Mathematik = Landwirtschaft?

Franziska Mellinghoff, Ditte Thomsen

07.05.2009

1 Lokale Ringe

Definition 1.1: Sei X eine affine algebraische Varietät und $x \in X$. Man betrachte Paare der Form (U, f) mit U offene Menge in X, $x \in U$, und $f \in \Gamma(U, \mathcal{O}_{\mathrm{X}})$. Zwei solche Paare (U, f), (V, g) heißen äquivalent, wenn eine offene Menge W existiert, so dass $x \in W \subseteq U \cap V$ und $f \mid_{\mathrm{W}} = g \mid_{\mathrm{W}}$. Die Äquivalenzklassen dieser Relation heißen Keime der Funktionen auf x. Der Keim von (U, f) an x wird mit f_x bezeichnet. Eine Menge von Keimen an x wird mit $\mathcal{O}_{\mathrm{X,x}}$ bezeichnet, wobei $\mathcal{O}_{\mathrm{X,x}}$ auch Halm genannt wird.

Satz-Definition 1.2: Mit obigen Bezeichnungen ist die Menge $\mathcal{O}_{\mathrm{X,x}}$ kanonisch mit einer Ringstruktur ausgestattet. Dieser Ring ist eine lokale K-Algebra mit maximalem Ideal $m_{\mathrm{X,x}} = \{f \in \mathcal{O}_{\mathrm{X,x}} \mid f(x) = 0\}$ (f ist ein Element aus einem Keim von $\mathcal{O}_{\mathrm{X,x}}$). Wir nennen ihn den lokalen Ring von X an x. Es gilt: $\mathcal{O}_{\mathrm{X,x}}/m_{\mathrm{X,x}} \cong K$.

Beweis: Die Ringstruktur ist folgendermaßen definiert: Seien die zwei Keime (U, f) und (V, g) gegeben, so addiert und multipliziert man, indem man sie zuerst auf $U \cap V$ einschränkt und dann die Ringstruktur von $\Gamma(U \cap V, \mathcal{O}_{\mathrm{X}})$ benutzt. Man überprüfe, dass diese Operation wohldefiniert ist, also nicht von der Wahl der Repräsentanten abhängt: Sei also $(U, f) \sim (U', f')$ und $(V, g) \sim (V', g')$. Es bleibt zu zeigen, dass $f' \mid_{U' \cap V'} \cdot g' \mid_{U' \cap V'} \sim f \mid_{U \cap V} \cdot g \mid_{U \cap V}$. Sei nun $W := U \cap V \cap U' \cap V'$ und $x \in W$. Nach Voraussetzung und Definition 1.1 gilt $f' \mid_W = f \mid_W$, analog für g. Folglich ist auch die Gleichung $(f' \mid_{U' \cap V'} \cdot g' \mid_{U' \cap V'}) \mid_W = (f \mid_{U \cap V} \cdot g \mid_{U \cap V}) \mid_W \Leftrightarrow f' \mid_W \cdot g' \mid_W = f \mid_W \cdot g \mid_W$ erfüllt (analog für die Addition). Also ist die Operation wohldefiniert.
Falls $f \in \mathcal{O}_{\mathrm{X,x}}$ ist, so bezeichnen wir mit $f(x)$ den Wert von f an der Stelle x, welcher ebenfalls nicht von der Wahl der Repräsentanten abhängt. Es gibt also einen Ringhomomorphismus $\pi : \mathcal{O}_{\mathrm{X,x}} \longrightarrow K$, welcher f den Wert $f(x)$ zuordnet. Dieser Homomorphismus ist offensichtlich surjektiv und sein Kern ist $m_{\mathrm{X,x}}$, also ist $m_{\mathrm{X,x}}$ ein maximals Ideal.
Ist andererseits $f \in \mathcal{O}_{\mathrm{X,x}} \backslash m_{\mathrm{X,x}}$, so ist f invertierbar in $\mathcal{O}_{\mathrm{X,x}}$, was zeigt, dass der Ring lokal ist. Betrachte man nämlich f auf (U, f), U affin, so gilt: Sei $x \in D_U(f) = U - V_U(f) = \{x \in U \mid f(x) \neq 0\}$, dann ist $f \mid_{\Gamma(D_U(f), \mathcal{O}_U)} \in \Gamma(D_U(f), \mathcal{O}_U)^*$, also f invertierbar auf $D_U(f)$ und $(D_U(f), f^{-1})$ invers zu (U, f).

Bemerkung 1.3: Die Bezeichnung "lokaler Ring"kommt natürlich von dieser Art von Beispiel. Der Vorteil von lokalen Ringen gegenüber Ringen von Funktionen auf affinen algebraischen Mengen, die x enthalten ist, dass sie intrinsisch sind.

Satz 1.4: Sei K algebraisch abgeschlossen und X eine algebraische Varietät. Man nehme einen Punkt $x \in X$, wobei U eine affine offene Menge sei, die x enthält. Setze nun $A = \Gamma(U, \mathcal{O}_\mathrm{X})$ und sei m das maximale Ideal in A für den Punkt x (siehe Vortrag 2). Dann gilt: $\mathcal{O}_\mathrm{X,x} \cong A_m$. Insbesondere stimmen alle Primideale von $\mathcal{O}_\mathrm{X,x}$ bijektiv mit geschlossenen, ireeduziblen Teilmengen von U (und somit X), die x enthalten, überein.

Beweis: Es existiert ein Homomorphismus r von A nach $\mathcal{O}_\mathrm{X,x}$, welcher a seinen Keim an x, a_x, zuordnet. Dieser Homomorphismus faktorisiert durch A_m mit den Abbildungen $s : A \to A_m$, $a \mapsto \frac{a}{1}$, und $t : A_m \to \mathcal{O}_{X,x}$, $\frac{a}{u} \mapsto (a(u)^{-1})_x$ (u ist invertierbar analog zu Satz 1.2), denn $r(a) = a_x$ und $ts(a) = t(\frac{a}{1}) = a_x$.
Außerdem ist t eine bijektive Abbildung, da es eine Umkehrabbildung v gibt, $v : \mathcal{O}_{X,x} \to A_m$, $c_x \mapsto \frac{c}{1}$, für die gilt (für $(D_U(u), \frac{a}{u})$):
$tv(c_x) = t(\frac{c}{1}) = c_x$ und $vt(\frac{a}{u}) = v((a(u)^{-1})_x) = \frac{a}{u}$.
$\Rightarrow A_m \cong \mathcal{O}_{X,x}$.
Die letzte Aussage haben wir bereits im 2.Vortrag gezeigt.

Bemerkung 1.5: Sei $\varphi : X \to Y$ ein Morphismus von Varietäten und man betrachte die Punkte $x \in X$ und $y = \varphi(x)$. Dies induziert einen Homomorphismus $\varphi^* : \mathcal{O}_\mathrm{Y,y} \to \mathcal{O}_\mathrm{X,x}$. Denn sei $f_y \in \mathcal{O}_\mathrm{Y,y}$ repräsentiert durch das Paar (U, f), wobei U eine offene Menge in Y ist, die y enthält, dann gibt es nach der Definition einer Morphismuses einen Homomorphismus $\varphi^* : \Gamma(U, \mathcal{O}_\mathrm{Y}) \to \Gamma(\varphi^{-1}(U), \mathcal{O}_\mathrm{X})$, der f die Komposition $f\varphi$ zuordnet. Wir ordnen nun f_y den Keim $(f\varphi)_x$ zu und dies ergibt die benötigte Abbildung. Es ist festzuhalten, dass dieser Homomorphismus lokal ist, d.h. er schickt $m_{Y,y}$ auf $m_{X,x}$.
Falls φ ein Isomorphismus ist, so auch φ^*.

2 Garben von Moduln

Sei $(X, \mathcal{O}_\mathrm{X})$ ein geringter Raum (z.B. eine algebraische Varietät). In diesem Abschnitt werden wir die Garben von Moduln betrachten. Dies ist ein wichtiger Begriff, dessen Bedeutsamkeit später offensichtlich wird.

Definition 2.1: Ein $\mathcal{O}_\mathrm{X}$-Modul ist eine Garbe $\mathcal{F}$, so dass für jede offene Menge U in X die Menge $\mathcal{F}(U)$ ein $\mathcal{O}_\mathrm{X}(U)$-Modul ist und die Einschränkungsabbildungen lineare Abbildungen sind.

Bemerkung 2.2: *Warnung*: Das Wort "linear"bedeutet in diesem Zusammenhang nicht das, was man vielleicht erwarten würde. Wenn $V \subset U$, dann gibt es Einschränkungsabbildungen $r : \mathcal{O}_\mathrm{X}(U) \to \mathcal{O}_\mathrm{X}(V)$ und $\rho : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$. $\mathcal{F}(U)$ und $\mathcal{F}(V)$ sind also beide $\mathcal{O}_\mathrm{X}(U)$-Moduln, denn:
$\mathcal{F}(U)$ ist nach Definition ein $\mathcal{O}_\mathrm{X}(U)$-Modul und $\mathcal{F}(V)$ wird einer durch die Abbildung r. Außerdem ist gefordert, dass ρ $\mathcal{O}_\mathrm{X}(U)$-linear ist, d.h. $\rho(af) = r(a)\rho(f)$.

Bespiel 2.3: Die Nullgarbe ist offensichtlich ein $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}$-Modul. Eine endliche direkte Summe (oder ein endliches direktes Produkt) von $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}$-Moduln ist ein $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}$-Modul. Z.B. ist $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}^n$, die direkte Summe von n Kopien der Strukturgarbe, ein $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}$-Modul.

Im Wesentlichen sind alle üblichen A-Modul-Konstruktionen, wie z.B. Homomorphismen, Kerne, Bilder, exakte Sequenzen, usw., auch mit $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}$-Moduln möglich.

Definition 2.4: Seine $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ zwei $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}$-Moduln. Ein Homomorphismus $f : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ist gegeben durch die Eigenschaften der $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}(U)$-linearen Abbildungen für jedes U, $f(U) : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$, welche auf offensichtliche Weise mit Einschränkungen verträglich sind.
Man kann nun die Kerngarbe von f durch die Formel $(Kerf)(U) = Ker(f(U))$ definieren und man sagt, dass f injektiv ist, wenn $f(U)$ für alle U injektiv ist oder alternativ, wenn $kerf = 0$ ist.

Bei der Definition der Bildgarbe und surjektiven Abbildungen muss man allerdings vorsichtiger sein. Dies ist eine der wesentlichen Schwierigkeiten der Garbentheorie. Wenn man einen Homomorphismus $f : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ betrachtet, so ist es verlockend sein Bild mit der Formel $(Bild(f))(U) = Bild(f(U))$ zu definieren. Unglücklicher Weise ist die aber im Allgemeinen keine Garbe wie das folgende Beispiel zeigen soll:

Beispiel 2.5.: Man setze $X = \mathbb{C}$ und sei $\mathcal{F} = \mathcal{O}_{\mathbb{C}}$ die Garbe der holomorphen Funktionen auf offenen Mengen von $\mathbb{C}$. Sei $\mathcal{G} = \mathcal{O}_{\mathbb{C}}^*$ die Garbe der nicht-verschwindenden holomorphen Funktionen. Es gibt einen Homomorphismus $f : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ gegeben durch die Exponentialabbildung.
Wenn man $(Bild(f))(U) := Bild(f(U))$ definiert so ist $Bild(f)$ keine Garbe, da die Verklebungseigenschaft nicht erfüllt ist.
Setze $U = \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Diese offene Menge wird überdeckt von den offenen Mengen V und W, welche $\mathbb{C}$ ohne die positive bzw. negative reelle Halbgerade seien.
Z.z.: $id \in Bild(f(V))$ und $id \notin Bild(f(U))$, denn $\Rightarrow Bild(f(U)) \mid_V \neq Bild(f(V))$, also wäre die Verklebungseigenschaft nicht erfüllt.
$id \in Bild(f(V)) \Leftrightarrow e^a = id$ mit $a \in \mathcal{F}(V) \Leftrightarrow \log \in \mathcal{F}(V)$.
Außerdem gilt: Für jede einfach-zusammenhängende Teilmenge von $U = \mathbb{C}\backslash\{0\}$ ist log stetig und holomorph. Da V eine einfach zusammenhängende Teilmenge von $U = \mathbb{C}\backslash\{0\}$ ist, gilt $\log \in \mathcal{F}(V)$ und somit $id \in Bild(f(V))$.
U hingegen ist keine einfach-zusammenhängende Menge und somit ist log nicht stetig auf U, also auch nicht holomorph. $\Rightarrow id \notin Bild(f(U))$.
$\Rightarrow$Die Verklebungseigenschaft ist nicht erfüllt. Also ist $(Bild(f))(U)$ mit obiger Definition keine Garbe.

Um dieses Problem zu umgehen, "lokalisieren"wir und definieren $Bild(f)$ als die zu dieser Prägarbe assoziierte Garbe.

Definition 2.6: Sei $f : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ein Homomorphismus von $\mathcal{O}_X$-Moduln. Wir definieren die Garbe $Bild(f)$ wie folgt. Sei $s \in \mathcal{G}(U)$. Wir sagen $s \in (Bild(f))(U)$, falls für jedes $x \in U$ eine offene Menge $V \subset U$ existiert, so dass $x \in V$ und $s \mid_V \in Bild(f(V))$.
Man sagt f ist surjektiv, falls $Bild(f) = \mathcal{G}$.

Bemerkung 2.7: Die Abbildung f heißt surjektiv, wenn sie lokal surjektiv ist. Dies erfüllt auch die Exponentialabbildung in Beispiel 2.5.

Definition 2.8: Eine exakte Sequenz von $\mathcal{O}_X$-Moduln $\mathcal{F} \xrightarrow{u} \mathcal{G} \xrightarrow{v} \mathcal{H}$ ist gegeben durch die zwei Homomorphismen von Garben u und v, so dass gilt $Ker(v) = Bild(u)$.

Wir kehren nun zu abgeschlossenen Untervarietäten zurück und werden die folgende Definition benötigen:

Definition 2.9: Sei $\varphi : Y \to X$ eine stetige Abbildung und sei $\mathcal{F}$ die Garbe von Y. Das direkte Bild von $\mathcal{F}$, bezeichnet mit $\varphi_*\mathcal{F}$, ist die auf X durch $\varphi_*\mathcal{F}(U) = \mathcal{F}(\varphi^{-1}(U))$ definierte Garbe für jede offene Menge U in X.

Beispiel 2.10: Sei X eine algebraische Varietät, Y eine abgeschlossene Teilmenge von X und sei $j : Y \to X$ eine kanonische Injektion. Wir bezeichnen mit $\mathcal{F}_Y$ die Garbe aller K-wertigen Funktionen auf Y und fassen $j_*\mathcal{F}_Y$ als sein direktes Bild auf. Es existiert ein Homomorphismus von $\mathcal{O}_X$-Moduln $r : \mathcal{O}_X \to j_*\mathcal{F}_Y$, der $s \in \mathcal{O}_X(U)$ seine Einschränkung $s\mid_{U\cap Y} \in j_*\mathcal{F}_Y(U) = \mathcal{F}_Y(U \cap Y)$ zugeordnet.
Außerdem gilt:
$j_*\mathcal{O}_Y(U) = \mathcal{O}_Y(U \cap Y) = \{f : U \cap Y \to K \mid \forall x \in U \cap Y, \exists V \subset X$ offen, mit $x \in V$ und $g \in \mathcal{O}_X(V) : g\mid_{V\cap U\cap Y} = f\mid_{V\cap U\cap Y}\}=$
$(Bildr)(U)=\{f : U \to K \mid \forall x \in U, \exists V \subset U$ offen, $x \in V$ und $f\mid_V \in Bild(r(V))\}$, wobei $Bild(r(V)) = \{f \mid \exists s \in \mathcal{O}_X(U)$ mit $s\mid_{U\cap Y} = f\}$, ist.
Im Folgenden werden wir oft $\mathcal{O}_Y$ mit $j_*\mathcal{O}_Y$ identifizieren, da (für $V \subset Y$ offen) $\mathcal{O}_Y(V) = \mathcal{O}_Y(V \cap Y) = j_*\mathcal{O}_Y(V)$ (siehe Vortrag 5, 3.7) gilt. Dies erlaubt es uns $\mathcal{O}_Y$ als $\mathcal{O}_X$-Modul aufzufassen.
Wir betrachten auch den Kern von r, welchen wir mit $\mathcal{J}_Y$ (oder alternativ mit $\mathcal{J}_{Y/X}$, um den ursprünglichen Raum nicht aus dem Auge zu verlieren) bezeichnen. Dieser ist ein $\mathcal{O}_X$-Modul und sogar eine Idealgarbe in $\mathcal{O}_X$ (mit anderen Worten: $\mathcal{J}_Y(U)$ ist ein Ideal in $\mathcal{O}_X(U)$ für alle U).
Nachdem man $\mathcal{O}_Y$ mit seinem direkten Bild identifiziert hat erhält man folgende exakte Sequenz von $\mathcal{O}_X$-Moduln (auch fundamentale exakte Seuquenz genannt) zu Y: $0 \to \mathcal{J}_Y \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_Y \to 0$.

Definition 2.11: Seien $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ zwei $\mathcal{O}_X$-Moduln. Wir definieren das Tensorprodukt $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}$ als die zu der Prägarbe $U \mapsto \mathcal{F}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{G}(U)$ assoziierte Garbe. Dies ist wiederum ein $\mathcal{O}_X$-Modul.

3 Garben von Moduln auf einer affinen, algebraischen Varietät

Sei V eine affine, algebraische Varietät und betrachte $A = \Gamma(V, \mathcal{O}_V)$. Ist $\mathcal{F}$ ein $\mathcal{O}_V$-Modul, dann gilt dass $\Gamma(V, \mathcal{F})$ ein A-Modul ist.
Zur Erinnerung: Für eine offene Menge $U \subseteq V$ nennen wir die Elemente von $\Gamma(U, \mathcal{F})$ die Schnitte von $\mathcal{F}$ über U. Falls $U = V$ erhalten wir $\Gamma(V, \mathcal{F})$ und nennen die Elemente davon Globale Schnitte.
Die Beziehung $\mathcal{F} \mapsto \Gamma(V, \mathcal{F})$ ist durch 2.4 funktoriell und wir nennen sie den Funktor globaler Schnitte.

Jetzt suchen wir einen "inversen"Funktor.

Definition 3.1: Sei M ein A-Modul. Wir definieren ein $\mathcal{O}_V$-Modul $\widetilde{M}$ auf den offenen Standardmengen von V auf folgende Weise: Sei $f \in A$, dann setzen wir $\widetilde{M}(D(f)) = M_f = M \otimes_A A_f$. Insbesondere gilt: $\widetilde{M}(V) = \Gamma(V, \widetilde{M}) = M$.

Bemerkungen 3.2:

1. Wir können den lokalisierten Modul M_f beschreiben als die Menge von der Paaren (x, s), so dass $x \in M$ und $s = f^n$ modulo die Äquivalenzrelation

$$(x, s) \sim (y, t) \Longleftrightarrow \exists u = f^r : u(xt - ys) = 0$$

(NB: Der Term u kann notwendig sein, wenn A kein Integritätsbereich ist oder wenn M nicht torsionsfrei ist, d.h. wenn es möglich ist $ax = 0$ zu haben mit $a \in A$ und $x \in M$ beide nicht Null.) Wir schreiben das Bild von (x, s) als x/s oder als $x \otimes (1/s)$.

2. Analog zum Beweis für Bemerkung 1.5, Vortrag 5, zeigt man, dass die Definition eine Garbe definiert.

3. Insbesondere gilt: $\widetilde{A} = \mathcal{O}_V$.

Zur Erinnerung:

- Das Tensorprodukt ist funktoriell, d.h. für einen Homomorphismus $f : M \to M'$ von Moduln gibt es einen induzierten Homomorphismus

$$f \otimes \mathrm{Id} : M \otimes N \to M' \otimes N$$

- Das Tensorprodukt ist rechtsexakt, d.h. für eine exakte Sequenz $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ von Moduln gibt es eine induzierte exakte Sequenz

$$M' \otimes N \to M \otimes N \to M'' \otimes N \to 0$$

- Sei $E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$ eine direkte Summe von Moduln und sei F ein Modul, dann existiert ein Isomorphismus

$$F \otimes E \leftrightarrow \bigoplus_{i=1}^{n} (F \otimes E_i)$$

Satz 3.3: Die Beziehung $M \mapsto \widetilde{M}$ ist funktoriell, exakt und kommutiert mit direkten Summen und Tensorprodukten, d.h. $\widetilde{M \oplus N} = \widetilde{M} \oplus \widetilde{N}$ und $\widetilde{M \otimes_A N} = \widetilde{M} \otimes_{\mathcal{O}_V} \widetilde{N}$.

Beweis:
<u>Funktorialität</u>: Sei $\varphi : M \to N$ ein Homomorphismus von A-Moduln. Wegen der Funktorialität des Tensorprodukts gibt es eine Abbildung

$$\varphi_f : M_f = M \otimes_A A_f \to N_f = N \otimes_A A_f$$

Die Funktorialität der Beziehung folgt.

Exaktheit: Sei $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ eine exakte Sequenz von A-Moduln. Dann folgt aus den Grundeigenschaften des Tensorprodukt (siehe oben), dass die Sequenz $M'_f \to M_f \to M''_f \to 0$, die man durch Lokalisierung erhält, exakt ist. Es genügt dann zu zeigen, dass $i : M'_f \to M_f$ injektiv ist.
Man nehme an, dass $i(x'/f^n) = 0$ in M_f. Dann folgt, dass $f^r x = 0$ in M und daher $f^r x' = 0$ in M', also $x'/f^n = 0$ in M'_f. Wir erhalten die exakte Sequenz

$$0 \to M'_f \to M_f \to M''_f \to 0$$

Summe und Produkt: Wir zeigen, dass $(M \oplus M')_f = M_f \oplus M'_f$ und $(M \otimes_A M')_f = M_f \otimes_{A_f} M'_f$. Es gilt

$$\begin{aligned}(M \oplus M')_f &= (M \oplus M') \otimes_A A_f \\ &= (M \otimes_A A_f) \oplus (M' \otimes_A A_f) \\ &= M_f \oplus M'_f\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}M_f \otimes_{A_f} M'_f &= (M \otimes_A A_f) \otimes_{A_f} (M' \otimes_A A_f) \\ &= M \otimes_A (A_f \otimes_{A_f} A_f) \otimes_A M' \\ &= M \otimes_A M' \otimes_A A_f \\ &= (M \otimes_A M')_f\end{aligned}$$

Beispiel 3.4: *Die zu einer abgeschlossenen Teilmenge assoziierte exakte Sequenz.* Sei W eine abgeschlossene Teilmenge von V definiert durch ein Ideal $I = I_V(W)$ in A. Dann haben wir eine exakte Sequenz $0 \to I \to A \to A/I \to 0$, die, wenn wir zu Garben übergehen, die Sequenz $0 \to \widetilde{I} \to \widetilde{A} \to \widetilde{A/I} \to 0$ ergibt.
Vom ersten Vortrag wissen wir, dass $\Gamma(W) \simeq \Gamma(V)/I_V(W)$ und dann folgt aus Beispiel 2.10, dass wir nun die fundamentale exakte Sequenz $0 \to \mathcal{J}_W \to \mathcal{O}_V \to \mathcal{O}_W \to 0$ haben.

Definition 3.5: Ein $\mathcal{O}_V$-Modul, der isomorph zu einem $\mathcal{O}_V$-Modul vom Typ $\widetilde{M}$ ist, nennt man quasikohärent. Ist M endlich erzeugt über A, dann sagen wir, dass M kohärent ist. Wir werden manchmal einfach quasikohärente Garbe statt quasikohärenter $\mathcal{O}_V$-Modul sagen.

Bemerkung 3.6: Der Funktor $M \mapsto \widetilde{M}$ ist eine Äquivalenz von Kategorien zwischen der Kategorie von A-Moduln und der Kategorie der quasikohärenten $\mathcal{O}_V$-Moduln (dieser Funktor hat eine "Quasi-Inverse", nämlich den Funktor globaler Schnitte Γ). Im affinen Fall, hängt wiederum alles vom Ring $A = \Gamma(V)$ ab.
Wir bemerken, dass es nicht-quasikohärente Garben von affinen, algebraischen Varietäten gibt. Zum Beispiel: Sei X eine affine, algebraische Varietät, $a \in X$ und sei $\mathcal{F}$ die Garbe definiert über X durch

$$\Gamma(U, \mathcal{F}) = \begin{cases} \Gamma(U, \mathcal{O}_X) & a \notin U \\ 0 & a \in U \end{cases}$$

Wenn man sich mit quasikohärenten Garben von affinen, algebraischen Varietäten beschäftigt, gibt es keine fundamentalen Probleme mit der Surjektivität von Homomorphismen von Garben.

Satz 3.7: Sei $0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to 0$ eine exakte Sequenz von quasikohärenten Garben auf einer affinen, algebraischen Varietät. Dann haben wir die exakte Sequenz $0 \to \Gamma(X, \mathcal{F}') \to \Gamma(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{\pi} \Gamma(X, \mathcal{F}'') \to 0$.

Beweis: Das einzige Problem ist die Surjektivität von π. Siehe Vortrag 12.

Der folgende Satz zeigt, dass die Eigenschaft quasikohärent zu sein lokal ist.

Satz 3.8: Sei X eine affine, algebraische Varietät und sei $\mathcal{F}$ ein $\mathcal{O}_X$-Modul. Dann gilt: $\mathcal{F}$ ist quasikohärent (bzw. kohärent) genau dann, wenn es eine offene Überdeckung U_i von X gibt, so dass $\Gamma(U_i, \mathcal{O}_X) = A_i$ und es A_i-Moduln M_i (bzw. endlich erzeugte Moduln) gibt, so dass für jedes i gilt: $\mathcal{F}|_{U_i} \simeq \widetilde{M_i}$.

Beweis: Siehe Robin Hartshorne: Algebraic Geometry, Kapitel II, Proposition 5.4.

Der Satz rechtfertigt die folgende Definition.

Definition 3.9: Sei X eine algebraische Varietät und sei $\mathcal{F}$ ein $\mathcal{O}_X$-Modul. Wir sagen dass $\mathcal{F}$ quasikohärent (bzw. kohärent) ist, wenn es eine offene, affine Überdeckung U_i von X gibt, so dass $\mathcal{F}|_{U_i}$ quasikohärent (bzw. kohärent) auf jedem U_i ist.

Wir haben den folgenden Satz von Tensorprodukten von quasikohärenten Garben.

Satz 3.10: Sei X eine algebraische Varietät und seien $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ quasikohärente Garben auf X. Dann gilt:

- Die Garbe $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}$ ist quasikohärent
- Für eine beliebige affine, offene Menge U in X gilt:

$$(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G})(U) = \mathcal{F}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{G}(U)$$

Beweis: Sei U eine offene Menge, dann gilt $(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G})|_U = \mathcal{F}|_U \otimes_{\mathcal{O}_U} \mathcal{G}|_U$ (weil beide Garben zur selben Prägarbe $W \mapsto \mathcal{F}(W) \otimes_{\mathcal{O}_X(W)} \mathcal{G}(W)$ assoziiert sind).
Falls U auch affin ist und wir $A = \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$, $F = \Gamma(U, \mathcal{F})$, $G = \Gamma(U, \mathcal{G})$ setzen, dann folgt

$$(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G})|_U = \mathcal{F}|_U \otimes_{\mathcal{O}_U} \mathcal{G}|_U = \widetilde{F} \otimes_{\widetilde{A}} \widetilde{G} = \widetilde{F \otimes_A G}$$

Dies zeigt die zwei obige Behauptungen.