Projektive algebraische Mengen

Rostislav Doganov, Stefan Lörwald

29. April 2009

1 Motivation

An dem affinen Raum stört uns die Möglichkeit, dass Geraden, Flächen etc. parallel zueinander liegen können und die Schnittmengen somit in diesem Fall leer sind. Im projektiven Raum treten keine solche Sonderfälle auf und deswegen bietet er sich zur Untersuchung von geometrischen Sachverhalten an.

2 Projektive Räume

Die Definition des projektiven Raums ist anschaulich. Man denke an die Schattenprojektion eines dreidimensionalen Objekts auf einer Wand. Alle Punkte vom Objekt, die auf einer Gerade zwischen der Lichtquelle und der Wand liegen, werden auf dem Schattenriss als einen Punkt dargestellt.

2.1 Definition des Projektiven Raums

Es sei k stets ein Körper und E ein k-Vektorraum mit $dim(E) = n + 1$.

Def. 2.1.1 : Für $x, y \in E \setminus \{0\}$ definieren wir die Äquivalenzrelation $\mathcal{R}$ wie folgt: $x\mathcal{R}y \iff \exists \lambda \in k^* : y = \lambda x$

Def. 2.1.2 : Der *projektive Raum* $\mathbf{P}(E)$ zu E definieren wir als die Quotientenmenge von $E \setminus \{0\}$ bezüglich $\mathcal{R}$. Im Fall $E = k^{n+1}$ schreibt man $\mathbf{P}(E) = \mathbf{P}^n(k)$ und nennt diesen Raum den *n-dimensionalen projektiven Standard-Raum.*

Sei p die kanonische Projektion $k^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbf{P}^n(k)$ und $x \in k^{n+1} \setminus \{0\}$, $x = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$. Dann nennt man $p(x) = \bar{x}$ *einen Punkt in* $\mathbf{P}^n(k)$ mit *homogenen Koordinaten* $(x_0 : x_1 : \ldots : x_n)$.

Bem. 2.1.3 : Sind $(x_0 : x_1 : \ldots : x_n)$ homogene Koordinaten von $\bar{x} \in \mathbf{P}^n(k)$, so auch $(\lambda x_0 : \lambda x_1 : \ldots : \lambda x_n)$ für beliebige $\lambda \in k^*$.

Als nächstes definieren wir die projektiven Unterräume von $\mathbf{P}^n(k)$. Sei dazu $F \subseteq E$ ein Unterraum von E mit $dim(F) = m + 1$ $(0 \leq m \leq n)$.

Def. 2.1.3 : Das Bild von $F \setminus \{0\}$ unter der Abbildung p bezeichnet man als *projektiven Unterraum* $\overline{F} \subseteq \mathbf{P}(E)$ der Dimension m.
Ist $m = 0, 1, 2, \ldots, n$, so nennt man $\overline{F}$ einen Punkt, Gerade, Fläche,..., projektive Hyperebene.

Jetzt können wir zeigen dass sich projektive Unterräume mit genügend großen Dimensionen immer schneiden.

Satz 2.1.4 : Seien $\overline{V}, \overline{W}$ zwei projektive Unterräume von $\mathbf{P}(E)$ der Dimension r bzw. s, sodass $r + s \geq n$. Dann ist $\overline{V} \cap \overline{W}$ ein projektiver Unterraum der Dimension $d \geq r + s - n \geq 0$. Insbesondere gilt $\overline{V} \cap \overline{W} \neq \varnothing$

Beweis : Da $\overline{V}, \overline{W} \subseteq \mathbf{P}(E)$ projektive Unterräume der Dimension r bzw. s sind, gilt $\overline{V} = p(V \setminus \{0\})$ und $\overline{W} = p(W \setminus \{0\})$, wobei V und W Unterräume von E mit Dimensionen $r+1$ und $s+1$ sind. Dann ist auch der Schnitt $V \cap W$ ein Unterraum von E und es gilt $dim(V \cap W) = dim(V) + dim(W) - dim(V + W) = r + 1 + s + 1 - dim(V + W) \geq r + 1 + s + 1 - (n + 1) = r + s - n + 1$. Daraus folgt, dass $p(V \cap W) = \overline{V \cap W}$ ein projektiver Unterraum von $\mathbf{P}(E)$ mit Dimension $d \geq r + s - n$ ist. Es ist ferner leicht zu sehen dass $\overline{V \cap W} = \overline{V} \cap \overline{W}$, denn: $\overline{x} \in \overline{V} \cap \overline{W} \Leftrightarrow x \in V \wedge x \in W \Leftrightarrow x \in V \cap W \Leftrightarrow \overline{x} \in \overline{V} \cap \overline{W}$.

□

3 Zusammenhang zwischen affinen und projektiven Räumen

Die homogenen Koordinaten von Punkten $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbf{P}^n(k)$ sind nicht eindeutig. Für $\bar{x} = (x_0 : x_1 : \ldots : x_n)$ können wir jedoch immer ein $x_i \neq 0$ finden (o.B.d.A. $x_0 \neq 0$), sodass nach Division von den anderen n homogenen Koordinaten mit x_0 wir $\bar{x} = (1 : \frac{x_1}{x_0} : \ldots : \frac{x_n}{x_0})$ erhalten. Jetzt ist ersichtlich dass die Multiplikation mit einem Skalar keine Rolle mehr spielt. Auf diese Weise können wir k^n in $\mathbf{P}^n(k)$ einbetten.

3.1 Allgemeiner Zusammenhang

Satz 3.1.1 : Sei k ein Körper, $\mathbf{P}^n(k)$ der n-dimensionale projektive Standard-Raum und $i \in \{0, ..., n\}$. Dann gibt es eine injektive Abbildung $\varphi : k^n \to \mathbf{P}^n(k)$, $(x_1, ..., x_n) \mapsto (x_1 : ... : x_i : 1 : x_{i+1} : ... : x_n)$.

Beweis : Wegen der Eins ist $(x_1 : ... : x_i : 1 : x_{i+1} : ... : x_n) \neq 0$ und die Abbildung ist wohldefiniert.

Seien $x, x' \in k^n$ mit $\varphi(x) = \varphi(x')$. Daraus folgt $(x_1 : ... : x_i : 1 : x_{i+1} : ... : x_n) = \lambda(x'_1 : ... : x'_i : 1 : x'_{i+1} : ... : x'_n)$, $\lambda \in k \setminus \{0\}$ also $\lambda = 1$ (wegen der i-ten homogenen Koordinate) und damit $(x_1, ..., x_n) = (x'_1, ..., x'_n)$

Bem. 3.1.2 : Die Abbildung φ erzeugt eine natürliche Bijektion zwischen k^n und $\overline{U} = \{(x_0 : ... : x_n) \in \mathbf{P}^n(k) | x_i \neq 0\}$. Ferner gilt $\mathbf{P}^n(k) = \overline{U} \cup \overline{H}$ mit $\overline{H} = \{x_0 : ... : x_n) \in \mathbf{P}^n(k) | x_i = 0\}$, was isomorph zu $\mathbf{P}^{n-1}$ ist. Also können wir an den n-dimensionalen projektiven Raum als $\mathbf{P}^n(k) \simeq k^n \cup \mathbf{P}^{n-1}$ denken, in dem Sinne dass es eine Bijektion zwischen den beiden gibt.

Beispiel : Von der oberen Bemerkung ergibt sich induktiv:
für $n = 0$ besteht $\mathbf{P}^0(k)$ nur aus einem Punkt,
für $n = 1$ ist $\mathbf{P}^1(k)$ eine affine Gerade vereinigt mit einem *„unendlich fernen Punkt"*,
für $n = 2$ ist $\mathbf{P}^2(k)$ eine affine Ebene vereinigt mit $\mathbf{P}^1(k)$,
usw...
Die Hyperebene mit der Gleichung $x_i = 0$ nennt man auch *„eine unendlich ferne Hyperebene"*.

3.2 Topologie in dem projektiven Raum

Der Quotientenraum $X/\sim$ eines topologischen Raums X hat eine natürliche Topologie, die Quotiententopologie.

Def. 3.2.1 : Sei X ein topologischer Raum, $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X und $p : X \to X/\sim$ die kanonische Projektion. Eine Teilmenge $U \subseteq X/\sim$ heißt offen in der Quotiententopologie, wenn $p^{-1}(U)$ offen in X ist.

Bem. 3.2.2 : Die Quotiententopologie ist die feinste Topologie, für die p noch stetig ist.

Wir können jetzt zeigen, dass in dem Fall $k = \mathbb{R}$ (versehen mir der Standard-Topologie) der n-dimensionale projektive Raum $\mathbf{P}^n(\mathbb{R})$ kompakt und zusammenhängend ist:

Sei $S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : ||x|| = 1\}$ die n-dimensionale Sphäre. Dann ist die Projektion $p : \mathbb{R}^{n+1} \supset S^n \to \mathbf{P}^n(\mathbb{R})$ surjektiv, da $\mathbf{P}^n(\mathbb{R}) \ni \overline{x} = (x_0 : ... : x_n) = \frac{1}{||x||}(x_0 : ... : x_n)$. Also ist $p^{-1}(\mathbf{P}^n(\mathbb{R})) = S^n$ und da S^n kompakt und zusammenhängend in $\mathbb{R}^{n+1}$ ist, gilt dies, wegen der Stetigkeit von p, auch für $\mathbf{P}^n(\mathbb{R})$. Analoge Überlegungen gelten auch im Fall $k = \mathbb{C}$.

4 Homographien

Die allgemeine lineare Gruppe $GL(E)$ operiert auf E und für $u \in GL(E)$ $x, y \in E$ gilt $x = \lambda y \Rightarrow u(x) = \lambda u(y)$. Deswegen induzieren $u \in GL(E)$ Bijektionen $\bar{u}$

auf $\mathbf{P}(E)$

Def. 4.1 : Eine Bijektion auf $\mathbf{P}(E)$, die von $u \in GL(E)$ induziert wird, heißt eine *Homographie.*

Bem. 4.2 : Die Homothetien k^* (d.h. die skalare Transformationen $u = \lambda id_E$, $\lambda \in k^*$) operieren trivial auf $\mathbf{P}(E)$. Deswegen definiert man die *projektive lineare Gruppe* $PGL(E)$ als die Faktorgruppe $PGL(E) = GL(E)/k^*$.

5 Projektive algebraische Mengen

Die Definition der projektiven algebraischen Mengen ist der Theorie der affinen algebraischen Mengen ähnlich: Es sei k ein *unendlicher* Körper und n eine natürliche Zahl. Es sei R der Polynomring $k[X_0, \ldots, X_n]$ und $\mathbf{P}^n(k)$ der n-dimensionale projektive Standardraum mit den Koordinaten $(x_0 : \ldots : x_n)$. Es sei $x_n = 0$ die unendlich ferne Hyperebene.
Zunächst muss man den Begriff der Nullstelle in den projektiven Raum übertragen:

5.1 Nullstellen & Homogene Polynome

Def. 5.1.1 : Sei $F \in R = k[X_0, \ldots, X_n]$ und $\overline{x} \in \mathbf{P}^n(k)$. $\overline{x}$ heisst Nullstelle von F, falls $F(x) = 0$ für jedes System von homogenen Koordinaten x von $\overline{x}$ gilt (d.h.: $F(\lambda x) = 0 \ \forall \lambda \in k \setminus \{0\}$).

Def. 5.1.2 : $F \in R$ heisst *homogenes Polynom vom Grad* g, falls $F(\lambda x) = \lambda^g F(x)$.

Satz 5.1.3 :
(i) Sei $x \in \mathbf{P}^n(k)$. Ist $F \in R$ ein homogenes Polynom, so genügt es für ein beliebiges System von homogenen Koordinaten die Gleichung $F(x) = 0$ nachzuweisen, um zu zeigen, dass $F(x) = 0$ im Sinne von Def. 5.1.1.
(ii) Ist $R \ni F = F_0 + \ldots + F_r$ wobei F_i homogene Polynome vom Grad i sind, so gilt $F(x) = 0$ genau dann, wenn $F_i(x) = 0$ für alle i.

Beweis :
(i) Ist $F \in R$ ein homogenes Polynom von beliebigen Grad g, so gilt für beliebiges x, dass $F(\lambda x) = \lambda^g F(x) = 0$ für alle $\lambda \in k \setminus \{0\}$.
(ii) „$\Rightarrow$" Gilt $F(\lambda x) = \lambda^0 F_0(x) + \ldots + \lambda^r F_r(x) = 0$ für alle $\lambda \in k \setminus \{0\}$, dann gilt, da k ein unendlicher Körper ist, dass alle $F_i(x) = 0$ sein müssen.
„$\Leftarrow$": Gilt $F_i(x) = 0$ für alle i, so gilt offensichtlich $F(\lambda x) = \lambda^0 F_0(x) + \ldots + \lambda^r F_r(x) = 0$ für alle $\lambda \in k \setminus \{0\}$.

$\square$

5.2 Projektive algebraischen Mengen und deren Eigenschaften

Def. 5.2.1 : Sei S eine Teilmenge von $R = k[X_0, \dots, X_n]$. Man bezeichnet $V_p(S) = \{x \in \mathbf{P}^n(k) \mid \forall F \in S : \;\; F(x) = 0\}$ als die von S erzeugte *projektive algebraische Menge*. Gibt es keine Verwechslungsgefahr mit der affinen algebraischen Menge, so wird $V_p(S)$ auch mit $V(S)$ bezeichnet.

Bem. 5.2.2 : Analog zu den affinen algebraischen Mengen gilt $V_p(S) = V_p(\langle S \rangle)$ mit $\langle S \rangle$ dem von S erzeugten Ideal.

Bem. 5.2.3 : Da R noethersch ist, ist $\langle S \rangle$ endlich erzeugt, also S endlich. Wegen Satz 5.1.3 ($\forall F \in S$ gilt: $F = \sum_{i=1}^{d} F_i$mit F_i homogen) kann man annehmen, dass S eine endliche Menge homogener Polynome ist.

Bsp. 5.2.4 : $S = \{0\} \Rightarrow V_p(S) = \mathbf{P}^n(k)$.

Bsp. 5.2.5 : $S = \{F \in R \mid F \text{ hat \; konstanten \; Term } 0\} \Rightarrow V_p(S) = \emptyset$. S heisst *irrelevantes Ideal* und wird auch mit R^+ bezeichnet.
Beweis : Es gilt $S = \langle X_0, \dots, X_n \rangle$ und deshalb $V_p(S) = V_p(X_0) \cap \dots \cap V_p(X_n) = \emptyset$, da in $\mathbf{P}^n(k)$ die homogenen Koordinaten eines Punktes nicht alle 0 sein können. Anmerkung: Dies gilt unabhängig davon, ob k algebraisch abgeschlossen ist, oder nicht.

Bem. 5.2.6 : Punkte sind projektive algebraische Mengen: Sei $x = (x_0, \dots, x_n)$ und o.B.d.A. $x_0 \neq 0$, also o.B.d.A. $x_0 = 1$.
Dann gilt $\{x\} = V_p(X_1 - x_1 X_0, \dots, X_n - x_n X_0)$.

Bem. 5.2.7 : Analog zu den affinen algebraischen Mengen gilt ausserdem:
(i) Die Abbildung V_p ist monoton fallend: $S \subseteq T \Rightarrow V(T) \subseteq V(S)$.
(ii) Beliebige Schnitte und endliche Vereinigungen projektiver algebraischer Mengen sind wieder projektive algebraische Mengen.
(iii) Die projektiven algebraischen Mengen sind die abgeschlossenen Mengen der Zariskitopologie auf dem $\mathbf{P}^n(k)$. Die Topologie auf Teilmengen X des $\mathbf{P}^n(k)$ ist einfach die Zariskitopologie eingeschränkt auf X.
(iv) Sei $V \subseteq \mathbf{P}^n(k)$ eine projektive algebraische Menge. Es sei der *„Kegel von V"* $C(V)$ das Urbild von V unter der Projektion p: $k^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbf{P}^n(k)$ vereinigt mit dem Ursprung von k^{n+1}. Ist I ein von homogenen Polynomen erzeugtes Ideal (genannt „homogenes Ideal")[1] mit $I \neq R = k[X_0, \dots X_n]$ und $V = V_p(I)$, dann ist $C(V) = V(I) \subset k^{n+1}$ im affinen Sinn. Ist $I = R$, dann ist $C(V(I)) = V(R^+) = \{0\}$, denn $R^+ \subseteq R \Rightarrow V_p(R) \subseteq V_p(R^+) = \emptyset$ und im Affinen: $V(R^+) = \{0\}$.

[1]ausführliche Einführung des Begriffs im nächsten Vortrag.

6 Ideal einer projektiven algebraischen Menge

Def. 6.1 : Sei $V \subseteq \mathbf{P}^n(k)$ eine Teilmenge des projektiven Raums. Es sei $I_p(V) = \{F \in R \mid \forall x \in V : \ F(x) = 0\}$ das *Ideal von V.*

Bem. 6.2 :
(i) $I_p(V)$ ist ein von homogenen Polynomen erzeugtes Ideal.
(ii) Die Abbildung I_p ist monoton fallend: Ist $V \subseteq W$ dann gilt $I_p(W) \subseteq I_p(V)$.
(iii) Ist V eine projektive algebraische Menge, dann ist $V_p(I_p(V)) = V$. Ist I ein Ideal, dann gilt $I \subseteq I_p(V_p(I))$.
(iv) $I_p(\mathbf{P}^n(k)) = (0)$ und $I(\emptyset) = k[X_0, \ldots, X_n]$.

Beweis : (i) folgt direkt aus der Definition. $(ii) - (iv)$ analog zur Eigenschaft der affinen algebraischen Mengen. (Anm.: k ist unendlich seit Einführung der projektiven algebraischen Mengen)

Bem. 6.3 : Der Begriff der Irreduzibilität einer projektiven algebraischen Menge wird analog zur Irreduzibilität affiner algebraischer Mengen eingeführt.

Satz 6.4 (**Projektiver Nullstellensatz**) : Sei k algebraisch abgeschlossener Körper, I ein von homogenen Polynomen des Ringes $k[X_0, \ldots, X_n]$ erzeugtes Ideal und V die Menge $V_p(I)$. Dann gilt:

$$(i) \quad \begin{aligned} V_p(I) = \emptyset \quad &\Longleftrightarrow \exists N \ sodass \ (X_0, \ldots, X_n)^N \subset I \\ &\Longleftrightarrow (X_0, \ldots, X_n) = R^+ \subset \sqrt{I} = rac(I) \end{aligned}$$

$$(ii) \ Falls \ V_p(I) \neq \emptyset, \ dann \ ist \ I_p(V_p(I)) = \sqrt{I}$$

Beweis :
(i) Die zweite Äquivalenz ist trivial, da sie direkt aus der Definition des Radikals folgt. Ist $I = R$, so ist $V = V_p(I) = \emptyset$ und die Aussage ist trivial. Sei also $I \neq R$. Man wendet nun den affinen Nullstellensatz auf den Kegel $C(V) = V(I)$ an. Ist $V = V_p(I) = \emptyset$ bedeutet das, dass $C(V) = \{0\} \subset k^{n+1}$. Der affine Nullstellensatz besagt $I(C(V_p(I))) = rac(I)$, also z.z. $rac(I) = I(\{0\}) \overset{!}{=} R^+$, denn daraus folgt sofort die Behauptung. Es gilt $I(\{0\}) = \{F \in R \mid F(0) = 0\} = \{F \in R \mid F \text{ hat konstanten Term } 0\} = R^+$.
(ii) Da $V = V_p(I)$ nichtleer ist, ist $I_p(V) = I(C(V))$. Nach dem affinen Nullstellensatz ist aber genau dieses Ideal gleich dem Radikal von I, also gilt $I_p(V_p(I)) = I(C(V)) = \sqrt{I}$

□

Bem. 6.5 : Ist I ein von homogenen Polynomen erzeugtes Ideal, so ist es auch $\sqrt{I}$. Folglich existiert eine Bijektion zwischen nicht-leeren projektiven algebraischen Mengen in $\mathbf{P}^n(k)$ und homogenen Idealen in R, die das irrelevante Ideal R^+ nicht enthalten.