Algebra = Geometrie?

Angela Jäschke, Patrick Engels

09.04.2009

1 Der Anfang eines algebro-geometrischen Wörterbuchs

Anwendungen des Nullstellensatzes: Ein algebro-geometrisches Wörterbuch Sei V eine affine algebraische Menge, $I(V)$ das zugehörige Ideal und $\Gamma(V) \cong k[X_1, ..., X_n]/I(V)$ der affine Koordinatenring, welcher eine reduzierte K-Algebra endlichen Typs ist.

- a) Der Fall $V = k^n$. Die folgende Proposition ist eine direkte Folgerung aus dem Nullstellensatz und 3.2:

  (3.2: V irreduzibel $\Leftrightarrow$ $I(V)$ prim $\Leftrightarrow$ $\Gamma(V)$ nullteilerfrei)

Proposition 1.1
Es gibt eine inklusionsumkehrende Bijektion $W \mapsto I(W)$ zwischen den radikalen Idealen in $k[X_1, ..., X_n]$ und den affinen algebraischen Mengen im k^n. Die Umkehrabbildung ist $I \mapsto V(I)$. Zudem gelten die Äquivalenzen:

1. W ist irreduzibel $\Leftrightarrow$ $I(W)$ ist prim $\Leftrightarrow$ $\Gamma(W)$ ist nullteilerfrei

2. W ist ein Punkt $\overset{a)}{\Leftrightarrow}$ $I(W)$ ist maximal $\overset{b)}{\Leftrightarrow}$ $\Gamma(W)$=k

Beweis :

1. Ist gerade Theorem 3.2

2. - a)
  "$\Rightarrow$": W ist Punkt $\Rightarrow \nexists\, V \subset W \Rightarrow \nexists\, V$: $I(W) \subset I(V) \Rightarrow I(W)$ maximal.
  "$\Leftarrow$": Sei $I(W)$ maximal $\Rightarrow I(W) \subset k[X_1, ..., X_n] \Rightarrow W(I(W)) \neq \emptyset$
  Annahme: $\exists\, V$: $V \subset W \Rightarrow I(W) \subset I(V)$ **Widerspruch**, da $I(W)$ maximal.

   - b) Wir wissen aus der Algebra 1 - Vorlesung, dass ein Ring modulo einem maximalen Ideal ein Körper ist, und $\Gamma(W) \cong k[X_1, ..., X_n]/I(W)$

Eine weitere Anwendung diese Wörterbuchs wäre:

Proposition 1.2
Es gilt: V ist endlich $\Leftrightarrow \Gamma(V)$ ist ein endlich-dimensionaler k-Vektorraum. (Man sagt dann auch, $\Gamma(V)$ ist eine endliche k-Algebra.)

Beweis :
V endlich $\Leftrightarrow V = \{u_1, ..., u_r\}$

- "$\Rightarrow$": Betrachte φ: $k[X_1, ..., X_n] \to k^n$, $F \mapsto (F(u_1), ..., F(u_r))$.
  Ker $\varphi = I(V) \Rightarrow \Gamma(V) \cong k[X_1, ..., X_n]/I(V)$ kann in den k^r eingebettet werden $\Rightarrow$ $\Gamma(V)$ ist endlich-dimensional.

- "$\Leftarrow$": Sei $\Gamma(V)$ endlich-dimensionaler k-Vektorraum, τ: $k[X_1, ..., X_n] \to \Gamma(V)$.
  Sei $\overline{X_i}$ das Bild von X_i in $\Gamma(V)$.
  Da $\Gamma(V)$ endlich-dimensional $\Rightarrow \exists\, s$: 1, $\overline{X_i}$, $\overline{X_i}^2$,..., $\overline{X_i}^s$ linear abhängig und
  $a_s\overline{X_i}^s + ... + a_1\overline{X_i} + a_0 = 0$ ($a_s \neq 0$, $a_k = 0\ \forall\ k > s$)
  Sei $u = (x_1, ..., x_n)$ ein beliebiger Punkt aus V. Das Polynom $a_s X_i{}^s + ... + a_1 X_i + a_0$ hat endlich viele Lösungen. Analog für $X_1, ..., X_n \Rightarrow$ Es gibt insgesamt also auch nur endlich viele Lösungen für $u \Rightarrow V$ ist endlich.

- b) Der allgemeine Fall:
  Sei V eine beliebige affine algebraische Menge, $W \subset V \Rightarrow I(V) \subset I(W)$.
  Betrachte die kanonische Projektion φ: $k[X_1, ..., X_n] \to k[X_1, ..., X_n]/I(V) \cong \Gamma(V)$, $f \mapsto f/I$, bzw. das Ideal $I_V(W)$ des Rings $\Gamma(V)$, welches durch $\varphi(I(W))$ induziert wird. $I_V(W)$ ist gerade die Menge der Funktionen $f \in \Gamma(V)$, die auf W verschwinden.
  Es gilt: $\Gamma(V)/I_V(W) \cong \Gamma(W) \Rightarrow I_V(W)$ ist radikal (wenn $I(W)$ radikal).
  (Starker Nullstellensatz: $I(W)$ radikal, $I(W) = \varphi^{-1}(I_V(W)) \Rightarrow I_V(W)$ radikal.)

Wenn I ein Ideal in $\Gamma(V)$ ist, können wir $V(I)$ entweder wie bisher definieren als $V(I)=\{x \in V \mid \forall\ f \in I\colon f(x)=0\ \}$, oder auch äquivalent als $V(I)=V(\varphi^{-1}(I))$.

Ein Satz aus der Algebra:
Sei A ein Ring, I ein Ideal und ρ: A → A/I die kanonische Projektion. Die Ideale von A/I stehen bijektiv mit den Idealen von A, die I enthalten, über ρ bzw. ρ^{-1} in Relation. Zudem bleiben die Eigenschaften „prim“ bzw. „maximal“ erhalten. (*)

Proposition 1.3
Es gibt zueinander inverse inklusionsumkehrende Bijektionen $W \to I_V(W)$ und $I \to V(I)$ zwischen den in V enthaltenen affinen algebraischen Teilmengen und den radikalen Idealen von $\Gamma(V)$. Es gelten folgende Äquivalenzrelationen:

- a) W ist irreduzibel $\Leftrightarrow$ $I_V(W)$ ist prim $\Leftrightarrow$ $\Gamma(W)$ ist nullteilerfrei
- b) W ist ein Punkt $\Leftrightarrow$ $I_V(W)$ ist maximal $\Leftrightarrow$ $\Gamma(W)=k$
- c) W ist irreduzible Komponente von V $\Leftrightarrow$ $I_V(W)$ ist minimales Primideal von $\Gamma(W)$

Beweis :

- a) Sei $I_V(W)$ prim $\Rightarrow$ $\Gamma(W)$ ist nullteilerfrei (da $\Gamma(V)/I_V(W)$ nullteilerfrei und $\Gamma(V)/I_V(W) \cong \Gamma(W)$) $\Rightarrow$ $I(W)$ prim $\Rightarrow$ W irreduzibel $\Rightarrow$ $I(W)$ prim $\overset{(*)}{\Rightarrow}$ $I_V(W)$ prim.
- b) $1 \Leftrightarrow 3$ ist Proposition 1.1.2.
  $1 \Leftrightarrow 2$: Sei W Punkt $\Leftrightarrow$ $I(W)$ ist maximal, mit $W \subset V \overset{*}{\Leftrightarrow} I_V(W)$ maximal in $\Gamma(V)$.
- c) Sei W irreduzible Komponente.
  Annahme: $\exists\ y \subset \Gamma(V)$ mit $y \subset I_V(W) \Rightarrow W(I_V(W))=W \subsetneq V(y)$.
  Nun gibt es zwei Möglichkeiten:
  1. $V(y)=W \in \{V_i\}$
  2. $W \subset V(y)$
  Zu 2.: $V = \bigcup_{i\ endl.} V_i \Leftrightarrow V(y)=\bigcup_{i\ endl.}(V(y) \bigcap V_i)$,
  $(V(y) \bigcap V_i)$ ist abgeschlossen, da $V(y)$ und V_i abgeschlossen.
  $V(y) \neq V_i\ \forall\ i \Rightarrow V(y)$ ist zerlegbar $\overset{1.1}{\Rightarrow}$ y nicht prim $\Rightarrow$ **Widerspruch**.
  Es gilt: (a) Primideal $\Rightarrow$ (a) Radikalideal (Beweis: $a^p \in (a) \overset{(a) prim}{\Rightarrow} a \in (a)$ oder $a^{p-1} \in (a) \to$ induktiv).

Also: $V(y){=}W \Rightarrow I(V(y)){=}I(W)\ ({=}I(W(I_V(W))))\ \overset{Primideale}{\Rightarrow}\ (y){=}I_V(W)$
$\Rightarrow$ **Widerspruch**.

Betrachte den K-Algebrenhomomorphismus $\chi_X : \Gamma(V) \to k,\ f \mapsto f(x)$, dessen Kern gerade das maximale Ideal $m_x = I(\{x\}) = \{f \in \Gamma(V) \mid f(x){=}0\ \}$ ist. Diese Homomorphismen heißen **Charaktere** von $\Gamma(V)$.

Proposition 1.4
Die Punkte von V stehen bijektiv mit den maximalen Idealen bzw. Charakteren von $\Gamma(V)$ in Verbindung.

Beweis :
Dass man jedem x eindeutig einen Charakter zuordnen kann, geht aus der Definition hervor. Umgekehrt wissen wir, dass Ker χ_X ein maximales Ideal ist, und mit 1.1 sehen wir, dass x ein Punkt ist.
Dass die maximalen Ideale von $\Gamma(V)$ und die Punkte von V in bijektiver Verbindung stehen, beweisen wir so:
x Punkt, $x \subset V \overset{1.1}{\Leftrightarrow} I(\{x\})$ maximal und $I(V) \subset I(\{x\}) \overset{(*)}{\Leftrightarrow} I_V(x)$ ist maximal.

Beispiel 1.5
Sei $V = V(XY) \subset k^2$. Die minimalen Primideale von $\Gamma(V)$ sind die Bilder der Ideale (X) und (Y).

Proposition 1.6
Betrachte $F \in k[X_1, ..., X_n]$, $F = {F_1}^{a_1} \cdots {F_r}^{a_r}$, wobei die F_i irreduzibel und nicht assoziiert sind mit $a_i \in \mathbf{N}_{>0}$. Dann gilt:

1. $I(V(F)) = (F_1 \cdots F_r)$. Insbesondere gilt: F irreduzibel $\Leftrightarrow I(V(F)) = (F)$.
2. Die Zerlegung von $V(F)$ in irreduzible Komponenten ist gegeben durch $V(F) = V(F_1) \cup \cdots \cup V(F_r)$. Insbesondere gilt: F irreduzibel $\Leftrightarrow V(F)$ auch irreduzibel.

Beweis :

1. Z.z. ist also: $(F_1 \cdots F_r) = \mathrm{rac}(F)$.

„$\subseteq$“: Sei $r = \max \{a_1,\cdots,a_r \}$, $f \in (F_1\cdots F_r)$.
Sei $f = F_{1k}\cdots F_{mk}$, $ik \in \{1,\cdots,r\}$.
Sei oBdA $r = a_{1k}$
$\Rightarrow f^r = ({F_{1k}}^{a_{1k}}{F_{2k}}^{a_{2k}}\cdots {F_{mk}}^{a_{mk}}){F_{2k}}^{a_{1k}-a_{2k}}\cdots {F_{mk}}^{a_{1k}-a_{mk}} \in ({F_1}^{a_1}\cdots {F_r}^{a_r})$.
$\Rightarrow (F_1\cdots F_r) \subseteq \mathrm{rac}(F)$.

„$\supseteq$“: $f \in \mathrm{rac}(F) \Rightarrow \exists\, n \in \mathbf{N}$: $f^n \in (F) \Rightarrow \exists\, G \in k[X_1,...,X_n]$: $FG = f^n$
Da F_i irreduzibel $\Rightarrow F_i$ Primelemente in $k[X_1,...,X_n]$. Da $FG = f^n \Rightarrow F_i | f^n$
$\overset{Prim}{\Rightarrow} F_i|f \vee F_i|f^{n-1} \overset{induktiv}{\Rightarrow} F_i|f \overset{\forall i}{\Longrightarrow} \prod_i F_i \mid f \Rightarrow \exists\, G' \in k[X_1,...,X_n]$: $G'\prod_i F_i = f$
$\overset{\prod_i F_i \in (F_1\cdots F_r)}{\Longrightarrow} f \in (F_1\cdots F_r)$.
$\Rightarrow (F_1\cdots F_r) \supseteq \mathrm{rac}(F)$.

$\Rightarrow (F_1\cdots F_r) = \mathrm{rac}(F)$.

2. F_i irreduzibel $\Leftrightarrow (F_i)$ minimales Primideal in $k[X_1,...,X_n]$. (Mit $(F) \subseteq (F_i)$ gilt:) $\overset{(*)}{\Leftrightarrow} \rho(F_i) = (F_i)$ ist in $k[X_1,...,X_n]/(F)$ prim $\overset{(1.3)}{\Leftrightarrow} V(F_i)$ ist irreduzible Komponente von $V(F)$.

Jede beliebige algebraische Menge V besitzt offene Standardmengen, die eine Basis ihrer Zariski-Topologie bilden (vgl. auch Vortrag 1).

Definition 1.7
Sei V eine affine algebraische Menge und sei $f \in \Gamma(V) \not\equiv 0$. Die Menge $D_V(f) = V\text{-}V(f) = \{x \in V \mid f(x) \neq 0\}$ heißt offene Standardmenge von V. Jede offene Menge von V ist eine endliche Vereinigung von offenen Standardmengen.

2 Ein erster Schritt in Richtung Bézout

Satz von Bézout $\leftarrow$ *darauf wollen wir später hinaus*
Seien C und C' zwei projektive ebene Kurven vom Grad d und d' über einem algebraisch abgeschlossenem Körper, C und C' ohne gemeinsame Komponenten. Dann ist die Anzahl der Schnittpunkte von C und C' (mit Vielfachheiten gezählt) dd'.

Wir zeigen nun, dass die Schnittmenge von zwei ebenen Kurven ohne gemeinsame Komponenten endlich ist.

Sei in diesem Abschnitt k ein beliebiger Körper.

Theorem 2.1
Seien F, $G \in k[X,Y]$ teilerfremde Polynome $\not\equiv 0$.
Dann ist $V(F) \cap V(G)$ endlich.

Der Beweis wird folgendes Theorem implizieren, welches man mit 1.2 vergleichen kann:

Theorem 2.2
Mit den Voraussetzungen von (2.1) ist der Ring $k[X,Y]/(F,G)$ ein endlich-dimensionaler k-Vektorraum.

Zunächst beweisen wir folgendes Lemma:

Lemma 2.3
Mit den Voraussetzungen von (2.1) gibt es ein Polynom $d \in k[X]$, $d \not\equiv 0$, und Polynome A, $B \in k[X,Y]$, so dass $d = AF + BG$ (dh. $d \in (F,G)$).

Beweis : (2.3)
Hierzu brauchen wir einen Satz aus der Algebra: Bei Hauptidealringen R gilt: x_1, $x_2 \in R$ teilerfremd $\Leftrightarrow \exists\ a_1$, $a_2 \in R$: $1 = a_1x_1 + a_2x_2$.

Seien F, $G \in k[X,Y]$. Betrachte sie als Elemente des Hauptidealrings $K(X)[Y]$, also als Polynome in der Variablen Y mit Koeffizienten der Form $\frac{a(x)}{b(x)}$, $b(x) \neq 0$. Mit obigem Satz $\Rightarrow \exists\ A'$, $B' \in K(X)[Y]$: $1 = A'F + B'G$. Wir eliminieren die Nenner von A' und B' durch Multiplikation mit den Nennern $d_{A'}$ und $d_{B'} \in k[X]$.
$\Rightarrow d = AF + BG$ mit $d = d_{A'}d_{B'}$, $A = A'd_{A'}d_{B'}$, $B = B'd_{A'}d_{B'}$.

Beweis : (2.1)
Sei (x,y) beliebiger Punkt aus $V(F) \cap V(G) \overset{2.3}{\Rightarrow} d(x) = 0$.
$d(x)$ ist ein Polynom in einer Variablen $\Rightarrow$ Es gibt nur endlich viele Werte, die x annehmen kann. Analog für $y \Rightarrow$ die Schnittmenge ist endlich.

Beweis : (2.2)
Sei $d \in k[X]$ wie oben, $d' \in k[Y]$ analog. Es gilt offensichtlich $(d,d') \subseteq (F,G)$.
Betrachte $k[X,Y]/(d,d')$. Es treten nur endlich viele Potenzen von X bzw. Y auf, nämlich

die vom Grad $< d$ bzw. d'.
$\Rightarrow k[X,Y]/(d,d')$ endlich-dimensional, und da $(d,d') \subseteq (F,G) \Rightarrow k[X,Y]/(F,G)$ ist endlich-dimensionaler k-Vektorraum.

Bemerkung 2.4
Ein Beispiel für ein Polynom, das als $d(x)$ benutzt werden kann, ist die Resultante von F und G (als Polynome in der Variablen Y aufgefasst).

3 Morphismen oder Abbildungen zwischen affinen algebraischen Mengen

Im Folgenden sei k ein unendlicher Körper

Die Art der Abbildung bestimmt dabei die Theorie, die wir erhalten. Da wir algebraische Geometrie betreiben wollen, liegt folgendes nahe:

Definition 3.1
Sei $V \subset k^n$ und $W \subset k^m$ und $\varphi : V \to W$ wobei wir φ als $\varphi = (\varphi_1, ..., \varphi_m)$ schreiben können
Wir nennen φ einen Morphismus (bzw regulär) falls die φ_i polynomiale Funktionen sind.

Bemerkungen

- Die Menge der regulären Abbildungen von V nach W bezeichnen wir mit $Reg(V, W)$
- Die Funktionen φ_i sind Elemente aus $\Gamma(V)$
- Reguläre Abbildungen sind stetig bzgl. der Zariski-Topologie
  Beweis:
  Sei $A \subseteq W$ abgeschlossen $\Leftrightarrow A$ ist Nullstellenmenge eines Ideals $I(A) \supseteq I(W)$.
  Sei $v \in \varphi^{-1}(A)$ und $f \in I(A) \Rightarrow (f \circ \varphi)(v) = f(\varphi(v)) = 0$

Beispiele

1. $\varphi : k^n \to k^m$ $(n \leq m)$
   $(x_1, ..., x_n) \mapsto (x_1, ..., x_n)$
   Wobei ein Element aus k^n auf die ersten m Einträge abgebildet wird.
   Die Abbildung ist natürlich surjektiv aber nicht injektiv falls $n > m$
2. $V = V(Y - X^2) \subset k^2$
   $\varphi : V \to k$

$\varphi(x, y) \mapsto y$
Die Abbildung ist ein Isomorphismus, da durch
$\varphi^{-1} : k \to V$
$t \mapsto (t, t^2)$
eine Umkehrabbildung gegeben ist.

3. $V = V(Y^2 - X^3) \subset k^2$
   $\varphi : k \to V$
   $t \mapsto (t^2, t^3)$
   ist **kein** Isomorphismus, da es keine Umkehrabbildung in $Reg(V, k)$ gibt

Nun wollen wir den gewonnenen Abbildungsbegriff auf die zu V und W gehörigen affinen Koordinatenringe übertragen

Definition 3.2
Sei $\varphi : V \to W$ ein Morphismus und $f \in \Gamma(V)$.
Wir setzen $\varphi^*(f) = f \circ \varphi$ für jedes f. Wir erhalten mit φ^* einen Morphismus von k-Algebren
Beachte:
$f \in \Gamma(w) \Rightarrow f : W \to k, \varphi : V \to W$
$\Rightarrow f \circ \varphi : V \to k \in \Gamma(V)$ da φ und f polynomiale Ausdrücke sind
Wir können nun dem Tupel (V, φ) das Tupel $(\Gamma(V), \varphi^*)$ zuordnen, wobei zu beachten ist, dass φ eine Abbildung von V ist und φ^* eine Abbildung nach $\Gamma(V)$ ist. Es gilt
$(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$
Berechnung von φ^*:
$V \subset k^n$ und $W \subset k^m$ und $\varphi : V \to W$ $\varphi = (\varphi_1, ..., \varphi_m), \varphi_i \in \Gamma(V)$
Wir definieren die i-te Koordinatenfunktion $\eta_i : W \to k, (x_1, ..., x_m) \mapsto x_i$, die gerade das Bild von Y_i in $\Gamma(W)$ ist.
$\Rightarrow \varphi^*(\eta_i) = \eta(\varphi_1, ..., \varphi_m) = \varphi_i$
$\Rightarrow \varphi^* k[Y_1, ..., Y_m]/I(W) \to k[X_1, ..., X_n]/I(V)$
$Y_i \mapsto P_i(X_i, ..., X_n)$

Beispiele:

1. Ist φ die Projektion $\varphi : V(F) \subset k^2 \to k$ mit $\varphi(x, y) = x$, dann ist φ^* die Abbildung von $\Gamma(k) = k[X]$ nach $k[X, Y]/(F)$, die X auf X abbildet.

2. Betrachten wir die Abbildung aus Definition 3.1 Beispiel 3, so ist $\varphi^* : k[X, Y]/(Y^2 - X^3) \to k[T]$ mit $\varphi^*(\overline{X}) = T^2$ und $\varphi^*(\overline{Y}) = T^3$. Dies ergibt sich direkt aus der oben gezeigten Berechnung von φ^*.

Satz 3.3
Die Abbildung $\gamma : Reg(V, W) \to Hom_{k-alg}(\Gamma(V), \Gamma(W)), \varphi \mapsto \varphi^*$ ist bijektiv.
Beweis:

- *Injektivität*
  Sei $\varphi^* = \psi^*$
  $\Rightarrow \varphi_i = \varphi^*(\eta_i) = \psi^*(\eta_i) = \psi_i$
  $\Rightarrow \varphi = \psi$
- *Surjektivität*
  Sei $\Theta : \Gamma(W) \to \Gamma(V)$ Algebrenhomomorphismus
  Wir setzen $\varphi_i = \Theta(\eta_i)$ (η_i wie oben). Wir erhalten $\varphi : V \to k^m$
  Es ist nun zu zeigen, dass $Im(\varphi) \subset W$
  Sei $F[Y_1, ..., Y_m] \in I(W)$ und $x \in V$
  $\Rightarrow F[\varphi(x)] = F[\Theta(\eta_1), ..., \Theta(\eta_m)](x)$
  $\Rightarrow$ da Θ ein Algebrenhomomorphismus ist gilt
  $F[\Theta(\eta_1), ..., \Theta(\eta_m)](x) = \Theta[F(\eta_1, ..., \eta_m)](x) \Rightarrow F[\eta_1, ..., \eta_m]$ ist Bild von
  $F[Y_1, ..., Y_n] \in I(W)$ in $\Gamma(W)$
  $\Rightarrow F[\eta_1, ..., \eta_m] = 0$ also $\Theta(F[\eta_1, ..., \eta_m]) = 0$

Korollar 3.4

1. φ ist Isomorphismus $\Leftrightarrow$ φ^* ist Isomorphismus
2. $V \cong W \Leftrightarrow \Gamma(V) \cong \Gamma(W)$

Beweis:
Ist φ Isomorphismus, setze $(\varphi^*)^{-1} := (\varphi^{-1})^*$
Ist φ^* Isomorphismus, setze $\varphi^{-1} = ((\varphi^*)^{-1}(\eta_1), ..., (\varphi^*)^{-1}(\eta_n))$, wobei η_i die Koordinatenfunktionen in $\Gamma(V)$ bezeichnet.

Definition 3.5
Sei $\varphi : V \to W$ ein Morphismus. Wir sagen φ ist dominant genau dann wenn $\overline{\varphi(V)} = W$

Satz 3.6

1. φ ist dominant $\Leftrightarrow$ φ^* ist injektiv

2. φ ist dominant und V irreduzibel $\Rightarrow W$ ist irreduzibel

Beweis:
" $\Rightarrow$ " φ dominant und sei $f \in Ker(\varphi^*)$
$\Rightarrow \varphi^*(f) \equiv f \circ \varphi \equiv 0 \Rightarrow f \equiv 0$ auf $\varphi(V)$
$\Rightarrow f = 0$ auf $\overline{\varphi(V)}$ da f stetig bzl. Zariski-Topologie
" $\Leftarrow$ " Setze $X = \overline{\varphi(v)}$
$\Rightarrow X$ ist affine algebraische Menge und $X \subseteq W$
Annahme: $X \neq W$
$\Rightarrow$ Es gibt $f \in \Gamma(W)$ mit $f(X) = 0$
$\Rightarrow f \circ \varphi \equiv \varphi^*(f) \equiv 0$ im Widerspruch zur Injektivität
Die 2. Behauptung folgt da φ dominant und somit φ^* eine injektive Abbildung von $\Gamma(W)$ nach $\Gamma(V)$ ist. Nun ist aber $\Gamma(V)$ aufgrund der Irreduzibilität von V nullteilerfrei und mit der Injektivität von φ^* auch $\Gamma(W)$ und damit ist W irreduzibel.

Theorem 3.7
Sei k algebraisch abgeschlossen, dann ist die Abbildung
$\gamma : Reg(v, W) \to Hom_{k-alg}(\Gamma(W), \Gamma(V)), \varphi \mapsto \varphi^*$ bijektiv und sei A eine endliche reduzierte k-Algebra, so gibt es eine affine algebraische Menge V so dass $A \cong \Gamma(V)$

Beweis:
Der erste Teil wurde bereits in Satz 3.3 gezeigt. Sei A eine endlich erzeugte reduzierte k-Algebra.
$\Rightarrow A \cong K[X_1, ..., X_n]/I$, da A reduziert $\Rightarrow I$ Radikalideal
$\Rightarrow V := V(I) \Rightarrow I(V(I)) = rac(I) = I$
$\Rightarrow A \cong \Gamma(V)$

Definition 3.8
Sei V eine irreduzible affine algebraische Menge, also $\Gamma(V)$ ein Integritätsring. Wir definieren $K(V) := Quot(\Gamma(V))$, den Körper der rationalen Funktionen auf V.

Bemerkung:
Wir können $f \in \Gamma(V)$ in der Form $f = g/h$ schreiben, wobei $g, h \in \Gamma(V)$ und $h \not\equiv 0$. Wir können also f als Funktion auf der offenen Standardmenge $D(h)$, die durch $h(x) \neq 0$ gegeben ist, ansehen.