Seminar Geometrie algebraischer Varietäten

7. Vortrag - Vertiefung I. Teil: Die projektive Welt

Carolin Peternell, Tabea Krockenberger

14. Mai 2009

1 Projektive Varietäten

Definiton Strukturgarbe

Definition 1.1 ***Grad eines Polynoms in einem lokalen Ring***
Sei R ein graduierter Ring und $f \in R$ ein homogenes Element von Grad d. Definiere den Grad eines Elements $\frac{g}{f^r}$ des lokalen Rings R_f ,wobei g ein homogenes Element in R von Grad e ist, wie folgt:

$$deg(g/f^r) = e - r \cdot d.$$

Die Menge der Elemente von Grad 0 in R_f ist dann ein Unterring, der mit $R_{(f)}$ bezeichnet wird.

Bemerkung 1.2 Sei $V \subset \mathbf{P}^n$ eine projektive algebraische Menge und $R = \Gamma_h(V)$ der homogene Koordinatenring. Sei $f \in R$ homogen von Grad $d > 0$. Dann werden nur durch Elemente aus $R_{(f)}$ Funktionen auf der offenen Menge $D^+(f)$ definiert.
Denn sei g homogen von Grad e, dann gilt:

$$\frac{g(\lambda \cdot x)}{f^r(\lambda \cdot x)} = \frac{\lambda^e \cdot g(x)}{\lambda^{r \cdot d} \cdot f(x)} \neq \frac{g(x)}{f(x)},$$

falls $e \neq r \cdot d$ (für ein beliebiges λ).

Definition 1.3 ***Strukturgarbe einer projektiven algebraischen Menge***
Sei V eine projektive algebraische Menge. Wir definieren die Strukturgarbe von k-wertigen Funktionen auf V durch

$$\mathcal{O}_V(D^+(f)) = \Gamma(D^+(f), \mathcal{O}_V) := \Gamma_h(V)_{(f)}$$

für jede Funktion $f \in \Gamma_h(V)$ von Grad > 0.
Für eine beliebige offene Menge U ist $\mathcal{O}_V(U)$ dann nach Satz 1.1 aus Vortrag 5 definiert.

Bemerkung 1.4

1) Die oben definierte Strukturgarbe erfüllt die Garbenaxiome, d.h. die Voraussetzungen für Satz 1.1 aus Vortrag 5 sind erfüllt. Der Beweis kann analog zum affinen Fall geführt werden.

2) In obiger Definition werden nur Elemente f, die homogen von Grad $d > 0$ sind, betrachtet.
Denn wäre f konstant, $f \not\equiv 0$, dann ist $D^+(f) = V$. Also sind die Elemente aus $\mathcal{O}_V(D^+(f)) = \Gamma_h(V)_{(f)}$ gerade die Elemente in $\Gamma_h(V)$ von Grad 0, also die konstanten Funktionen: $\mathcal{O}_V(V) = k$.
Falls V nicht zusammenhängend ist, ergibt das einen Widerspruch zu den Garbenaxiomen (siehe 4. Vortrag).

Satz 1.5 *Sei V eine projektive algebraische Menge. Der geringte Raum $(V, \mathcal{O}_V)$ (mit der oben definierten Garbe) ist dann eine algebraische Varietät.*

Definition 1.6 ***Projektive Varietät***
Eine algebraische Varietät, die isomorph zu einer projektiven algebraischen Menge (bzw. einer offenen Menge in einer projektiven algebraischen Varietät) ist (mit der oben definierten Garbe), wird projektive Varietät (bzw. quasi-projektive Varietät) genannt.

Beweis. Zu Satz 1.5
Es ist zu zeigen, dass die projektive algebraische Menge V quasi-kompakt und der geringte Raum $(V, \mathcal{O}_V)$ lokal isomorph zu einer affinen algebraischen Varietät ist.
Die Quasi-Kompaktheit von V folgt daraus, dass der Polynomring noethersch ist.
Die Behauptung über die lokale Isomorphie reduzieren wir zunächst auf den Fall $V = \mathbf{P}^n$.
Sei nun $V \subset \mathbf{P}^n$. Betrachte

$$f \in \Gamma_h(V) = k[X_0, ..., X_n]/I,$$

das Bild eines homogenen Polynoms $F \in k[X_0, ..., X_n]$.
Dann gilt natürlich $D^+(f) = V \cap D^+(F)$.
Betrachte die Inklusion $i : V \hookrightarrow \mathbf{P}^n$. Sei $\mathcal{F}_V$ die Garbe der k-wertigen Funktionen auf V, d.h. falls $W \subseteq V$ offen, ist

$$\mathcal{F}_V(W) = \{s : W \longrightarrow k\}.$$

Wir setzen durch

$$i_*(\mathcal{F}_V(U)) := \mathcal{F}_V(U \cap V)$$

(mit $U \subseteq \mathbf{P}^n$ offen) die Garbe $\mathcal{F}_V$ zu einer Garbe $i_*(\mathcal{F}_V)$ auf $\mathbf{P}^n$ fort.

Die Abbildung

$$r : \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n} \longrightarrow i_*(\mathcal{F}_V), \quad s \longmapsto s|V$$

hat als Bild genau $i_*(\mathcal{O}_V)$, kurz: $r(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}) = \mathcal{O}_V$.
Zur Begründung stellen wir fest, dass die Abbildung $r : \Gamma(D^+(F), \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}) \longrightarrow \Gamma(D^+(f), \mathcal{O}_V)$

surjektiv ist. Denn nach Definition ist

$$\Gamma(D^+(F), \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}) = (\Gamma_h(\mathbf{P}^n))_{(F)} = k[X_0, ..., X_n]_{(F)}$$

und

$$\Gamma(D^+(f), \mathcal{O}_V) = (\Gamma_h(V))_{(f)} = ((k[X_0, ..., X_n])/I)_{(f)}.$$

Die Abbildung

$$r : k[X_0, ..., X_n])_{(F)} \longrightarrow k[X_0, ..., X_n])/I)_{(f)},$$

gegeben durch

$$\frac{H}{F^s} \longmapsto \frac{H/I}{f^s}$$

ist wohldefiniert, denn sei $(H, F^t) \simeq (H', F^s)$, so ist

$$H \cdot F^s - H' \cdot F^t \in k[X_0, ..., X_n],$$

also

$$(H \cdot F^s - H' \cdot F^t)/I = h \cdot f^s - h' \cdot f^t \in k[X_0, ..., X_n]/I.$$

Die Surjektivität von r ist klar, denn für $\frac{h}{f^s} \in (k[X_0, ..., X_n]/I)_{(f)}$ ist $\frac{H}{F^s} \in k[X_0, ..., X_n]_{(F)}$ ein Urbild.

Wir zeigen im 2.Teil der Beweises, dass $(\mathbf{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n})$ lokal isomorph zu einer affinen Varietät ist.
Es existiert also ein Isomorphismus

$$(j^{-1}, \widetilde{j^{-1}}) : (U, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}|U) \xrightarrow{\sim} (k^n, \mathcal{O}_{k^n}).$$

für ein $U \subset \mathbf{P}^n$, offen. Hier ist $j^{-1} : U \longrightarrow k^n$ der in 1.7 konstruierte Isomorphismus affiner Varietäten und

$$\widetilde{j^{-1}} : \mathcal{O}_{k^n} \xrightarrow{\sim} j^{-1}_*(\mathcal{O}_U),$$

ist gegeben durch

$$g \longmapsto g \cdot j^{-1}.$$

Statt $V \cap U$ schreiben wir im folgenden kurz V. Dann ist $j^{-1}(V \cap U) \subseteq k^n$ eine affine Menge, da j^{-1} ein Isomorphismus ist. Damit ist $\mathcal{O}_{j^{-1}(V \cap U)}$ erklärt.
Zu zeigen ist die Existenz eines Isomorphismus

$$(\beta, \widetilde{\beta}) : (V \cap U, \mathcal{O}_{V \cap U}) \longrightarrow (j^{-1}(V \cap U), \mathcal{O}_{j^{-1}(V \cap U)}).$$

Setze

$$\beta := j^{-1}|V$$

und definiere

$$\widetilde{\beta} : \mathcal{O}_{j^{-1}(V \cap U)} \xrightarrow{\sim} \beta_*(\mathcal{O}_{V \cap U})$$

wie folgt. Sei $s \in \mathcal{O}_{j^{-1}(V \cap U)}(W)$; dann existiert $\widetilde{s} \in \mathcal{O}_{k^n}(\widetilde{W})$ mit $\widetilde{s}|W = s$. Es sei dann

$$\widetilde{\beta}(s) := \widetilde{j^{-1}}(\widetilde{s})|W$$

Wir erhalten ein Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{k^n} & \xrightarrow{\widetilde{j^{-1}}} & j_*^{-1}(\mathcal{O}_U) \\ \downarrow \widetilde{r} & & \downarrow r \\ \widetilde{i}_*(\mathcal{O}_{j^{-1}(V\cap U)}) & \xrightarrow{\widetilde{\beta}} & j_*^{-1}(i_*(\mathcal{O}_{V\cap U})) \end{array}$$

Dieses Diagramm zeigt leicht, dass $\widetilde{\beta}$ ein Garbenisomorphismus ist. q.e.d.

Der Zusammenhang zwischen affinem und projektivem Raum

Wir setzten $U_0 = D^+(X_0)$, die Menge aller Punkte des $\mathbf{P}^n$ mit $x_0 \neq 0$. Es gibt nun eine Bijektion

$$j : k^n \longrightarrow U_0, \qquad (\xi_1, \dots, \xi_n) \longmapsto (1, \xi_1, \dots, \xi_n) \tag{1}$$

mit der Umkehrabbildung

$$j^{-1} : U_0 \longrightarrow k^n, \qquad (x_0, \dots, x_n) \longmapsto (\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}). \tag{2}$$

Hierbei sind k^n bzw. U_0 mit der Zariski-Topologie bzw. der von $\mathbf{P}^n$ auf U_0 induzierten Zariski-Topologie ausgestattet.

Satz 1.7

1) j ist ein Homöomorphismus.

2) j ist ein Isomorphismus geringter Räume zwischen der affinen Varietät $(k^n, \mathcal{O}_{k^n})$ und $(U_0, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}|_{U_0})$.

Die Operatoren $\flat$ und $\sharp$.
(Wir verwenden folgende Konvention: Für Polynome aus $k[X_0, \dots, X_n]$ werden Großbuchstaben, für solche aus $k[X_1, \dots, X_n]$ Kleinbuchstaben verwendet.)

1) *Der Operator $\flat$.*

$$\begin{aligned} \flat : k[X_0, \dots, X_n] &\longrightarrow k[X_1, \dots, X_n] \\ P(X_0, \dots, X_n) &\longmapsto P_\flat(X_1, \dots, X_n) = P(1, X_1, \dots, X_n) \end{aligned} \tag{3}$$

ist ein surjektiver Ringhomomorphismus dessen Kern das Ideal $(X_0 - 1)$ ist.

Ist P homogen von Grad d, so erhalten wir (im Quotientenkörper $k(X_0, \dots, X_n)$):

$$P_\flat\left(\frac{X_1}{X_0}, \dots, \frac{X_n}{X_0}\right) = P\left(\frac{X_0}{X_0}, \frac{X_1}{X_0}, \dots, \frac{X_n}{X_0}\right) = \frac{P(X_0, \dots, X_n)}{X_0^d} \tag{4}$$

Ist P homogen von Grad d, so ist $P_\flat$ von Grad $d \Leftrightarrow X_0 \nmid P$.

2) *Der Operator* $\sharp$. (Dies kein Homomorphismus.)

$$\sharp : k[X_1, \dots, X_n] \longrightarrow k[X_0, \dots, X_n]$$

wobei für $p \in k[X_1, \dots, X_n]$ gilt: $p^\sharp$ ist das homogene Polynom kleinsten Grades in $k[X_0, \dots, X_n]$, sodass $p = (p^\sharp)_\flat$.
D.h. ist $p = p_0 + p_1 + \dots + p_d$ mit p_i homogen von Grad i und $p_d \neq 0$ (d.h. $grad(p) = d$) dann setzen wir $p^\sharp(X_0, \dots, X_n) = X_0^d p_0 + X_0^{d-1} p_1 + \dots + p_d$ bzw.

$$p^\sharp(X_0, \dots, X_n) = X_0^d p\left(\frac{X_1}{X_0}, \dots, \frac{X_n}{X_0}\right) \tag{5}$$

Bemerkung 1.8

- Aus Gleichung (5) folgt: Für $p, q \in k[X_1, \dots, X_n]$ gilt: $(pq)^\sharp = p^\sharp q^\sharp$.
- Ist $P \in k[X_0, \dots, X_n]$ homogen von Grad d, dann gilt $P = X_0^r (P_\flat)^\sharp$, wobei X_0^r die größte Potenz von X_0 die ist, die P teilt.
  Denn sei $P = X_0^r Q$, dann gilt

$$(P_\flat)^\sharp = ((X_0^r Q)_\flat)^\sharp = (Q_\flat)^\sharp = X_0^{d-r} Q_\flat\left(\frac{X_1}{X_0}, \dots, \frac{X_n}{X_0}\right) = X_0^{d-r} \frac{Q(X_0, \dots, X_n)}{X_0^{d-r}} = Q$$

  $\Rightarrow P = X_0^r Q = X_0^r (P_\flat)^\sharp$.
- Ist P homogen und $P_\flat = 0$, dann ist $P = 0$.

Beweis. Zu Satz 1.7.

1) *Homöomorphismus.* Zu zeigen: Sowohl j, als auch j^{-1} ist stetig.
Die Mengen $D^+(F)$ und $D(f)$ stellen jeweils eine Basis der offenen Mengen auf $\mathbf{P}^n$ bzw. k^n dar.

   a) Ist $F \in k[X_0, \dots, X_n]$ homogen, so gilt:

   $$j^{-1}(D^+(F)) = j^{-1}(D^+(F) \cap U_0) = D(F_\flat)$$

   Denn ist $(x_0, \dots, x_n) \in D^+(F)$ gilt
   $F_\flat(j^{-1}(x_0, \dots, x_n)) = F_\flat(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}) = \frac{F(x_0, \dots, x_n)}{x_0^d} \neq 0$.
   Ist umgekehrt $(x_1, \dots, x_n) \in D(F_\flat)$ gilt
   $F(j(x_1, \dots, x_n)) = F(1, x_1, \dots, x_n) = F_\flat(x_1, \dots, x_n) \neq 0$

   b) Ist $f \in k[X_1, \dots, X_n]$ homogen, so gilt:

   $$j(D(f)) = D^+(f^\sharp) \cap U_0$$

   Denn ist $(x_1, \dots, x_n) \in D(f)$ gilt:
   $f^\sharp(j(x_1, \dots, x_n)) = f^\sharp(1, x_1, \dots, x_n) = x_0^d f(x_1, \dots, x_n) \neq 0$, falls $x_0 \neq 0$.
   Ist $(x_0, \dots, x_n) \in D^+(f^\sharp) \cap U_0$ folgt:
   $f(j^{-1}(x_0, \dots, x_n)) = f(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}) = \frac{f^\sharp(x_0, \dots, x_n)}{x_0^d} \neq 0$

d.h., die Urbilder offener Mengen bzgl. j bzw. j^{-1} sind wiederum offene Mengen
$\Rightarrow j$ ist ein Homöomorphismus.

2) *Isomorphismus geringter Räume.* Zu zeigen: $(k^n, \mathcal{O}_{k^n}) \simeq (U_0, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}|_{U_0})$.
Sei $F \in k[X_0, \ldots, X_n]$ von Grad d. Es genügt zu zeigen

$$\Gamma(D^+(F) \cap U_0, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}) \simeq \Gamma(D(F_\flat), \mathcal{O}_{k^n})$$

Es gilt $\Gamma(D^+(F) \cap U_0, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}) = k[X_0, \ldots, X_n]_{(FX_0)}$ und die Elemente dieses Ringes sind Funktionen der Form $\frac{P}{(FX_0)^r}$, wobei P homogen von Grad $r(d-1)$ bzw. $\frac{P}{F^r X_0^s}$, wobei P von Grad $rd + s$ ist. Außerdem gilt $\Gamma(D(F_\flat), \mathcal{O}_{k^n}) = k[X_1, \ldots, X_n]_{F_\flat}$.
Wir definieren nun $\varphi := \psi \circ i$ wobei

$$\psi : k[X_0, \ldots, X_n]_{FX_0} \longrightarrow k[X_1, \ldots, X_n]_{F_\flat}$$

$$G \longmapsto G_\flat$$

wegen $(FX_0)_\flat = F_\flat$ ein Homomorphismus lokaler Ringe ist und

$$i : k[X_0, \ldots, X_n]_{(FX_0)} \longrightarrow k[X_0, \ldots, X_n]_{FX_0}$$

die natürliche Injektion. Dann gilt $\varphi(\frac{P}{F^r X_0^s}) = \frac{P_\flat}{F_\flat^r}$

a) φ *ist injektiv.* Ist $\frac{P_\flat}{F_\flat^r} = 0$ so ist $P_\flat = 0$ also $P = 0$

b) φ *ist surjektiv.* Ist $\frac{p}{F_\flat^r} \in k[X_1, \ldots, X_n]_{F_\flat}$, dann gilt $\frac{p}{F_\flat^r} = \varphi(\frac{X_0^s p^\sharp}{F^r})$ wobei $s = rd - grad(p)$.

q.e.d.

Bemerkung 1.9 Der projektive Raum $\mathbf{P}^n$ ist irreduzibel. (k ist als unendlich vorrausgesetzt)

Beweis. Behauptung: Ist X von der Form $U_1 \cup U_2$, wobei U_i offen und irreduzibel sind und $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$, dann ist X irreduzibel.
Angenommen $V \cup W = X$, V, W offen und $V \cap W = \emptyset$.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad & (V \cup W) \cap U_i = (V \cap U_i) \cup (W \cap U_i) \\
\Rightarrow \quad & (V \cap U_i) \cap (W \cap U_i) = V \cap W) \cap U_i = \emptyset \\
\Rightarrow \quad & V \cap U_i = \emptyset \vee W \cap U_i = \emptyset \;\; i = 1,2 \;\Rightarrow\; V \cap U_1 = \emptyset \text{ und } V \cap U_2 = \emptyset \;\Rightarrow V = \emptyset \\
& \text{oder} \quad V \cap U_1 = \emptyset \text{ und } W \cap U_2 = \emptyset \;\Rightarrow U_1 \cap U_2 = \emptyset \; \lightning
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Beh.

Nach dem 1. Vortrag ist, falls k unendlich, k^n irreduzibel. Damit folgt aus 1.7, dass $D^+(X_i)$ irreduzibel ist und da $X = D^+(X_1) \cup D^+(X_2)$ und $D^+(X_1) \cap D^+(X_2) \neq \emptyset$ ist auch X irreduzibel.

q.e.d.

Satz 1.10 *Sei $x = (x_0, \dots, x_n) \in \mathbf{P}^n$ und $I_x = I_p(\{x\})$ das homogene Primideal der Polynome, die in x verschwinden. Dann gilt, der lokale Ring $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n,x} = k[X_0, \dots X_n]_{(I_x)}$, der Teilring des lokalen Rings $k[X_0, \dots X_n]_{I_x}$ der nur aus Elementen von Grad 0 besteht. Ist $x_0 = 1$ und wir setzen $\xi = (x_1, \dots, x_n)$, dann induziert der Homomorphismus $\flat$ einen Isomorphismus von $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n,x}$ nach $\mathcal{O}_{k^n,\xi}$.*

Beweis. Es gilt (ohne Einschränkung $x_0 \neq 0$):

$$I_x = I_p(\{x\}) \overset{2)}{=} \langle X_i - \frac{x_i}{x_0} X_0 | 1 \leq i \leq n \rangle \overset{1)}{=} \langle x_i X_j - x_j X_i | 0 \leq i < j \leq n \rangle$$

denn

1) $X_i - \frac{x_i}{x_0} X_0 = \frac{1}{x_0}(x_0 X_i - x_0 X_i) \in \langle x_i X_j - x_j X_i | 0 \leq i < j \leq n \rangle$
und $x_i X_j - x_j X_i = x_j (X_i - \frac{x_i}{x_0} X_0) - x_i (X_j - \frac{x_j}{x_0} X_0) \in \langle X_i - \frac{x_i}{x_0} X_0 | 1 \leq i \leq n \rangle$.

2) Ist $f \in I_x \Rightarrow f(x) = 0$.
Ist $f(x) = \sum f_i(x) = 0$, wobei die f_i homogen vom Grad i, gilt:
$f_i(x) = 0$ für alle $i \Rightarrow f_i(x) = g_n(X_n - \frac{x_n}{x_0} X_0) + g_{n-1}(X_{n-1} - \frac{x_{n-1}}{x_0} X_0) + \dots + g_1(X_1 - \frac{x_1}{x_0} X_0) + g_0$, wobei die g_i Polynome in den Variablen $X_0, \dots, X_i$ sind. Da aber $f_i(\lambda x) = 0 \forall \lambda \in k$ gelten muss $\Rightarrow g_0 = 0 \Rightarrow f \in I_x$.

I_x wird von homogenen Elementen erzeugt, ist also homogen.
Ist $fg \in I_x \Rightarrow fg = 0 \Rightarrow f = 0$ oder $g = 0$ (da der Polynomring nullteilerfrei ist) $\Rightarrow I_x$ ist Primideal.

Sein nun oBdA $x_0 = 1$, setze $\xi = (x_1, \dots, x_n), n_\xi = (X_1 - x_1, \dots, X_n - x_n)$.
Dann gilt $F \in I_x \Leftrightarrow F_\flat \in n_\xi$. $\flat$ induziert also einen Isomorphismus

$$\gamma : k[X_0, \dots, X_n]_{(I_x)} \xrightarrow{\sim} k[X_1, \dots, X_n]_{n_\xi}, \quad \frac{F}{G} \longrightarrow \frac{F_\flat}{G_\flat}$$

γ ist injektiv, denn ist $F_\flat = 0$ folgt $F = 0$.
γ ist surjektiv, denn ist $\frac{f}{g} \in k[X_1, \dots, X_n]_{n_\xi}$ ist $\frac{f}{g} = \gamma(\frac{X_0^r f^\sharp}{X_0^s g^\sharp})$, wobei $grad(f) + r = grad(g) + s$.
Nun gilt nach 1.7 $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(U_0) \cong \mathcal{O}_{k^n}(k^n)$. Da k^n eine affine offene Menge ist und $j^{-1}(x) = \xi$ folgt also dem letzten Vortrag (Vortrag 6, Satz 1.4):

$$\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n,\mathbf{x}} \cong \mathcal{O}_{k^n,\xi} \cong k[X_1, \dots, X_n]_{n_\xi} \cong k[X_0, \dots, X_n]_{(I_x)}$$

q.e.d.

Satz 1.11 *Sei X eine irreduzible projektive algebraische Varietät. Dann ist $\Gamma(X, \mathcal{O}_X = k$, d.h. die einzigen globalen Schnitte auf $\mathcal{O}_X$ sind die konstanten Funktionen.*

Beweis. folgt später (Perrin, Kapitel VIII) q.e.d.

2 Modulgarben auf projektiven algebraischen Varietäten

Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ oder kurz X eine projektive algebraische Varietät mit einer Einbettung in den projektiven Raum $\mathbf{P}^n$, sei $R = \Gamma_h(X)$.
Wir assoziieren - ähnlich wie im affinen Fall - zu jedem graduierten R–Modul M eine $\mathcal{O}_X$–Modulgarbe $\widetilde{M}$ wie folgt.

Definition 2.1 *Sei M ein graduierter R–Modul. Definiere einen $\mathcal{O}_X$-Modul $\widetilde{M}$ auf den standardoffenen Mengen von X wie folgt:*
ist $f \in R$ homogen von Grad d ($d > 0$), so sei

$$\widetilde{M}(D^+(f)) = M_{(f)}.$$

Dabei bezeichnet $M_{(f)}$ den Untermodul von M_f, der aus Elementen von Grad 0 besteht, d.h. aus Elementen der Form $\frac{x}{f^n}$, wobei x homogen von Grad $n \cdot deg(f)$ ist. Wieder wenden wir Satz 1.1 aus Vortrag 5 an, um wirklich eine Garbe $\widetilde{M}$ zu erhalten. Die Voraussetzungen des Satzes werden wie im Affinen nachgerechnet.

Bemerkung 2.2 1) Es gilt $\widetilde{R} = \mathcal{O}_X$, denn: $\widetilde{R}(D^+(f)) = R_{(f)} = \Gamma_h(V)_{(f)} = \mathcal{O}_X(D^+(f))$.

2) Es ist

$$\widetilde{M}|D^+(f) = \widetilde{M_{(f)}}.$$

Wir wissen: $\widetilde{M}|D^+(f)(D^+(f)) = \widetilde{M}(D^+(f)) = M_{(f)} = \widetilde{M_{(f)}}$.
Zu zeigen ist, dass für $U \subseteq D^+(f)$ offen gilt:

$$\widetilde{M}|D^+(f)(U) = \widetilde{M}(U) = \widetilde{M_{(f)}}(U).$$

Wegen Satz 1.2 aus Vortrag 5 dürfen wir $U = D^+(g)$ annehmen. Dann ist

$$\Rightarrow \widetilde{M}(U) = \widetilde{M}(D^+(g)) = M_{(g)}$$

und

$$\widetilde{M_{(f)}}(D^+(g)) = (M_{(f)})_{(g)} = M_{(f)} \otimes_{R_{(f)}} (R_{(f)})_{(g)} = M_{(g)},$$

denn $V(f) \subseteq V(g)$ (da $D^+(g) \subseteq D^+(f)$), also existiert nach dem Nullstellensatz ein r, sodass $g^r \in (f)$.

Aus dem Affinen schließen wir, dass $\widetilde{M}$ quasi-kohärent ist (bzw. kohärent, falls M ein endlich erzeugter R-Modul ist). Dabei verwenden wir, dass alle offenen Mengen $D^+(f)$ in $V \in \mathbf{P}^n$ offene affine Mengen sind. (Beweis später)

Satz 2.3 *Die Zuordnung $M \longmapsto \widetilde{M}$ ist funktoriell, exakt und kommutiert mit direkten Summen und Tensorprodukten.*

Beweis. Der Beweis, dass die Abbildung funktoriell und exakt ist und mit direkten Summen kommutiert, wird analog zum affinen Fall geführt.

Zu zeigen bleibt, dass $M \longmapsto \widetilde{M}$ mit Tensorprodukten kommutiert.
Wir wollen also zeigen, dass für zwei graduierte R-Moduln $M := \bigoplus_p M_p$ und $N := \bigoplus_q N_q$ gilt: $\widetilde{M} \otimes_{\widetilde{R}} \widetilde{N} = \widetilde{M \otimes_R N}$.
Wir bilden das Tensorprodukt

$$P := M \otimes_R N.$$

Auf P kann die Struktur eines graduierten R-Moduls induziert werden durch folgende Definition:

$$P_n = \sum_{p+q=n} M_p \otimes_R N_q.$$

Wir wollen einen Morphismus

$$\phi : \widetilde{M} \otimes_{\widetilde{R}} \widetilde{N} \longrightarrow \widetilde{M \otimes_R N}$$

konstruieren. Es reicht, den Morphismus auf den offenen Mengen $D^+(f)$ zu definieren, da jede offene Menge als Vereinigung von standardoffenen Mengen dargestellt werden kann und die Verklebungseigenschaft erfüllt ist. (vgl. Satz 1.1 in Vortrag 5). Auf diesen Mengen setzten wir

$$\phi(x/f^r \otimes y/f^s) = (x \otimes y)/f^{(r+s)}.$$

Man rechnet nach, dass dadurch wirklich ein Garbenmorphismus ϕ definiert wird. Es bleibt zu zeigen, dass ϕ ein Isomorphismus von $\mathcal{O}_X$-Moduln ist.
Sei zunächst $deg(f) = 1$.
Offensichtlich ist dann die inverse Abbildung auf den offenen Mengen gegeben durch

$$\psi : \widetilde{M \otimes_R N} \to \widetilde{M} \otimes_{\widetilde{R}} \widetilde{N}, \;\; \psi((x \otimes y)/f^r) = x/f^p \otimes y/f^q,$$

wobei $p = deg(x)$ und $q = deg(y)$ und $r = p + q$.
Beweisidee für $deg(f) > 1$:
Schränke die Menge $D^+(f)$ auf $D^+(f) \cap D^+(Z_j) = D^+(Z_j \cdot f)$ ein. Dabei ist $D^+(Z_j)$ die Menge der Punkte $z \in \mathbf{P}^n$ mit $z_j \neq 0$.
Dann ist

$$\frac{x \otimes y}{f^r} = \frac{Z_j^m (x \otimes y)}{Z_j^m \cdot f^r}.$$

Das weitere Verfahren soll an einem Beispiel erläutert werden:
sei $d = deg(f) = 2$, $r = 3$ und $deg(x) = deg(y) = 3$, $m = 1$.
Dann ist $\frac{Z_j \cdot x}{f^2} \otimes \frac{y}{Z_j \cdot f} = \frac{Z_j^3 \cdot x}{Z_j^2 \cdot f^2} \otimes \frac{y}{Z_j \cdot f}$. q.e.d.

Satz 2.4 *Sei der Morphismus $\varphi : M \longrightarrow N$ zwischen graduierten R-Moduln homogen vom Grad 0. Ist $\varphi_n : M_n \longrightarrow N_n$ für große n surjektiv, so ist $\widetilde{\varphi} : \widetilde{M} \longrightarrow \widetilde{N}$ ein surjektiver Morphismus von Garben.*

Beweis. Wir wählen eine offene Menge $D^+(f)$, wobei f homogen vom Grad $d > 0$ ist. Es genügt zu zeigen, dass $\varphi_{(f)} : \widetilde{M}(D^+(f)) = M_{(f)} \to N_{(f)} = \widetilde{N}(D^+(f))$ surjektiv ist. Sei $\frac{y}{f^r} \in N_{(f)}$, d.h. $y \in N_q$, wobei $q = rd$. Für s groß genug ist dann $f^s y \in \varphi_{sd+q}(M_{sd+q}) \subset \varphi(M)$, also gilt $\frac{y}{f^r} = \frac{f^s y}{f^{r+s}} \in \varphi_{(f)}(M_{(f)})$. q.e.d.

Beispiel 2.5 Die zu einer abgeschlossenen Menge assoziierte exakte Sequenz.
Seien X eine projektive algebraische Varietät und Y eine abgeschlossene Teilmenge von X und $I_X(Y)$das dazugehörige homogene Ideal in R. (Ist $r : \Gamma_h(X) \longrightarrow \Gamma_h(Y)$, dann ist $I_X(Y) := ker(r)$. Es gilt $\Gamma_h(X)/I_X(Y) \cong \Gamma_h(Y)$.)
Dann ist die Sequenz

$$0 \longrightarrow I_X(Y) \longrightarrow \Gamma_h(X) \longrightarrow \Gamma_h(X)/I_X(Y) \longrightarrow 0$$

exakt und Garbifizieren ergibt die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \widetilde{I_X(Y)} \longrightarrow \widetilde{\Gamma_h(X)} \longrightarrow \Gamma_h(\widetilde{X)/I_X}(Y) \longrightarrow 0$$

Was einfach die fundamentale Exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{J}_Y \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_Y \longrightarrow 0$$

ist. (Kann direkt über die offenen Mengen $D^+(f)$ nachgeprüft werden.)

Definition 2.6 *Sei R ein graduierter Ring und $M = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} M_n$ ein graduierter R-Modul. Der Modul $M(d)$ entspricht dem graduierten Modul M mit dem Unterschied, dass die Graduierung verschoben ist: $M(d)_n = M_{d+n}$.*

Definition 2.7 *Sei X eine projektive Varietät eingebettet in den $\mathbf{P}^n$, sei $R = \Gamma_h(X)$. Die Garbe $\mathcal{O}_X(d)$ ist die zu dem Modul $R(d)$ assoziierte Garbe: $\mathcal{O}_X(d) = \widetilde{R(d)}$. Ist $\mathcal{F}$ ein $\mathcal{O}_X$-Modul dann schreiben wir $\mathcal{F}(d)$ für $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(d)$.*