ALGEBRAISCHE VARIETÄTEN

MARCO WEHNER UND MAXIMILIAN KREMER

1. Strukturgarben

Sei $V \subset k^n$. Wir wollen nur „gute“ Funktionen auf den offenen Mengen von V definieren. Dabei orientieren wir uns an folgenden Gegebenheiten:

(1) Die „guten“ Funktionen auf V sollen die Polynome aus $\Gamma(V)$ sein.
(2) V besitzt eine sehr einfache Basis offener Mengen (die Mengen $D(f)$, $f \in \Gamma(V)$).

Lemma 1.1. *Sei X ein topologischer Raum, $\mathcal{U} \subset X$ eine Basis offener Mengen in X und $\mathbf{K}$ eine Menge. Für jede offene Menge U von $\mathcal{U}$ sei $\mathcal{F}(U)$, eine Menge von Funktionen von U nach $\mathbf{K}$, die folgenden Bedingungen genügt:*

(i) (Einschränkung) $V, U \in \mathcal{U}$ *mit* $V \subset U$ *und* $s \in \mathcal{F}(U) \implies s|_V \in \mathcal{F}(V)$
(ii) (Verklebung) $U = \bigcup_{i \in I} U_i$, $U_i \in \mathcal{U}$ *und* $\forall\, s : U \longrightarrow K$ *mit* $\forall\, i \in I$, $s|_{U_i} \in \mathcal{F}(U_i) \implies s \in \mathcal{F}(U)$

In diesem Fall existiert eine eindeutig bestimte Garbe $\overline{\mathcal{F}}$ von Funktionen auf X, so dass $\forall\, U \in \mathcal{U}: \quad \overline{\mathcal{F}}(U) = F(U)$, *indem man*
$\overline{\mathcal{F}}(U) = \{s : U \to K \mid \forall i, s|_{U_i} \in \mathcal{F}(U_i)\}$ *definiert.*

Beweis.

(a) $\overline{\mathcal{F}}(U) = \mathcal{F}(U) klar$
(b) Nun ist zu zeigen: $\overline{\mathcal{F}}$ ist Garbe
Ist $W \subset V \subset U$ mit $W, V, U \subset X$ allesamt offen, dann gilt

$$r_{W,U} = r_{W,V} r_{V,U}$$

Dass die Restriktionsabbildungen existieren und hintereinandergeschaltet werden können, ist klar. Man muss nur zeigen, dass $s|_V \in \mathcal{F}(V)$ bzw. $s|_W \in \mathcal{F}(W)$ ist.
$U = \bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{U} \quad V_i := U_i \cap V \quad V_i = \bigcup_{j \in J} V_{ij} \quad V_{ij} \in \mathcal{U}$
$f_i : U_i \to K$
$\Rightarrow f_i|_{V_{ij}} \in \overline{\mathcal{F}}(V_{ij}) \quad \forall ij$
$\Rightarrow f|_{V_i} \in \overline{\mathcal{F}}(V_i) \quad \forall i$
$\Rightarrow f|_V \in \overline{\mathcal{F}}(V)$ (W analog)
(c) Nun zeigen wir, dass das Verklebungsaxiom erfüllt wird.
oBdA $U_i \in \mathcal{U}$
$f_i : U_i \longrightarrow K$ außerdem soll gelten:
$f_i|_{U_i \cap U_j} \;=\; f_j|_{U_i \cap U_j} \quad \forall i, j \in I$
Wir definieren uns jetzt die zusammgesetzte Funktion f. Jeder beliebigen Punkt $u \in X$ befinden sich in einer der Mengen U_i oder in dem Schnitt mehrerer dieser Basiselemente. Da die Funktionen f_i auf den Schnitten übereinstimmen können wir uns

$$u \longmapsto f(u) := f_i(u)$$

definieren.

(d) Als nächstes zeigen wir, dass die Garbifizierung unabhängig von der Art der Überdeckung von U ist.
Seien $U_i \in \mathcal{U}$, $i \in I$ und $T_j \in \mathcal{U}$, $j \in J$ mit I, J Indexmengen, zwei Überdeckungen von U.
$\overline{\mathcal{F}}(U) = \{s : U \to K \mid \forall i, s|_{U_i} \in \mathcal{F}(U_i)\}$ und
$\overline{\mathcal{F}}(U)^* = \{s : U \to K \mid \forall j, s|_{T_j} \in \mathcal{F}(T_j)\}$.
Da $\overline{\mathcal{F}}(U)$ Garbe, stimmen s_j und s_i auf $U_i \cap U_j$ bzw. $T_i \cap T_j$ überein. Deswegen können wir o.E. $U_i \cap U_k = \emptyset$ annehmen Sei nun $V_{ij} := U_i \cap T_j$.
Dann können wir

$$\overline{\mathcal{F}}(U)^{**} = \{s : U \to K \mid \forall ij, s|_{V_{ij}} \in \mathcal{F}(V_{ij})\}$$

definieren.
Nun ist zu zeigen, dass $\overline{\mathcal{F}}(U)^* = \overline{\mathcal{F}}(U)^{**} = \overline{\mathcal{F}}(U)$ gilt.
Sei $s \in \overline{\mathcal{F}}(U)^* \quad \Leftrightarrow \quad s|_{T_j} \in \overline{\mathcal{F}}(T_j) \quad (\forall j) \quad \Rightarrow \quad s|_{V_{ij}} \in \overline{\mathcal{F}}(V_{ij}) \quad (\forall ij)$
$\Rightarrow \quad s|_{U_i} \in \overline{\mathcal{F}}(U_i) \quad (\forall i) \quad \Leftrightarrow \quad s \in \overline{\mathcal{F}}(U)$

□

Wir können nun Garben auf Basen offener Mengen definieren. Dafür reicht es aus, die Eigenschaften (i) und (ii) aus Lemma 1.1 nachzuprüfen.

Lemma 1.2. *Sei X ein topologischer Raum mit einer Basis $\mathcal{U}$ von offenen Mengen. Ferner sei $\mathcal{F}$ eine Garbe und $\mathcal{G}$ eine Prägarbe auf X. Dann gilt*

$$\mathcal{F}(U) = \mathcal{G}(U) \ \ \forall\, U \in \mathcal{U} \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{F} = \mathcal{G}^+ \ .$$

Beweis. Es gilt $\mathcal{F}(U) = \mathcal{G}(U) = \mathcal{G}^+(U) \quad \forall U \in \mathcal{U}$ (klar wegen Lemma 1.1 und Bemerkung letzter Vortrag) □

Bemerkung 1.3.

(i) *Im Folgenden wollen wir unsere gutartigen Funktionen auf $D(f)$, nämlich $\Gamma(D(f), \mathcal{O}_V)$, definieren. Neben $\Gamma(V)$ nehmen wir noch Funktionen f^{-1} hinzu, da $f(v) \neq 0$ für alle $v \in D(f)$ dies möglich macht. Dadurch erhalten wir die Lokalisierung $\Gamma(V)_f$.*

(ii) *Betrachten wir $\mathcal{F}(D(f), k)$, den Ring aller Funktionen von $D(f)$ nach k, so ist der Homomorphismus*

$$\phi : \ \Gamma(V)_f \longrightarrow \mathcal{F}(D(f), k)$$

injektiv. Denn falls $\phi(g/f^n) = 0$ auf $D(f)$, so folgt $g = 0$ auf $D(f)$ und damit $fg = 0$ auf V, so dass $g/f^n = 0$ in $\Gamma(V)_f$.

Definition 1.4. ***Garbe der regulären Funktionen***
Sei V eine affine algebraische Menge und $f \in \Gamma(V) - \{0\}$. Wir setzen

$$\mathcal{O}_V(D(f)) := \Gamma(D(f), \mathcal{O}_V) := \Gamma(V)_f \ ,$$

indem wir dies als Teilring des Ringes von k-wertigen Funtionen auf $D(f)$ mittels der obigen Abbildung ϕ in Bemerkung 1.3 (ii) betrachten. Dadurch definieren wir eine Garbe von Ringen auf V - die Garbe der regulären Funktionen.

Satz 1.5. *Mit den oben definierten Bedingungen lässt sich eine Garbe konstruieren, d.h. das Restriktions- und Verklebungsaxiom ist jeweils erfüllt.*

Beweis.

(i) *Restriktion:* Seien $f, g \in \Gamma(V)$. Dann gilt: $D(f) \subset D(g) \Rightarrow V(g) \subset V(f) \Rightarrow f$ verschwindet auf $V(g)$. Aus dem Nullstellensatz folgt nun $f^n = gh$ mit $h \in \Gamma(V)$. Sei $\frac{u}{g^i} \in \Gamma(V)_g$, $i \in \mathbb{N} \Rightarrow \frac{u}{g^i} = \frac{uh^i}{g^i h^i} = \frac{uh^i}{f^{ni}} \in \Gamma(V)_f$.

(ii) *Verkleben:* Wir gehen nun von dem Spezialfall V irreduzibel aus ($\Rightarrow \Gamma(V)$ ntf). Den allgemeinen Fall überlassen wir dem geneigten Zuhörer als Übung. Sei $D(f)$ eine offene Standardmenge, die von offenen Mengen $D(f_i)(f_i \neq 0)$ überdeckt ist.
$\Rightarrow V(f) = V(f_1) \cap V(f_2) \cap ... \cap V(f_n) = V(I) \quad$ für $I = (f_1, f_2, ..., f_n)$
(Wir können dies annehmen da $\Gamma(V)$ noethersch)
Seien s_i Schnitte von $D(f_i)$, $s_i = \frac{a_i}{f_i^m}$ (Wir können für alle s_i das gleiche m benutzen (Hauptnenner bilden da nur endlich viele)). Wir nehmen an, dass s_i und s_j auf $D(f_i) \cap D(f_j)$ übereinstimmen.
$\Rightarrow a_i f_j^m = a_j f_i^m$ auf $D(f_i) \cap D(f_j)$, und damit auch auf V, da $D(f_i) \cap D(f_j)$ dicht in V.
Da f auf $V(f_1, ..., f_n) = V(f_1^m, ..., f_n^m)$ verschwindet
$\Rightarrow \quad f \in rac(f_1^m, ..., f_n^m)$
$\Leftrightarrow \quad f^r = \sum_{j=1}^n b_j f_j^m$
Wir suchen nun nach einem Schnitt s auf $D(f)$ der Form $s = \frac{a}{f^r}$ s.d.
$s|_{D(f_i)} = s_i$ d.h. $\frac{a}{f^r} = \frac{a_i}{f_i^m}$
$\Leftrightarrow \quad f_i^m a = a_i f^r = a_i \sum_{j=1}^n b_j f_j^m = \sum_{j=1}^n b_j a_i f_j^m = \sum_{j=1}^n b_j a_j f_i^m = f_i^m \sum_{j=1}^n b_j a_j$
$\Rightarrow a = \sum_{j=1}^n b_j a_j$

$\square$

2. Affine Varietäten

Definition 2.1. *Eine affine algebraische Varietät ist ein geringter Raum, der isomorph ist zu einem Paar $(V, \mathcal{O}_V)$ mit V als affine algebraische Menge und $\mathcal{O}_V$ als Garbe regulärer Funktionen auf V. Ein Morphismus zwischen affinen algebraischen Varietäten ist somit ein Morphismus zwischen geringten Räumen.*

Bemerkung 2.2. *Manche Autoren verwenden das Wort Varietät für eine irreduzible Varietät. Der einzige Vorteil von affinen algebraischen Varietäten gegenüber affinen algebraischen Mengen ist ihre Unabhängigkeit von Einbettungen in k^n. Ein typisches Beispiel ist die offene Standardmenge $D(f)$:*

Satz 2.3. *Sei V eine affine algebraische Menge und $f \in \Gamma(V)$. Die offene Menge $D(f)$ mit der Einschränkung der Garbe $\mathcal{O}_V$ auf $D(f)$ ist eine affine algebraische Varietät.*

Beweis. Sei V in k^n eingebettet. $I = I(V)$, F ein Polynom mit $F|_V =: f$ Unser Ziel ist es zu zeigen, dass $D(f)$ isomorph zu einer affinen algebraischen Menge ist. Nach dieser Menge schauen wir uns mal im k^{n+1} um. Dafür verwenden wir die Abbildung

$$\varphi : (x_1, ..., x_n) \longmapsto (x_1, ..., x_n, \frac{1}{f(x_1, ..., x_n)})$$

von $D(f)$ nach k^{n+1}. Das Bild von φ ist die Menge $V(J)$ mit $J = I + (X_{n+1}F - 1)$ Es ist offensichtlich, dass φ ein Homöomorphismus von $D(f)$ nach $V(J)$ ist , dessen Inverses die Projektion $p(x_1, ..., x_n, x_{n+1}) = (x_1, ..., x_n)$ ist. Es ist leicht nachzuprüfen, dass dies ein Isomorphismus ist. $\square$

Beispiel 2.4. *Man betrachte den affinen Raum $X := M(n, \mathbb{C}) = \mathbb{C}^{n^2}$ von Matrizen. Wähle als $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ die Determinantenfunktion, die eine Polynomfunktion* *darstellt. Dann ist die offene Standardmenge $D(f) \subset X$ gerade die Gruppe der invertierbaren Matrizen $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) \subset X$ mit nicht-trivialer Determinante.*

Satz 2.5. *Seien $(X, \mathcal{O}_X)$ und $(Y, \mathcal{O}_Y)$ zwei affine algebraische Mengen ausgestattet mit der Struktur affiner algebraischer Mengen gegeben durch die Strukturgarben $\mathcal{O}_X$ und $\mathcal{O}_Y$. Es gibt dann folgende natürliche Bijektionen*

$$Hom_{Var}(X, Y) \simeq Reg(X, Y) \simeq Hom_{k-alg}(\Gamma(Y, \mathcal{O}_Y), \Gamma(X, \mathcal{O}_X)) \,.$$

Beweis. Die Existenz der zweiten Isomorphie wurde im zweiten Vortrag gezeigt.

- „$\Rightarrow$“ Ist $\varphi : \; X \to Y$ Isomorphismus zw. Varietäten. Dann betrachten wir die Koordinatenfuntionen η_i auf Y. $\Rightarrow \quad \varphi = (\eta_1\varphi, ..., \eta_n\varphi)$ ist damit regulär.
- „$\Leftarrow$“ Wenn φ regulär ist, $D(g)$ offene Standardmenge auf Y und $f = \frac{h}{g^r} \in \Gamma(D(g), \mathcal{O}_Y)$
  $\Rightarrow f\varphi = \frac{\varphi^*(h)}{\varphi^*(g)^r} \quad \in \Gamma(D(\varphi^*(g)), \mathcal{O}_X)$. Und damit ist φ ein Morphismus zwischen Varietäten.

□

3. Algebraische Varietäten

Definition 3.1. ***Algebraische Varietät***
Eine algebraische Varietät $(X, \mathcal{O}_X)$ ist ein geringter Raum, der folgende zwei Eigenschaften erfüllt:

- *X ist **quasi-kompakt**, d.h.*

$$X = \bigcup_{i \in I} U_i \;,\; U_i \text{ offen} \;\forall\; i \in I \implies \exists\; K \subset I \text{ endlich: } X = \bigcup_{i \in K} U_i$$

- *$(X, \mathcal{O}_X)$ ist **lokal isomorph zu einer affinen algebraischen Varietät**, d.h. für jeden Punkt $x \in X$ gibt es eine offene Umgebung $U \subset X$, so dass $x \in U$ und $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ isomorph zu einer affinen algeraischen Varietät ist.*

Ferner entspricht ein Morphismus zwischen algebraischen Varietäten einem Morphismus zwischen geringten Räumen.

Bemerkung 3.2.

- *Affine algebraische Varietäten sind aufgrund der Tatsache, dass der Polynomring noethersch ist, quasi-kompakt und stellen damit auch algebraische Varietäten dar.*
- *Wir haben damit die folgende Übersicht:*

Affine algebr. Varietäten $\subset$ Algebr. Varietäten $\subset$ Geringte Räume

- *Zur Beschreibung einer algebraischen Varietät lässt sich auch sagen, dass sie als geringter Raum von endlich vielen affinen algebraischen Mengen überdeckt wird.*

Definition 3.3. ***Affine offene Mengen***
Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ eine algebraische Varietät. Die offenen Mengen von X, die isomorph zu einer affinen algebraischen Varietät sind, nennt man affine offene Mengen.

Satz 3.4. *Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ eine algebraische Varietät. Die affinen offenen Mengen bilden eine Basis der offenen Mengen von X. D.h. jede offene Menge von X ist eine endliche Vereinigung von affinen offenen Mengen und deshalb quasi-kompakt.*

Beweis. Nach Definition von algebraischen Varietäten gilt $X = \bigcup_{i=1}^r U_i$, wobei $r \in \mathbb{N}$ und U_i affine, offene Mengen sind. Sei $U \subset X$ eine offene Menge. Dann gilt $U = \bigcup_{i=1}^r U \cap U_i$, d.h. es reicht zu zeigen, dass sich die offene Menge $U \cap U_i$ als endliche Vereinigung von affinen offenen Mengen schreiben lässt. Doch dies folgt daraus, dass U_i affin ist und dass sich dadurch jede offene Menge in U_i als endliche Vereinigung von Mengen $D(f_j)$ mit $f_j \in \Gamma(U_i)$ schreiben lässt (siehe zweiter Vortrag) und aus Satz 2.3. □

Korollar 3.5. *Eine nicht-leere algebraische Varietät* $(X, \mathcal{O}_X)$ *kann in eindeutiger Weise geschrieben werden als endliche Vereinigung irreduzibler geschlossener Mengen, die sich nicht gegenseitig enthalten. Diese sind ihre irreduziblen Komponenten.*

Beweis. Wieder lässt sich X aus Gründen der Quasi-Kompaktheit schreiben als $X = \bigcup_{i=1}^k U_i$, wobei $r \in \mathbb{N}$ und U_i affine, offene Mengen sind. Da jedes U_i isomorph zu einer affinen algebraischen Menge ist, erhalten wir nach einem früheren Satz

$$U_i = \bigcup_{j=1}^{l} U_{i,j} \ ,$$

$l \in \mathbb{N}$ und $U_{i,j}$ für festes i abgeschlossen in U_i und irreduzibel mit $U_{i,m} \not\subset U_{i,n}$ für $m \neq n$, $m, n \in \mathbb{N}$. Nach einem weiteren Satz folgt $X = \bigcup_{i=1}^k \bigcup_{j=1}^l \overline{U}_{i,j}$ mit irreduziblen $\overline{U}_{i,j}$, die abgeschlossen in X sind. □

Beispiele 3.6. *Sei* $(X, \mathcal{O}_X)$ *eine algebraische Varietät.*

(i) ***Offene Untervarietäten***
Für $U \subset X$ *offen ist* $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ *eine algebraische Varietät, die sogenannte offene Untervarietät von* $(X, \mathcal{O}_X)$*. Warnung: Diese muss nicht notwendig affin sein wie das Beispiel* $k^2 - \{(0,0)\}$ *zeigt.*

(ii) ***Abgeschlossene Untervarietäten***
Sei $Y \subset X$ *abgeschlossen und* $(X, \mathcal{O}_X)$ *eine algebraische Varietät. Wir wollen die Strukturgarbe* $\mathcal{O}_Y$ *auf* Y *definieren. Dazu schaue man sich Funktionen auf* $U \subset X$ *offen an und schränke diese auf* Y *ein:*

$$\mathcal{O}_{0,Y}(V) := \{f : V \longrightarrow k \mid \exists\, U \subset X \text{ offen, sodass}$$
$$U \cap Y = V \text{ und } \exists\, g \in \mathcal{O}_X(U) : g|_V = f\}.$$

Dadurch erhalten wir jedoch nur eine Prägarbe, die wir im Folgenden „garbifizieren“ wollen.

Satz-Definition 3.7. *Sei* $(X, \mathcal{O}_X)$ *eine algebraische Varietät,* $Y \subset X$ *abgeschlossen. Wir definieren die Strukturgarbe* $\mathcal{O}_Y$ *von* Y *auf jedem* $V \subset Y$ *offen durch*

$$\mathcal{O}_Y(V) = \{f : V \longrightarrow k \mid \forall\, x \in V \ , \ \exists\, U \subset X \text{ offen,}$$
$$\text{mit } x \in U \text{ und } g \in \mathcal{O}_X(U) : \ g|_{U \cap V} = f|_{U \cap V}\} \ .$$

Falls $(X, \mathcal{O}_X)$ *eine algebraische Varietät (oder sogar affine algebraische Varietät) ist, so auch* $(Y, \mathcal{O}_Y)$ *und die Inklusion von* Y *in* X *ist ein Morphismus.*

Beweis. Ohne Einschränkung sei X affin, denn der allgemeine Fall folgt dann aus diesem durch Vereinigung. Weiter sei $f \in \Gamma(X)$ und $\bar{f} = f|_Y \in \Gamma(Y)$. Dann genügt es nach Lemma 1.2 zu zeigen, dass

$$\mathcal{R}(D(\bar{f})) = \mathcal{O}_{0,Y}(D(\bar{f})),$$

wobei $\mathcal{R}$ die Garbe der regulären Funktionen bezeichne. D.h. wir wollen zeigen, dass die Prägarbe $\mathcal{O}_{0,Y}$ auf offenen Basismengen $D(\bar{f})$ von Y mit der Garbe der „guten“ regulären Funktionen auf $D(\bar{f})$ übereinstimmt.

„$\subseteq$“ Setze in 3.6 (ii) $U = D(f)$, $\mathcal{O}_X(D(f)) = \Gamma(X)_f$.

$$\Longrightarrow \ V := Y \cap D(f) = D(\bar{f})$$

$$\Longrightarrow \mathcal{R}(D(\bar{f})) = \Gamma(X)_f|_Y = \Gamma(Y)_{\bar{f}} \subset \mathcal{O}_{0,Y}(D(\bar{f}))$$

„$\supseteq$“ Sei $\bar{s} \in \mathcal{O}_{0,Y}(D(\bar{f})) \Rightarrow \bar{s} = s|_Y$ mit $s \in \mathcal{O}_X(U)$ für $U \subset X$ offen. Sei $U = \bigcup_{i=1}^r D(g_i)$ mit $g_i \in \Gamma(X)$, $r \in \mathbb{N}$.

$$\Longrightarrow D(\bar{f}) = U \cap Y = \bigcup_{i=1}^{r} D(g_i) \cap Y =: \bigcup_{i=1}^{r} D(\bar{g}_i)$$

mit $D(\bar{g}_i)$ Einschränkung von $D(g_i)$ auf Y.
Da $s|_{D(g_i)} \in \mathcal{O}_X(D(g_i)) = \Gamma(X)_{g_i}$

$$\Longrightarrow s|_{D(g_i) \cap Y} = \bar{s}|_{D(\bar{g}_i)} \in \Gamma(Y)_{\bar{g}_i} \underset{\text{nach Def.}}{=} \mathcal{R}_Y(D(\bar{g}_i)) \ .$$

Und weil $\mathcal{R}_Y$ eine Garbe (mit Verklebungsaxiom) auf Y

$$\Longrightarrow \bar{s} \in \mathcal{R}_Y(D(\bar{f})) \ .$$

□

Bemerkung 3.8. *Tatsächlich versuchen wir zu zeigen, dass es eine surjektive Abbildung von $\mathcal{O}_X$ nach $\mathcal{O}_Y$ gibt. Wenn V eine offene affine Menge von Y ist und $V = U \cap Y$ mit $U \subset X$ offen, so folgt aus dem obigen Beweis, dass jede reguläre Funktion auf V Bild unter Restriktion einer regulären Funktion auf U ist. In diesem Fall taucht das obige Problem nicht auf, jedoch im Falle nicht affiner offener Mengen ist Vorsicht geboten, wie wir im Folgenden sehen möchten:*

Beispiel 3.9. *Betrachte $V = \boldsymbol{P}^2$ und sei $W = V(X(X-T), XY)$ (abgeschlossen), geometrisch interpretiert, die Vereinigung der y-Achse und des Punktes $(1,0,1)$, und betrachte W als eine offene Menge von sich selbst. Wir suchen offene Mengen $\Omega = \boldsymbol{P}^2 - Z$ in $\boldsymbol{P}^2$ mit $W \subset \Omega$, wobei Z eine abgeschlossene Menge ist. Dies wiederum ist äquivalent dazu, dass $Z \cap W = \emptyset$ und besonders $Z \cap V(X) = \emptyset$. Nach dem Theorem von Bézout ist dann Z endlich und es folgt (Übungsaufgabe) $\Gamma(\Omega, \mathcal{O}_{\boldsymbol{P}^2}) = \Gamma(\boldsymbol{P}^2, \mathcal{O}_{\boldsymbol{P}^2}) = k$. Somit sind die einzigen Funktionen auf W, die sich von offenen Mengen in V ergeben, die konstanten. Allerdings falls $\mathcal{O}_W$ eine Garbe ist, dann gibt es noch andere Funktionen auf W, wie z.B. diejenigen, die konstant auf jedem einzelnen der beiden zusammenhängenden Komponenten von W sind.*

Definition 3.10. *Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ eine algebraische Varietät und sei Y eine lokal abgeschlossen Teilmenge in X (d.h. der Schnitt einer offenen und einer abgeschlossenen Menge). Dann ist Y mit der Varietätenstruktur aus Beispiele 3.6. (i) und (ii) eine sogenannte algebraische Untervarietät von $(X, \mathcal{O}_X)$.*