4. Vortrag - Garben

Ling Lin, Kristijan Cule

Datum: 26. April 2009

1 Graduierte Ringe

Definition 4.1.1. *Eine k-Algebra R heißt* graduiert *, wenn sie dargestellt werden kann als eine direkte Summe*

$$R = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} R_n,$$

wobei die R_n als k-Unterräume von R die Relation $R_p R_q \subset R_{p+q}, \quad p, q \in \mathbb{N}$ erfüllen. Die Elemente von R_p heißen homogen vom Grad p.

Bemerkung 4.1.2. *R_0 ist eine Unteralgebra von R, $R^+ = \bigoplus_{n>0} R_n$ ist ein Ideal und es gilt $R/R^+ \cong R_0$.*
Beispiel: $R = K[X_0, \ldots, X_n] \Rightarrow R^+ = (X_0, \ldots, X_n)$ und $R_0 = K$

Satz 4.1.3. *Seien R eine graduierte k-Algebra, I ein Ideal von R. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. *I wird von homogenen Elementen erzeugt*
2. *Sei $f \in I$ und $f = \sum_{i=0}^{r} f_i$, wobei f_i homogen vom Grad i ist, dann ist $f_i \in I$ für alle i.*

Beweis:
2. $\Rightarrow$ 1. : trivial
1. $\Rightarrow$ 2. : Sei $I = (G_i)_i$, wobei die $(G_i)_i$ homogen vom Grad α_i sind. Sei $f = f_0 + \ldots + f_r \in I$, wobei f_i homogen vom Grad i sind. Per Induktion genügt es zu zeigen, dass $f_r \in I$ ist. Nun ist $I \ni f = \sum U_i G_i = \sum_{i=0}^{r} f_i, \quad U_i \in R$.
Vergleicht man nun die Terme vom höchsten Grad, so hat f_r die Form $f_r = \sum_j U'_{j,r-\alpha_j} G_j$, wobei die $U'_{j,r-\alpha_i} \in R$ homogen vom Grad $r - \alpha_j$ sind.
Damit ist $f_r \in I$.

□

Definition 4.1.4. *Ein Ideal $I \subset R$ einer graduierten k-Algebra R heißt* homogen*, wenn es die Eigenschaften von 4.1.3 erfüllt*

Bemerkung 4.1.5. *Ist $R_0 = k$ und I ein homogenes Ideal mit $I \neq R$, dann ist $I \subset R^+$.*

Satz 4.1.6. *Sei $R = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} R_n$ eine graduierte k-Algebra und I ein homogenes Ideal von R. Ferner sei $S := R/I$ und $p : R \to S$ die kanonische Projektion. Dann hat S eine natürliche Graduierung, die gegeben ist durch*

$$S = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} S_n = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} p(R_n).$$

Beweis: Da p surjektiv ist, gibt es zu jedem $s \in S$ ein $r \in R$ mit $s = p(r) = p(\sum_i r_{\alpha_i}) = \sum_i p(r_{\alpha_i}) = \sum_i \bar{r}_{\alpha_i}$, wobei $r_{\alpha_i} \in R_{\alpha_i}$, somit $\bar{r}_{\alpha_i} \in S_{\alpha_i}$. Also ist $S = \sum_{n\in\mathbb{N}} p(R_n)$.
Sei ferner $\bar{r} \in S_i \cap S_j$.
$\Rightarrow \bar{r}_i = p(r_i) = \bar{r} = p(r_j) = \bar{r}_j$
$\Rightarrow \bar{r}_i - \bar{r}_j = \bar{0} \Rightarrow r_i - r_j \in I$
Aus 4.1.3 Aussage 2 folgt nun, dass auch $r_i \in I$ und $r_j \in I$
$\Rightarrow p(r_i) = \bar{0} = p(r_j) \Rightarrow S_i \cap S_j = \{\bar{0}\} \Rightarrow S = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} S_n$

□

Definition 4.1.7. *Sei R eine graduierte k-Algebra. Ein R-Modul M heißt* graduiert*, falls*

$$M = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} M_n$$

ist, wobei die k-Unterräume $M_n \subset M$ die Relation $R_p M_q \subset M_{p+q}$ für alle $p \in \mathbb{N}$ und $q \in \mathbb{Z}$ erfüllen. Ein Homomorphismus $\phi : M \to N$ zwischen zwei graduierten R-Moduln heißt homogen *vom Grad d, wenn für alle $n \in \mathbb{Z}$ gilt: $\phi(M_n) \subset N_{d+n}$.*

Bemerkung 4.1.8. *Ist ϕ homogen vom Grad d, dann ist $ker(\phi)$ ein graduierter Untermodul von M, d.h.: Ist $x = \sum_n x_n \in ker(\phi)$, dann ist $x_n \in ker(\phi)$ für alle n.*

2 Der graduierte Koordinatenring einer affinen algebraischen Menge

Sei $V \subset \mathbf{P}^n(k)$ eine projektive algebraische Menge und $I_p(V)$ das dazugehörige Ideal. Da $I_p(V)$ homogen ist, ist der Quotientenring

$$\Gamma_h(V) = k[X_0, \ldots, X_n]/I_p(V)$$

nach 4.1.6. graduiert. Dieser graduierter Ring hängt auf kanonischer Art und Weise mit V zusammen.

Bemerkung 4.2.1.

1. *Im Gegensatz zu ihren affinen Analoga kann man die Elemente in $\Gamma_h(V)$ nicht als Funktionen auf V betrachten, da deren Werte abhängig sind von der Wahl eines homogenen Koordinatensystems. Es ist jedoch nach wie vor sinnvoll, ein $x \in \mathbf{P}^n(k)$ als Nullstelle von einem $f \in \Gamma_h(V)$ zu bezeichnen.*

2. *Sei $f \in \Gamma_h(V)$ homogen vom Grad $d > 0$ und sei $f \equiv 0$ auf einer abgeschlossenen Teilmenge $\varnothing \neq W \subseteq V$. Dann gilt nach dem projektiven Hilbert'schen Nullstellensatz*

$$f \in rac(I_V(W)) \cong rac(I_p(W)/I_p(V))$$

Definition 4.2.2. *Sei V eine projektive algebraische Menge und $f \in \Gamma_h(V)$ ein homogenes Polynom vom Grad $d > 0$. Wir definieren die Menge*

$$D^+(f) = \{x \in V | f(x) \neq 0\}$$

$D^+(f)$ ist offensichtlich eine offene Teilmenge von V. Es gilt sogar:

Satz 4.2.3. *Jede nicht leere offene Teilmenge von V ist eine endliche Vereinigung von offenen Mengen der Form $D^+(f)$.*

Beweis: Sei $U \neq \varnothing$ eine offene Teilmenge von V. Dann ist $V \setminus U = V_p(I)$, wobei I ein homogenes Ideal von $k[X_0, \ldots, X_n]$ ist. Sei $I = (F_1, \ldots, F_r)$, wobei $F_i \in k[X_0, \ldots, X_n]$ homogen vom Grad > 0. Seien ferner $f_i \in \Gamma_h(V)$ die kanonischen Bilder der F_i. Dann ist:
$U = V \setminus V_p(I)$
$= V \setminus (V_p(F_1) \cap \ldots \cap V_p(F_r))$
$= V \setminus \{x \in V | f_1(x) = 0 \wedge \ldots \wedge f_r(x) = 0\}$
$= \{x \in V | f_1(x) \neq 0 \vee \ldots \vee f_r(x) \neq 0\}$
$= D^+(f_1) \cup \ldots \cup D^+(f_r)$

□

Bemerkung 4.2.4. *Ist $f \in \Gamma_h(V)$ homogen vom Grad 0, also eine Konstante, dann ist die offene Menge $D^+(f)$ leer, falls $f \not\equiv 0$, oder gleich V, falls $f \equiv 0$. Ist der Grad > 0, so ist $D^+(f)$ nicht leer und kann nur, wenn V endlich ist, gleich V sein.*

Beispiel 4.2.5. *Betrachte die offene Menge $D^+(X_i)$, $i = 0, ..., n$ in $\mathbf{P}^n(k)$. Diese bilden eine offene Überdeckung von $\mathbf{P}^n(k)$ und sind jeweils isomorph zum affinen Raum k^n. Damit können wir Probleme in $\mathbf{P}^n(k)$ mit affiner Geometrie lösen, indem wir diese auf offenen Teilmengen der Form $D^+(X_i)$ bzw., allgemeiner, der Form $D^+(f)$ betrachten.*

3 Garben - allgemeines Konzept

Die Polynome mit denen wir arbeiten, betrachten wir auf den offenen Mengen $D^+(f)$. Falls nun zwei Polynome auf dem Schnitt übereinstimmen, ist es schwer eine Funktion anzugeben, die beide Polynome global beschreibt. Unsere Klasse von Polynomen bestünde deshalb fast nur aus konstanten Polynomen. Diese Beobachtung führt uns zu Funktionen, die lokal auf offenen Mengen definiert sind.

Definition 4.3.1. *Sei X ein topologischer Raum und $\mathbf{K}$ eine Menge. Eine $\mathbf{K}$-wertige* Garbe von Funktionen *auf X ist gegeben durch: für jede offene Menge $U \subset X$ sei $\mathcal{F}(U)$ die Menge von Funktionen von U nach $\mathbf{K}$, welche die folgenden Axiome erfüllt:*

1. *Einschränkung: Falls V eine offene Menge ist, die in U enthalten ist, und $f \in \mathcal{F}(U)$, dann ist $f|_V \in \mathcal{F}(V)$*

2. *Verkleben: Falls U von offenen Mengen U_i $(i \in I)$ überdeckt wird, dann gibt es für jede Wahl von Elementen $f_i \in \mathcal{F}(U_i)$, für die $f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j}$ gilt, eine eindeutige Funktion $f \in \mathcal{F}(U)$, so dass $f|_{U_i} = f_i$ für alle i.*

Bemerkung 4.3.2.

1. *Beim Verkleben ist die Existenz einer Funktion $f : U \to \mathbf{K}$, so dass $f|_{U_i} = f_i$ gilt, klar. Vielmehr drück diese Bedingung aus, dass $f \in \mathcal{F}(U)$.*

2. *Die obigen Axiome sind intuitiv. Sie drücken aus, dass eine bestimmte Klasse von Funktionen auf X 'gute' Eigenschaften besitzt, die wir handhaben können. Wir brauchen also eine Klasse von Funktionen, die stabil unter Einschränkungen ist und lokal ist, was heißt, dass f lokal eine gute Funktion ist.*

3. *Diese Bedingungen werden von ein Paar extrem wichtigen Funktionenklassen erfüllt: die Menge aller reellen und komplexen stetigen Funktionen oder die Menge aller differenzierbaren Funktionen (auf $\mathbf{R}^n$).*

4. *Die Einschränkung definiert eine Abbildung $r_{V,U} : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$, so dass für irgendein U $\quad r_{U,U} = Id_{\mathcal{F}(U)}$ gilt und dass für alle $W \subset V \subset U \quad r_{W,U} = r_{W,V} r_{V,U}$ gilt.*

Zur Notation: Wir setzten $\mathcal{F}(U) = \Gamma(U, \mathcal{F})$. Die Elemente von $\Gamma(U, \mathcal{F})$ werden *Schnitte* von $\mathcal{F}$ über U genannt. Wenn $U = X$, nennen wir die dazugehörigen Schnitte *globale Schnitte*

Wir werden im Folgenden allgemeinere Garben benötigen als Garben von Funktionen. Die Einschränkung ist nun axiomatisch gegeben (4.3.2. 4.)

Definition 4.3.3. *Sei X ein topologischer Raum. Eine* Prägarbe *auf X ist gegeben durch folgende Informationen:*

- *Man braucht für jede offene Menge $U \subset X$ eine Menge $\mathcal{F}(U)$*
- *Man braucht eine einschränkende Abbildung $r_{V,U} : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ für alle offenen Mengen U und V, mit $V \subset U$*

so dass folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. *Wenn $W \subset V \subset U$ ist, so gilt $r_{W,U} = r_{W,V} r_{V,U}$*

2. *Es ist $r_{U,U} = Id_{\mathcal{F}(U)}$. Wir schreiben $r_{V,U}(f) = f|_V$.*

Wir nennen $\mathcal{F}(U)$ Garbe , wenn sie zusätzlich dem Verkleben (4.3.1. 2.) *genügt.*

Bemerkung 4.3.4.

1. *Die Prägarbe, welche jedem offenem $U \subset X$ die Menge $\mathcal{F} = \{f : U \to \mathbf{K} \mid f \;\text{ konstant}\}$ zuordnet, ist im Allgemeinem keine Garbe.*

2. *Es ist immer möglich eine gegebene Garbe als eine Garbe von Funktionen zu betrachten. Diese Bemerkung ermöglicht es uns, sich auf Garben von Funktionen zu beschränken.*

3. *Falls $\mathcal{F}$ eine Prägarbe auf X ist, können wir sie kanonisch in die Garbe $\mathcal{F}^+$ einbetten, die assoziierte Garbe von $\mathcal{F}$ genannt wird. Um dies zu tun, lokalisieren wir die Bedingung ein Element von $\mathcal{F}(U)$ zu sein folgendermaßen: Für beliebige offene Mengen U von X setzen wir*

$$\mathcal{F}^+(U) = \{f \ : \ U \to \mathbf{K} \mid \forall x \in U \exists V \text{ offen, mit } x \in V \subset U \text{ und } g \in \mathcal{F}(V), \text{ so dass } f|_V = g\} \ .$$

4. *Ist eine Garbe $\mathcal{F}$ auf X und eine offene Menge U in X gegeben, so ist die Garbe $\mathcal{F}|_U$ offensichtlich definiert: Falls V eine offene Menge in U ist, dann setzten wir $\mathcal{F}|_U(V) = \mathcal{F}(V)$.*

Beweis.
Zu 2.: Sei X ein topologischer Raum und $\mathcal{F}$ ein Garbe auf X. Wir betrachten ein $P \in X$, wobei U eine offene Menge ist, die P enthält. Ferner sei E_P die Menge aller Paare (U, s), wobei $s \in \mathcal{F}$. Die Äquivalenzklasse von (U, s) sei definiert als: $(U, s) \backsim (V, t) :\Leftrightarrow \ \exists W : \ P \in W \subset U \cap V$,so dass $s|_W = t|_W$. Die Äquivalenzklasse von (U, s) wird Keim genannt und geschrieben als s_P. Sei nun $\mathcal{F}_P$ die Menge aller Keime. Indem wir K als disjunkte Vereinigung der $\mathcal{F}_P$ für alle $P \in X$ setzten, können wir zeigen, dass es eine injektive Abbildung $i_U : \mathcal{F} \to \{U \to K\}$ gibt mit $i_U(s)(P) = s_P$. Die Abbildung ist kompatibel mit der Einschränkungsabbildung und daher ist $\mathcal{F}$ eine Untergarbe der Garbe von Funktionen von X nach K.

□

Zu 3.: Nach der Definition von $\mathcal{F}^+$ ist für alle $f_i \in \mathcal{F}^+(U_i)$ mit $f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j}$ klar, dass es eine gemeinsame Funktion $g \in \mathcal{F}(U_i \cap U_j)$ gibt die $V := U_i \cap U_j$. Es gibt nun auch ein eindeutiges $f \in \mathcal{F}^+(U)$ wegen der Definition von $\mathcal{F}^+(U)$. Somit ist das Verkleben wie in 4.3.1. 2. *gegeben.*

□

4 Beispiel - Strukturgarbe

Die wichtigsten Garben mit denen wir arbeiten werden, sind Garben von Ringen. Die Aussage, dass $\mathcal{F}$ eine Garbe von Ringen ist, bedeutet, dass die Räume $\mathcal{F}(U)$ kommutative Ringe sind und die Einschräkungen Ringhomomorphismen sind.

Definition 4.4.1. *Ein geringter Raum ist ein topologischer Raum X versehen mit einer Garbe von Ringen. Diese Garbe wird Strukturgarbe von X genannt und wird geschrieben als $\mathcal{O}_X$*

Diese Garbe ist eine Garbe von guten Funktionen auf X und wir haben dafür angenommen, dass die Summe oder das Produkt einer guten Funktion erneut eine gute Funktion ist.

Von nun an werden wir mit k einen algebraisch abgeschlossenen Körper bezeichnen. Sofern nicht anders definiert wird die Strukturgarbe von geringten Räumen eine Garbe von k-wertigen Funktionen sein und wir nehmen weiterhin an, dass dies eine Garbe von k-Algebren ist.

Definition 4.4.2. *Seien $(X, \mathcal{O}_X)$ und $(Y, \mathcal{O}_Y)$ zwei geringte Räume. Ein Morphismus von geringten Räumen ist gegeben durch eine stetige Abbildung $\phi : X \to Y$, die gute Funktionen in gute Funktionen durch Hintereinanderausführen überführt. Mit anderen Worten: für irgendeine Funktion $g : U \to k$, $g \in \Gamma(U, \mathcal{O}_Y)$, soll gelten, dass $g\phi \in \Gamma(\phi^{-1}U, \mathcal{O}_X)$.*

Bemerkung 4.4.3.

1. *Ist die zur Frage stehende Garbe z.B. eine Garbe von stetigen Funktionen ist, dann ist die Bedingung zum Verkleben äquivalent zur Anforderung, dass f eine stetige Funktion ist.*

2. *Für irgendeine offene Menge U von Y definieren wir einen Ringhomomorphismus*

$$\phi_U^* : \Gamma(U, \mathcal{O}_Y) \to \Gamma(\phi^{-1}U, \mathcal{O}_X)$$

indem wir $\phi_U^*(g) = g\phi$ setzten. Diese Homomorphismen sind kompatibel mit der Einschränkung. Mit anderen Worten genügen sie der Bedingung $r_{\phi^{-1}V, \phi^{-1}U}\phi_U^* = \phi_V^* r_{V,U}$.