots, n\}$ bezeichne (i, j) (bzw. (i)) das Element α in A, für das gilt: $\alpha_k = 0$ für $k \neq i, j$; $\alpha_i = d - 1$; $\alpha_j = 1$ (bzw. $\alpha_k = 0$ für $k \neq i$; $\alpha_i = d$). Für Variablen $X_0, \ldots, X_n$ und $\alpha \in A$ definieren wir schließlich $X^\alpha := X_0^{\alpha_0} \cdots X_n^{\alpha_n}$.

- Sei nun $\alpha^{(0)}, \ldots, \alpha^{(N)}$ eine Abzählung von A. Für $x = (x_0, \ldots, x_n) \in k^{n+1} \backslash \{0\}$ bezeichne $\bar{x} = (x_0 : \cdots : x_n)$ den zugehörigen Punkt im projektiven Raum $\mathbb{P}^n$. Wir betrachten dann die Abbildung

$$\varphi : \mathbb{P}^n \longrightarrow \mathbb{P}^N,\ \bar{x} \mapsto \left(x^{\alpha^{(0)}} : \cdots : x^{\alpha^{(N)}} \right)$$

  Dies ist die der oben gewählten Abzählung von A zugeordnete Veronese-Abbildung.

- Wir benötigen zusätzlich den Einsetzungshomomorphismus

$$\Phi : k\big[Y_{\alpha^{(0)}}, \ldots, Y_{\alpha^{(N)}}\big] \longrightarrow k[X_0, \ldots, X_n],\ Y_\alpha \mapsto X^\alpha$$

  Sei $I := \ker \Phi$ und $V := V_p(I) \subseteq \mathbb{P}^N$ die Veronese-Varietät. Dann ist ein I ein homogenes Ideal, denn sei $F \in I$ und $F = \sum_{j=0}^r F_j$ die Zerlegung des Polynoms F in seine homogenen Bestandteile vom Grad j. Dann hat man $\Phi(F) = \sum_{j=0}^r \Phi(F_j)$ und dies ist die Zerlegung des Bildpolynoms $\Phi(F) \in k[X_0, \ldots, X_n]$ in seine homogenen Bestandteile $\Phi(F_j)$ vom Grad jd. Nach Voraussetzung ist $\Phi(F)$ das Nullpolynom und daher müssen alle seine homogenen Bestandteile verschwinden, also $\Phi(F_j) = 0$ bzw. $F_j \in I$ für alle j.

- Es gilt $\varphi(\mathbb{P}^n) \subseteq V$, denn sei $x \in k^{n+1}\backslash\{0\}$ und $F \in I$ mit $F = \sum_{j=0}^r F_j$ wie oben. Mit $y := (x^{\alpha^{(0)}}, \ldots, x^{\alpha^{(N)}}) \in k^{N+1}\backslash\{0\}$ gilt dann $\bar{y} = \varphi(\bar{x})$. Es ist $F_j(y) = \Phi(F_j)(x)$. Nach dem oben Gezeigten folgt aus $F \in I$ bereits $F_j \in I$, also ist $\Phi(F_j)$ das Nullpolynom. Wir schließen hieraus $F_j(y) = 0$ und sogar $F_j(\bar{y}) = 0$, da F_j homogenes Polynom ist. Wegen

$$F(\bar{y}) = 0 \Longleftrightarrow F_j(\bar{y}) = 0\ \forall j$$

  hat man also $\varphi(\bar{x}) \in V_p(I) = V$.

- Als nächstes wollen wir zeigen:

$$V \subseteq \bigcup_{i=0}^{n} D^+(Y_{(i)})$$

  Hierzu benötigen wir den folgenden trivialen Sachverhalt:

  Seien $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in A$ mit $\alpha + \beta = \gamma + \delta$, dann gilt

$$Y_\alpha Y_\beta - Y_\gamma Y_\delta \in I \qquad (*)$$

  wegen $\Phi(Y_\alpha Y_\beta - Y_\gamma Y_\delta) = X^\alpha X^\beta - X^\gamma X^\delta = X^{\alpha+\beta} - X^{\gamma+\delta} = 0$.

  Sei $y = (y_{\alpha^{(0)}}, \ldots, y_{\alpha^{(N)}}) \in k^{N+1}\backslash\{0\}$ mit $\bar{y} \in V$. Wir führen einen Widerspruchsbeweis und nehmen daher $y_{(i)} = 0$ für alle i an. Wir wählen nun $\alpha \in A$ mit minimaler Breite b, so dass $y_\alpha \neq 0$ gilt. Nach unserer Annahme haben wir dann insbesondere $b \geq 2$, wir finden also verschiedenen Indices $i, j \in \{0, 1, \ldots, n\}$, $i < j$ mit $\alpha_i, \alpha_j > 0$. Sei ohne Einschränkung $\alpha_i \geq \alpha_j$. Wir haben

$$\alpha = (\alpha_0, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_j, \ldots, \alpha_n)$$

und setzen sodann

$$\begin{aligned}\gamma &= (\alpha_0, \ldots, \alpha_i + \alpha_j, \ldots, 0, \ldots, \alpha_n)\\ \delta &= (\alpha_0, \ldots, \alpha_i - \alpha_j, \ldots, 2\alpha_j, \ldots, \alpha_n)\end{aligned}$$

Nach Konstruktion ist $\gamma, \delta \in A$ und $\alpha + \alpha = \gamma + \delta$. Mit $(*)$ erhalten wir die Identität $y_\alpha^2 = y_\gamma y_\delta$ und wegen $y_\alpha \neq 0$ schließen wir $y_\gamma \neq 0$. Dies kann aber nach Wahl von α nicht gelten, denn γ hat eine geringere Breite als α.

- Wir defnieren nun für $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ folgende Abbildungen

$$\Psi_i : D^+(Y_{(i)}) \cap V \longrightarrow D^+(X_i)$$

durch die Abbildungsvorschrift

$$\Psi_i((y_{\alpha^{(0)}} : \cdots : y_{\alpha^{(N)}})) = (y_{(i,0)} : y_{(i,1)} : \cdots : y_{(i)} : \cdots : y_{(i,n)})$$

Diese sind wohldefiniert, da für projektive Punkte $\bar{y} \in D^+(Y_{(i)}) \subseteq \mathbb{P}^N$ die Komponente $y_{(i)}$ nicht verschwindet, das Bild von $D^+(Y_{(i)}) \cap V$ unter Ψ_i also tatsächlich in $D^+(X_i) \subseteq \mathbb{P}^n$ liegt.

Zusätzlich betrachten wir für alle i die Einschränkungen der Veronese-Abbildung

$$\varphi_i := \varphi|_{D^+(X_i)} : D^+(X_i) \longrightarrow D^+(Y_{(i)}) \cap V$$

Auch diese sind in Hinblick auf den Wertebereich wohldefiniert, denn für einen projektiven Punkt $\bar{x} \in D^+(X_i)$ ist die Komponente $x_i \neq 0$. Homogene Koordinaten des Bildpunktes $(y_{\alpha^{(0)}} : \cdots : y_{\alpha^{(N)}}) := \varphi_i(\bar{x})$ sind $(x^{\alpha^{(0)}}, \ldots, x^{\alpha^{(N)}})$ und wegen $x^{(i)} = x_i^d$ gilt $y_{(i)} \neq 0$. Schließlich wurde bereits weiter oben $\varphi(\mathbb{P}^n) \subseteq V$ gezeigt.

- Wir wollen beweisen, dass φ_i und Ψ_i zueinander inverse Abbildungen sind:

Sei $x = (x_0, \ldots, x_n) \in k^{n+1} \backslash \{0\}$ mit $\bar{x} \in D^+(X_i)$, dann gilt:

$$\begin{aligned}\Psi_i \circ \varphi_i(\bar{x}) &= \Psi_i((x^{\alpha^{(0)}} : \cdots : x^{\alpha^{(N)}}))\\ &= (x^{(i,0)} : x^{(i,1)} : \cdots : x^{(i)} : \cdots : x^{(i,n)})\\ &= (x_0 : x_1 : \cdots : x_i : \cdots : x_n)\end{aligned}$$

wobei das letzte Gleichheitszeichen aus

$$(x^{(i,0)}, x^{(i,1)}, \ldots, x^{(i)}, \ldots, x^{(i,n)}) = x_i^{d-1}\,(x_0, x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$$

folgt, beachte $x_i^{d-1} \neq 0$ wegen $\bar{x} \in D^+(X_i)$.

Sei umgekehrt $y = (y_{\alpha^{(0)}}, \ldots, y_{\alpha^{(N)}}) \in k^{N+1}\backslash\{0\}$ mit $\bar{y} \in D^+(Y_{(i)}) \cap V$, dann gilt:

$$\varphi_i \circ \Psi_i(\bar{y}) = \varphi_i((y_{(i,0)} : y_{(i,1)} : \cdots : y_{(i)} : \cdots : y_{(i,n)}))$$

Wir zeigen, dass es ein $\lambda_i \in k^*$ gibt mit

$$y_{(i,0)}^{\alpha_0} y_{(i,1)}^{\alpha_1} \cdots y_{(i)}^{\alpha_i} \cdots y_{(i,n)}^{\alpha_n} = \lambda_i y_\alpha \quad \forall\, \alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in A.$$

Hieraus folgt sofort

$$\varphi_i((y_{(i,0)} : y_{(i,1)} : \cdots : y_{(i)} : \cdots : y_{(i,n)})) = (y_{\alpha^{(0)}} : \cdots : y_{\alpha^{(N)}})$$

also insgesamt $\varphi_i \circ \Psi_i(\bar{y}) = \bar{y}$. Hierzu stellen wir fest:

$$\alpha_0(i,0) + \alpha_1(i,1) + \cdots + \alpha_i(i) + \cdots + \alpha_n(i,n) = \alpha + (d-1)(i)$$

Dann hat man wegen $\bar{y} \in V$ und $(*)$

$$y_{(i,0)}^{\alpha_0} y_{(i,1)}^{\alpha_1} \cdots y_{(i)}^{\alpha_i} \cdots y_{(i,n)}^{\alpha_n} = y_{(i)}^{d-1} y_\alpha$$

und wir setzen $\lambda_i := y_{(i)}^{d-1}$, beachte $y_{(i)}^{d-1} \neq 0$ wegen $\bar{y} \in D^+(Y_{(i)})$.

Wir haben also insgesamt gezeigt:

$$\Psi_i \circ \varphi_i = id_{D^+(X_i)}\,,\ \ \varphi_i \circ \Psi_i = id_{D^+(Y_{(i)}) \cap V}$$

- Als nächstes definieren wir eine globale Abbildung $\Psi : V \longrightarrow \mathbb{P}^n$ durch $\Psi|D^+(Y_{(i)}) \cap V := \Psi_i$. Damit dies überhaupt wohldefiniert ist, müssen wir für alle $i, j \in \{0, 1, \ldots, n\}$ prüfen:

$$\Psi_i(\bar{y}) = \Psi_j(\bar{y}) \quad \forall\, \bar{y} \in D^+(Y_{(i)}) \cap V \cap D^+(Y_{(j)})$$

Sei also $y = (y_{\alpha^{(0)}}, \ldots, y_{\alpha^{(N)}}) \in k^{N+1}\backslash\{0\}$ mit $\bar{y} \in D^+(Y_{(i)}) \cap V \cap D^+(Y_{(j)})$ und $i > j$. Wir müssen die Existenz eines $\lambda_{ij} \in k^*$ zeigen mit

$$\begin{aligned}(y_{(i,0)}, y_{(i,1)}, \ldots, y_{(i,j)}, \ldots, y_{(i)}, \ldots, y_{(i,n)}) = \\ \lambda_{ij}\,(y_{(j,0)}, y_{(j,1)}, \ldots, y_{(j)}, \ldots, y_{(j,i)}, \ldots, y_{(j,n)})\end{aligned}$$

Wegen $(i,j)+(j,i)=(i)+(j)$ gilt $y_{(i,j)}y_{(j,i)}=y_{(i)}y_{(j)}\neq 0$ nach $(*)$ und wir setzen

$$\lambda_{ij} := \frac{y_{(i)}}{y_{(j,i)}} = \frac{y_{(i,j)}}{y_{(j)}} \in k^*$$

Für $l \neq i,j$ haben wir $(i,l)+(j)=(j,l)+(i,j)$ und daher

$$y_{(i,l)} = \frac{y_{(i,j)}}{y_{(j)}}\, y_{(j,l)} = \lambda_{ij}\, y_{(j,l)}$$

Es ist $\Psi : V \longrightarrow \mathbb{P}^n$ also wohldefiniert und man mache sich klar, dass φ und Ψ zueinander inverse bijektive Abbildungen sind, da dies für ihre Einschränkungen φ_i und Ψ_i gilt.

- Aus Satz 3.4 und Bemerkung 3.5 wissen wir bereits, dass $\varphi : \mathbb{P}^n \longrightarrow V$ ein Morphismus geringter Räume ist. Für den Nachweis, dass die Veronese-Abbildung φ ein Isomorphismus ist, bleibt zu zeigen, dass auch die Umkehrabbildung Ψ ein Morphismus geringter Räume ist. Nach Satz 3.1 genügt es, dies für die Einschänkungen $\Psi_i : D^+(Y_{(i)}) \cap V \longrightarrow D^+(X_i)$ zu prüfen.

  Wir haben die kanonische Projektion

  $$\pi : k\big[Y_{\alpha^{(0)}}, \ldots, Y_{\alpha^{(N)}}\big] \longrightarrow k[Y_{\alpha^{(0)}}, \ldots, Y_{\alpha^{(N)}}]/I_p(V) = \Gamma_h(V)$$

  Notation: Die Bilder der Variablen Y_α unter π in $\Gamma_h(V)$ bezeichnen wir mit $\overline{Y}_\alpha := \pi(Y_\alpha)$. Hiermit gilt dann $D^+(Y_{(i)}) \cap V = D^+\left(\overline{Y}_{(i)}\right)$.

  Die Struktur der algebraischen Varietäten $(V, \mathcal{O}_V)$ und $(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n})$ wurde in Vortrag 7 untersucht:

  $$\begin{aligned}\Gamma\left(D^+(X_i), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}\right) &= k[X_0, \ldots, X_n]_{(X_i)} \\ \Gamma\left(D^+(\overline{Y}_{(i)}), \mathcal{O}_V\right) &= \Gamma_h(V)_{\left(\overline{Y}_{(i)}\right)}\end{aligned}$$

  Dort wurde ebenfalls gezeigt, dass $\left(D^+(X_i), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}|_{D^+(X_i)}\right)$ eine affine Varietät ist. Nach Satz 3.2 müssen wir also nur noch prüfen:

  $$f \in \Gamma\left(D^+(X_i), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}\right) \implies f \circ \Psi_i \in \Gamma\left(D^+\left(\overline{Y}_{(i)}\right), \mathcal{O}_V\right)$$

  Sei deshalb $f \in \Gamma\left(D^+(X_i), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}\right)$, also $f = F(X_0, \ldots, X_n)/X_i^s$, wobei $s \in \mathbb{N}$ und $F \in k[X_0, \ldots, X_n]$ homogen vom Grad s ist. Dann ist $f \circ \Psi_i$ von der Gestalt $F(Y_{(0)}, \ldots, Y_{(n)})/Y_{(i)}^s$ und dies ist in der Tat ein Vertreter eines Elements in $\Gamma\left(D^+\left(\overline{Y}_{(i)}\right), \mathcal{O}_V\right)$.

$\square$

Die Veronese-Abbildung ist sehr nützlich, weil sie eine Hyperfläche in $\mathbb{P}^n$ in eine Hyperebene in $\mathbb{P}^N$ transformiert. Dies erlaubt uns manchmal, uns auf den Fall des $\mathbb{P}^N$ zurückzuziehen, wie der folgende Satz zum Beispiel zeigt.

Satz 3.8. *Betrachte ein homogenes Polynom $F \in k[X_0, \ldots, X_n]$ vom Grad d. Die offene Menge $D^+(F)$ ist dann eine offene affine Menge im $\mathbb{P}^n$. Es folgt, dass in einer projektiven algebraischen Varietät V alle Mengen der Form $D^+(f), f \in \Gamma_h(V)$ homogen, offene affine Mengen sind.*

Beweis. Wir schreiben $F = \sum_i a_i M_i$, wobei die Terme M_i die Monome vom Grad d sind. Unter der Veronese-Abbildung korrespondieren die Monome M_i zu den Koordinaten Y_i und daher gilt

$$\varphi_d(D^+(F)) = D^+(H) \cap V$$

wobei $H = \sum_i a_i Y_i$ homogen vom Grad 1 ist. Aber $D^+(H)$ ist isomorph zu $D^+(Y_i)$ über eine Homographie und letztere Menge ist eine offene affine Menge. Da $D^+(F)$ isomorph zu einer abgeschlossenen Untermenge von $D^+(H)$ ist, ist es schließlich eine affine Varietät.

$\square$