Kohomologie von Garben

Eike Fokken Felix Lenders Anna Schilling Oliver Thomas

Ziel dieses Vortrags ist es, einerseits eine Einführung in das allgemeine Konzept von Kohomologie zu geben und andererseits eine sich in unserem Fall beinahe natürlich ergebende Kohomologietheorie vorzustellen. Dazu wird nach ein wenig allgemeiner homologischer Algebra die Čech-Kohomologie – eine Kohomologietheorie von Garben – eingeführt werden. Im Anschluss daran werden einige Sätze über die sich ergebenden Kohomologiegruppen gezeigt werden.

Inhaltsverzeichnis

Teil I: Homologische Algebra und Čech-Kohomologie

Felix Lenders Anna Schilling

1 Grundlagen der homologischen Algebra

Definition 1. Ein *Komplex* $A^\bullet$ von abelschen Gruppen ist eine durch $\mathbb{N}$ oder $\mathbb{Z}$ indizierte Sequenz

$$\cdots \longrightarrow A^i \xrightarrow{d^i} A^{i+1} \xrightarrow{d^{i+1}} A^{i+2} \longrightarrow \cdots$$

derart, dass $d^{i+1} \circ d^i = 0 \, \forall i$. Die Homomorphismen $d^i : A^i \longrightarrow A^{i+1}$ heißen *Differentiale.*

Die Gruppe

$$H^i(A^\bullet) := \frac{\ker A^i \xrightarrow{d^i} A^{i+1}}{\operatorname{im} A^{i-1} \xrightarrow{d^{i-1}} A^i}$$

heißt *i-te Kohomologiegruppe von $A^\bullet$.*

Bemerkung. Diese Sequenz ist im Allgemeinen nicht exakt. Exaktheit an der Stelle i ist äquivalent dazu, dass die i-te Kohomologiegruppe $H^i(A^\bullet) = 0$ trivial ist. Die i-te Kohomologiegruppe $H^i(A^\bullet)$ „misst“ daher die „Abweichung von der Exaktheit“ an der Stelle i.

Beispiel 2. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und bezeichne $\Omega^k(U)$ den $C^\infty(U)$-Modul der k-Differentialformen auf U, $\Omega^0(U) := C^\infty(U)$. Die äußere Ableitung $\mathrm{d} : \Omega^i(U) \longrightarrow \Omega^{i+1}(U)$ ist dann ein Homomorphismus mit $\mathrm{d}^2 = 0$, also bildet

$$\Omega^0(U) \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega^1(U) \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega^2(U) \longrightarrow \cdots$$

einen Komplex, der *de-Rahm-Komplex* genannt wird.

Eine k-Form $\omega^k \in \Omega^k(U)$ heißt

- geschlossen, wenn $\mathrm{d}\omega^k = 0$;
- exakt, wenn es eine $(k-1)$-Form $\eta^{k-1} \in \Omega^{k-1}(U)$ gibt mit $\mathrm{d}\eta^{k-1} = \omega^k$.

Ist U ein Sterngebiet, so besagt das Lemma von Poincaré, dass jede geschlossene k-Form $\omega^k \in \Omega^k$ exakt ist. Ist $\mathrm{d}\omega^k = 0 \Leftrightarrow \omega^k \in \ker \mathrm{d}$, so gibt es also $\eta^{k-1} \in \Omega^{k-1}(U)$ mit

$$\mathrm{d}\eta^{k-1} = \omega^k \Leftrightarrow \omega^k \in \operatorname{im} \mathrm{d}.$$

Daher ist $\operatorname{im} \mathrm{d} = \ker \mathrm{d}$ und es folgt dass die k-te de-Rahm-Kohomolgie

$$H^k(U) = \{0\}$$

trivial ist.

Definition 3. Seien $A^\bullet$, $B^\bullet$ Komplexe mit Differentialen d^i beziehungsweise δ^i. Ein *Morphismus von Komplexen*
$$f : A^\bullet \longrightarrow B^\bullet$$
ist eine Familie von Homomorphismen $f^i : A^i \longrightarrow B^i$, sodass für jedes i folgendes Diagramme kommutativ ist:

$$\begin{tikzcd}
A^{i-1} \arrow[r, "d^{i-1}"] \arrow[d, "f^{i-1}"] & A^i \arrow[r, "d^i"] \arrow[d, "f^i"] & A^{i+1} \arrow[d, "f^{i+1}"] \\
B^{i-1} \arrow[r, "\delta^{i-1}"] & B^i \arrow[r, "\delta^i"] & B^{i+1}
\end{tikzcd}$$

Aus der Kommutativität der Diagramme folgt sofort
$$f^i(\ker d^i) \subset \ker \delta^i; \quad f^i(\operatorname{im} d^{i-1}) \subset \operatorname{im} \delta^{i-1},$$
daher induziert f^i einen Homomorphismus der Kohomologiegruppen
$$\overline{f^i} : H^i(A^\bullet) \longrightarrow H^i(B^\bullet).$$
Eine Sequenz von Komplexen
$$0 \longrightarrow A^\bullet \xrightarrow{f} B^\bullet \xrightarrow{g} C^\bullet \longrightarrow 0$$
heißt *exakt*, wenn für jedes i die Sequenz
$$0 \longrightarrow A^i \xrightarrow{f^i} B^i \xrightarrow{g^i} C^i \longrightarrow 0$$
exakt ist.

Satz 4. *Sei*
$$0 \longrightarrow A^\bullet \xrightarrow{f} B^\bullet \xrightarrow{g} C^\bullet \longrightarrow 0$$
eine exakte Sequenz von Komplexen. Dann gibt es Homomorhpismen
$$\partial^n : H^n(C^\bullet) \longrightarrow H^{n+1}(A^\bullet)$$
derart, dass
$$\cdots \longrightarrow H^n(A^\bullet) \xrightarrow{\overline{f^n}} H^n(B^\bullet) \xrightarrow{\overline{g^n}} H^n(C^\bullet) \xrightarrow{\partial^n} H^{n+1}(A^\bullet) \longrightarrow \cdots$$
eine lange exakte Sequenz ist. Die ∂^n heißen Verbindungsmorphismen*.*

Beweis. Wir betrachten folgendes kommutatives Diagramm, dessen Zeilen Komplexe und dessen Spalten exakte Sequenzen sind:

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & \cdots \arrow[r] & A^n \arrow[r, "d^n"] \arrow[d, "f^n"] & A^{n+1} \arrow[r, "d^{n+1}"] \arrow[d, "f^{n+1}"] & A^{n+2} \arrow[r] \arrow[d, "f^{n+2}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & B^{n-1} \arrow[r, "\delta^{n-1}"] \arrow[d, "g^{n-1}"] & B^n \arrow[r, "\delta^n"] \arrow[d, "g^n"] & B^{n+1} \arrow[r, "\delta^{n+1}"] \arrow[d, "g^{n+1}"] & B^{n+2} \arrow[r] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & C^{n-1} \arrow[r, "\Delta^{n-1}"] \arrow[d] & C^n \arrow[r, "\Delta^n"] \arrow[d] & C^{n+1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots & \\
 & 0 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

i) *Definition der Homomorphismen $\partial^n : H^n(C^\bullet) \longrightarrow H^{n+1}(A^\bullet)$:* Sei $\overline{c_n} \in H^n(C^\bullet)$ und $c_n \in \ker \Delta^n \subset C^n$ ein Repräsentant. Da g^n surjektiv, gibt es $b_n \in B^n$ mit $g^n(b_n) = c_n \in \ker \Delta^n$, daher folgt für $b_{n+1} := \delta^n(b_n)$ nun

$$g^{n+1}(b_{n+1}) = g^{n+1}(\delta^n(b_n)) = \Delta^n(g^n(b_n)) = \Delta^n(c_n) = 0,$$

also $b_{n+1} \in \ker g^{n+1} = \operatorname{im} f^{n+1}$. Da f^{n+1} injektiv ist, gibt es daher genau ein $a_{n+1} \in A^{n+1}$ mit $f^{n+1}(a_{n+1}) = b_{n+1}$. Wir müssen jetzt noch nachweisen, dass $a_{n+1} \in \ker d^{n+1}$. Es ist

$$0 = \delta^{n+1}(\delta^n(b_n)) = \delta^{n+1}(b_{n+1}) = \delta^{n+1}(f^{n+1}(a_{n+1})) = f^{n+2}(d^{n+1}(a_{n+1}))$$

und aus der Injektivität von f^{n+2} folgt $d^{n+1}(a_{n+1}) = 0$. Man setze $\partial^n(\overline{c_n}) := \overline{a_{n+1}}$.

ii) *Wohldefiniertheit:* Wir zeigen zunächst, dass $\overline{a_{n+1}}$ unabhängig von der Auswahl der Liftung b_n ist. Gilt nämlich $g^n(b'_n) = c_n$, so ist $b'_n - b_n \in \ker g^n = \operatorname{im} f^n$ und es gibt $\alpha_n \in A^n$ mit $b'_n = b_n + f^n(\alpha_n)$ und somit

$$\delta^n(b'_n) = \delta^n(b_n) + \delta^n(f^n(\alpha_n)) = b_{n+1} + f^{n+1}(d^n(\alpha_n)),$$

liftet man nun b'_{n+1} wie oben zu $a'_{n+1} \in A^{n+1}$, so gilt aufgrund der Injektivität von f^{n+1} dann $a'_{n+1} = a_{n+1} + d^n(\alpha_n)$ und es folgt $\overline{a'_{n+1}} = \overline{a_{n+1}}$.

Jetzt zeigen wir, dass $\overline{a_{n+1}}$ unabhängig von der Wahl des Repräsentanten c_n ist. Sei $c'_n \in \ker \Delta^n$ ein weiterer Repräsentant von $\overline{c_n}$. Dann ist $c'_n - c_n \in \operatorname{im} \Delta^{n-1}$ und es gibt daher $\gamma_{n-1} \in C^{n-1}$ mit $c'_n = c_n + \Delta^{n-1}(\gamma_{n-1})$. Da g^{n-1} surjektiv, kann man γ_{n-1} zu $\beta_{n-1} \in B^{n-1}$ mit $g^{n-1}(\beta_{n-1}) = \gamma_{n-1}$ liften. Dann ist

$$\begin{aligned} g^n(b_n + \delta^{n-1}(\beta_{n-1})) &= g^n(b_n) + g^n(\delta^{n-1}(\beta_{n-1})) = c_n + \Delta^{n-1}(g^{n-1}(\beta_{n-1})) \\ &= c_n + \Delta^{n-1}(\gamma_{n-1}) = c'_n \end{aligned}$$

und c'_n wird daher zu $b'_n = b_n + \delta^{n-1}(\beta_{n-1})$ geliftet. Es folgt

$$b'_{n+1} = \delta^n(b'_n) = \delta^n(b_n) + \delta^n(\delta^{n-1}(\beta_{n-1})) = b_{n+1}$$

aufgrund der Komplexeigenschaft $d^n \circ d^{n-1} = 0$; daher dann auch $\overline{a'_{n+1}} = \overline{a_{n+1}}$.

iii) *Linearität von ∂^n:* Sind $\overline{c_n}, \overline{c'_n} \in H^n(C^\bullet)$ und b_n, b'_n Liftungen der Repräsentanten c_n, c'_n, so ist $b_n + b'_n$ eine Liftung von $c_n + c'_n$, da g^n Morphismus. Beachtet man, dass Liften auf diese Weise „linear“ ist, so folgt die Behauptung.

iv) *Exaktheit der langen Sequenz:*

a) Exaktheit an der Stelle $H^n(C^\bullet)$: $\quad \operatorname{im} \overline{g^n} = \ker \partial^n$

„$\operatorname{im} \overline{g^n} \subset \ker \partial^n$“: Sei $\overline{c_n} = \overline{g^n}(\overline{b_n}) \in \operatorname{im} \overline{g^n}$ und $b_n \in B^n$ Repräsentant. Dann gilt $b_{n+1} = \delta^n(b_n) = 0$. Nach Definition ist $\partial^n(\overline{c_n}) = \overline{a_{n+1}}$, ferner gilt $f^{n+1}(a_{n+1}) = b_{n+1}$. Daher ist $f^{n+1}(a_{n+1}) = b_{n+1} = \delta^n(b_n) = 0$ und da f^{n+1} injektiv ist, ist $a_{n+1} = 0$ und daher $\partial^n(\overline{c_n}) = \overline{a_{n+1}} = 0$, also $\overline{c_n} \in \ker \partial^n$.

„$\ker \partial^n \subset \operatorname{im} \overline{g^n}$“: Sei $\overline{c_n} \in \ker \partial^n$, also $\partial^n(\overline{c_n}) = 0 = \overline{a_{n+1}}$. Daher ist $a_{n+1} \in \operatorname{im} d^n$ und es existiert $a_n \in A^n$ mit $d^n(a_n) = a_{n+1}$. Da g^n surjektiv existiert $b_n \in B^n$ so dass $g^n(b_n) = c_n$. Dann gilt $\delta^n(b_n) = f^{n+1}(a_{n+1})$ (siehe Definition von ∂^n). Aus der Kommutativität folgt $f^{n+1}(a_{n+1}) = \delta^n(f^n(a_n))$, wegen $\delta^n(b_n) = f^{n+1}(a_{n+1})$ gilt für $\widetilde{b}_n := f^n(a_n)$ dann $b_n - \widetilde{b}_n \in \ker \delta^n$, also $\overline{b_n - \widetilde{b}_n} \in H^n(B^\bullet)$. Weiterhin ist $b_n - \widetilde{b}_n$ eine Liftung von c_n, denn $g^n(b_n - \widetilde{b}_n) = g^n(b_n) - g^n(\widetilde{b}_n) = c_n - g^n(f^n(a_n)) = c_n$, wobei $(g^n \circ f^n)(a_n) = 0$, da die Spalten exakt sind. Es folgt also $\overline{c_n} \in \operatorname{im} \overline{g^n}$.

b) Exaktheit an der Stelle $H^n(A^\bullet)$: $\quad \operatorname{im} \overline{\partial^n} = \ker \overline{f^{n+1}}$

„$\operatorname{im} \partial^n \subset \ker \overline{f^{n+1}}$“: Sei $\overline{a_{n+1}} \in \operatorname{im} \partial^n$. Dann gibt es ein $\overline{c_n} \in H^n(C^\bullet)$ mit $\partial^n(\overline{c_n}) = \overline{a_{n+1}}$. Sei $c_n \in C^n$ ein Repräsentant, dieser erfüllt $\Delta^n(c_n) = 0$. Da g^n surjektiv ist, existiert ein $b_n \in B^n$ mit $f^n(b_n) = c_n$. Dann ist $g^{n+1}(\delta^n(b_n)) = \Delta^n(g^n(b_n)) = \Delta^n(c_n) = 0$. Sei $b_{n+1} := \delta^n(b_n) \in \ker g^{n+1} = \operatorname{im} f^{n+1}$, dann gibt es $\widetilde{a}_{n+1} \in A^{n+1}$ mit $f^{n+1}(\widetilde{a}_{n+1}) = b_{n+1} \in \operatorname{im} \delta^n$. Daher folgt $\overline{f_n}(\overline{\widetilde{a}_{n+1}}) = 0$ und da $\overline{\widetilde{a}_{n+1}} = \overline{a_{n+1}}$ (Unabhängigkeit der Liftung) folgt nun $\overline{f^n}(\overline{a_{n+1}}) = 0$. Also $\overline{a_{n+1}} \in \ker \overline{f^{n+1}}$.

„$\ker \overline{f^{n+1}} \subset \operatorname{im} \partial^n$“: Sei $\overline{a_{n+1}} \in \ker \overline{f^{n+1}}$, das heißt $\overline{f^{n+1}}(\overline{a_{n+1}}) = 0$. Daher existiert ein $b_{n+1} \in \operatorname{im} \delta^n$ so dass $f^{n+1}(a_{n+1}) = b_{n+1}$. Weiterhin gibt es wegen $b_{n+1} \in \operatorname{im} \delta^n$ ein $b_n \in B^n$ mit $\delta^n(b_n) = b_{n+1}$ und daher $g^{n+1}(b_{n+1}) = g^{n+1}(f^{n+1}(a_{n+1})) = 0$. Mit $c_n = g^n(b_n)$ gilt dann

$$\Delta^n(c_n) = \Delta^n(g^n(b_n)) = g^{n+1}(\delta^n(b_n)) = g^{n+1}(b_{n+1}) = 0,$$

also $c_n \in \ker \Delta^n$. Nach Konstruktion gilt dann $\partial^n(\overline{c_n}) = \overline{a_{n+1}}$ und es folgt $\overline{a_{n+1}} \in \operatorname{im} \partial^n$.

c) Exaktheit an der Stelle $H^n(B^\bullet)$: $\quad \operatorname{im}\overline{f^n} = \ker\overline{g^n}$

„$\operatorname{im}\overline{f^n} \subset \ker\overline{g^n}$“: Sei $\overline{b_n} \in \operatorname{im}\overline{f^n}$. Dann gibt es also ein $\overline{a_n} \in H^n(A^\bullet)$ mit $\overline{f^n}(\overline{a_n}) = \overline{b_n}$. Seien a_n, b_n Repräsentanten in A^n bzw B^n. Dann gilt $f^n(a_n) = b_n$ und daher

$$\overline{g^n}(\overline{b_n}) = \overline{g^n}(\overline{f^n}(a_n)) = \overline{g^n(f^n(a_n))} = 0,$$

also $\overline{b_n} \in \operatorname{im}\overline{g^n}$.

„$\ker\overline{g^n} \subset \operatorname{im}\overline{f^n}$“: Sei $\overline{b_n} \in \ker\overline{g_n}$, also $\overline{g_n}(\overline{b_n}) = 0$ und $b_n \in \ker\delta^n$ ein Repräsentant. Sei $c_n := g^n(b_n)$. Da $\overline{c_n} = \overline{g_n}(\overline{b_n}) = 0$ gilt $c_n \in \operatorname{im}\Delta^{n-1}$ und es gibt $c_{n-1} \in C^{n-1}$ mit $\Delta^{n-1}(c_{n-1}) = c_n$. Weiterhin gibt es aufgrund der Surjektivität von g^{n-1} ein $b_{n-1} \in B^{n-1}$ mit $g^{n-1}(b_{n-1}) = c_{n-1}$. Setzen wir $\widetilde{b}_n := \delta^{n-1}(b_{n-1})$, so folgt aus der Kommutativität dann

$$g^n(b_n) = c_n = \Delta^{n-1}(g^{n-1}(b_{n-1})) = g^n(\delta^{n-1}(b_{n-1})) = g^n(\widetilde{b}_n)$$

und daher $b_n - \widetilde{b}_n \in \ker g^n = \operatorname{im} f^n$. Somit gibt es also $a_n \in A^n$ mit $f^n(a_n) = b_n - \widetilde{b}_n$ beziehungsweise $b_n = f^n(a_n) + \widetilde{b}_n$. Daher gilt

$$\overline{b_n} = \overline{f^n(a_n) + \widetilde{b}_n} = \overline{f^n}(\overline{a_n}) + \overline{\widetilde{b}_n} = \overline{f^n}(\overline{a_n}),$$

denn $\overline{\widetilde{b}_n} = 0$ wegen $\widetilde{b}_n \in \operatorname{im}\delta^{n-1}$ und es folgt schlussendlich $\overline{b_n} \in \operatorname{im}\overline{f_n}$. $\square$

2 Čech-Kohomologie

2.1 Definition

Im Folgenden sei X ein topologischer Raum und $\mathcal{F}$ eine Garbe abelscher Gruppen über X sowie $\mathfrak{U} = (U_i)_{i=0,\dots,n}$ eine endliche Überdeckung von X durch offene Mengen.

Mit $U_{ij}, \dots, U_{i_0,\dots,i_p}$ wollen wir die folgenden Schnittmengen bezeichnen:

$$U_{ij} := U_i \cap U_j,\ \dots,\ U_{i_0,\dots,i_p} := U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_p}$$

Definition 5 (Čech-Komplex)**.** Für $0 \le p \le n$ sei

$$C^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) := \prod_{i_0 < \dots < i_p} \mathcal{F}(U_{i_0,\dots,i_p}),$$

für $p > n$ sei $C^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) := 0$.

Mit $d^p : C^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow C^{p+1}(\mathcal{F}, \mathfrak{U})$ wird $(C^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F}))_{p\in\mathbb{N}_0}$ zu einem Komplex, dieser heißt *Čech-Komplex* von $\mathcal{F}$ über $\mathfrak{U}$; seine Kohomologiegruppen heißen *Čech-Kohomologiegruppen* und werden mit $\check{H}^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ bezeichnet.

Hierbei wird für $s \in C^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ das Differential definiert durch die komponentenweise Festsetzung

$$(d^p(s))_{i_0,\dots,i_{p+1}} := \sum_{j=0}^{p+1} (-1)^j s_{i_0,\dots,\hat{i}_j,\dots,i_{p+1}}|_{U_{i_0,\dots,U_{i_p}}},$$

wobei $\hat{\imath}_j$ bedeutet, dass der Index i_j weggelassen wird.

Beweis. Wir müssen zeigen, dass es sich tatsächlich um einen Komplex handelt, dass also $d^{p+1} \circ d^p = 0$ gilt. Sei hierzu $s \in C^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ und $t := d^p(s)$. Dann ist

$$\begin{aligned}(d^{p+1}(t))_{i_0,\dots,i_{p+2}} &= \sum_{j=0}^{p+2} (-1)^j t_{i_0,\dots,\hat{\imath}_j,\dots,i_{p+2}}|_{U_{i_0,\dots,i_{p+2}}} \\ &= \sum_{j=0}^{p+2} (-1)^j \sum_{k=0,k\neq j}^{p+2} (-1)^{\sigma(j,k)} s_{i_0,\dots,\hat{\imath}_j,\dots,\hat{\imath}_k,\dots,i_{p+2}}|_{U_{i_0,\dots,i_{p+2}}},\end{aligned}$$

Da der Index i_j ausgelassen wird, gilt für $\sigma(j,k)$:

$$\sigma(j,k) = \begin{cases} k & k < j \\ k-1 & k > j \end{cases}$$

Betrachten wir nun einen Term der Form $s_{i_0,\dots,\hat{\imath}_l,\dots,\hat{\imath}_m,\dots,i_{k+1}}$ mit $l > m$, so tritt dieser in obiger Summe zweimal auf, einmal für $(j,k) = (l,m)$ mit Vorzeichen $(-1)^l(-1)^m$ und einmal mit Vorzeichen $(-1)^l(-1)^{m-1}$ für $(j,k) = (l,m)$. Diese kompensieren sich und die Behauptung folgt. □

Definition 6. Wir betrachten $d^p : C^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow C^{p+1}(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$.

i) Ein Element $s \in \ker d^p \subset C^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ heißt Kozykel vom Grad p, die Gruppe aller Kozykel vom Grad p wird mit

$$Z^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) := \ker d^p$$

bezeichnet.

ii) Ein Element $s \in \operatorname{im} d^p \subset C^{p+1}(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ heißt Korand vom Grad $p+1$, die Gruppe aller Koränder vom Grad $p+1$ wird mit

$$B^{p+1}(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) := \operatorname{im} d^p$$

bezeichnet. Mit dieser Schreibweise gilt für die p-te Čech-Kohomologiegruppe dann

$$\check{H}^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = \frac{Z^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F})}{B^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F})}.$$

Beispiel 7. i) Für $s \in C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ ist s von der Form $(s_i)_{i=0,\dots,n}$, wobei die $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ Schnitte über U_i sind. Für ds gilt

$$(ds)_{ij} = (-1)^0 s_{\hat{\imath}j}|_{U_{ij}} + (-1) s_{i\hat{\jmath}}|_{U_{ij}} = (s_j - s_i)|_{U_{ij}}.$$

ii) Ist $s \in C^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$, $s = (s_{ij})$, so gilt für ds dann

$$(ds)_{ijk} = s_{\hat{\imath}jk}|_{U_{ijk}} - s_{i\hat{\jmath}k}|_{U_{ijk}} + s_{ij\hat{k}}|_{U_{ijk}} = (s_{jk} - s_{ik} + s_{ij})|_{U_{ijk}}.$$

Ein Kozykel $s \in \ker d^1$ erfüllt daher für $i < j < k$ über U_{ijk} folgende sogenannte Kozykelrelation:

$$s_{ik} = s_{ij} + s_{jk}$$

Satz 8. *Für die nullte Čech-Kohomologiegruppe gilt* $\check{H}^0(\mathfrak{U},\mathcal{F}) = \Gamma(X,\mathcal{F})$.

Beweis. Es ist

$$\check{H}^0(\mathfrak{U},\mathcal{F}) = \frac{\ker C^0(\mathfrak{U},\mathcal{F}) \xrightarrow{d^0} C^1(\mathfrak{U},\mathcal{F})}{\operatorname{im} d^{-1}} = \ker d^0,$$

sei also $s = (s_i) \in \ker d^0$. Über U_{ij} gilt dann $s_i = s_j$. Da $\mathcal{F}$ eine Garbe ist, können die s_i zu einem globalen Schnitt $s \in \Gamma(X,\mathcal{F}) = \mathcal{F}(X)$ zusammengeklebt werden. □

2.2 Kohomologie affiner Geometrie

Wir stellen zunächst eine Hilfsaussage bereit:

Satz 9 (Partition der Eins)**.** *Sei W eine affine algebraische Menge und $(D(f_i))_{i=0,\dots,m}$ eine Überdeckung von W durch offene Standardmengen. Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gibt es eine Relation*

$$1 = \sum_{k=0}^{m} a_k f_k^n \quad \textit{mit } a_k \in \Gamma(W).$$

Beweis. Da wir über einem Körper k arbeiten und dieser insbesondere nullteilerfrei ist, gilt $D_W(f_i) = D_W(f_i^n)$. Sei $\mathfrak{a} := (f_0^n, \dots, f_m^n)$ das von $f_0^n, \dots, f_m^n$ erzeugte Ideal. Dann gilt

$$W = \bigcup_{i=0,\dots,m} D_W(f_i) = \bigcup_{i=0,\dots,m} D_W(f_i^n) = D_W(\mathfrak{a}) = D(\mathfrak{a}) \cap W$$

und daher

$$W = D(\mathfrak{a}) \cap W \Leftrightarrow V(\mathfrak{a}) \cap W = \varnothing \Leftrightarrow \Gamma(W)\mathfrak{a} = (1).$$ □

Satz 10. *Sei X eine affine Varietät, $A = \Gamma(X)$ sowie M ein A-Modul und $\mathcal{F} = \widetilde{M}$ die assoziierte quasikohärente Garbe und $\mathfrak{U} = (U_i)_{i=0,\dots,m}$ eine offene Überdeckung von X mit affinen offenen Standardmengen. Dann gilt*

$$\check{H}^p(\mathfrak{U},\mathcal{F}) = 0 \quad \textit{für } p > 0.$$

Beweis. Wir führen den Beweis für den Spezialfall $p = 1$, die restlichen Fälle verlaufen im wesentlichen analog, bedeuten aber mehr Schreibarbeit (siehe unten).

Es sei $f_i \in A, f_i \neq 0$ mit $U_i = D(f_i)$ und $\alpha = (\alpha_{ij}) \in \ker d^1$ ein 1-Kozykel. Hierbei ist α_{ij} nur für $i < j$ überhaupt definiert und für $i < j < k$ gilt die Kozykelrelation (vgl Beispiel 7 ii)

$$\alpha_{jk} - \alpha_{ik} + \alpha_{ij} = 0.$$

Wir erweitern dies, indem wir $\alpha_{ii} = 0$ und $\alpha_{ij} = -\alpha_{ji}$ für $i > j$ festsetzen. Dabei bleibt die Kozykelrelation für alle Tripel (i,j,k) erhalten.

Hierbei ist $\alpha_{ij} \in \Gamma(U_{ij}, \widetilde{M}) = M_{f_i f_j}$ und daher gibt es Elemente $\beta_{ij} \in M$ mit $\alpha_{ij} = \beta_{ij}/(f_i^n f_j^n)$, hierbei kann überall das selbe n verwendet werden, da die Überdeckung endlich ist (Übergang zum Hauptnenner). Die Kozykelrelation lautet in dieser Schreibweise nun

$$\frac{\beta_{jk}}{f_j^n f_k^n} - \frac{\beta_{ik}}{f_i^n f_k^n} + \frac{\beta_{ij}}{f_i^n f_j^n} = 0.$$

Nach Multiplikation mit $f_i^n f_j^n f_k^n$ erhalten wir folgende Relation in $M_{f_i f_j f_k}$:

$$f_i^n \beta_{jk} - f_j^n \beta_{ik} + f_k^n \beta_{ij} = 0,$$

in $M_{f_i f_j}$ impliziert dies dann $f_k^{N_k}(f_i^n \beta_{jk} - f_j^n \beta_{ik} + f_k^n \beta_{ij}) = 0$, wobei $N_k \in \mathbb{N}$ ist. Mit $N := \max_l N_l$ gilt dann $f_k^N f_k^n \beta_{ij} = f_k^N (f_j^n \beta_{ik} - f_i^n \beta_{jk})$. Setzen wir hier nun $\alpha_{ij} = \beta_{ij}/(f_i^n f_j^n)$ ein, so erhalten wir

$$f_k^{n+N} \alpha_{ij} = f_k^N \frac{f_k^n \beta_{ij}}{f_i^n f_j^n} = f_k^N \frac{f_j^n \beta_{ik} - f_i^n \beta_{jk}}{f_i^n f_j^n} = f_k^N \left(\frac{\beta_{ik}}{f_i^n} - \frac{\beta_{jk}}{f_j^n} \right).$$

Aus dem vorhergehenden Satz 9 wissen wir, dass es eine Partition der 1 in der Form

$$1 = \sum_{k=0}^{m} a_k f_k^{n+N} \quad a_k \in \Gamma(X, \widetilde{M})$$

gibt. Wir definieren nun für $j = 0, \ldots, m$:

$$\gamma_j := - \sum_{k=0}^{m} a_k f_k^N \frac{\beta_{jk}}{f_j^n} \in M_{f_j} = \Gamma(U_j, \widetilde{M})$$

und erhalten über U_{ij} dann

$$(d\gamma)_{ij} = \gamma_j - \gamma_i = \sum_{k=0}^{m} a_k f_k^N \left(\frac{\beta_{ik}}{f_i^n} - \frac{\beta_{jk}}{f_j^n} \right) = \sum_{k=0}^{m} a_k f_k^{n+N} \alpha_{ij} = \alpha_{ij} \underbrace{\sum_{k=0}^{m} a_k f_k^{n+N}}_{=1} = \alpha_{ij},$$

in der Tat ist $\alpha = d\gamma$ also ein Korand.

Im Fall $p > 1$ geht man ähnlich vor. Ist $\alpha = (\alpha)_{i_0,\ldots,i_p} \in Z^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$, so kann man kann wieder

$$\alpha_{i_0,\ldots,i_p} = \frac{\beta_{i_0,\ldots,i_p}}{f_{i_0}^n \cdots f_{i_p}^n}$$

mit $\beta_{i_0,\ldots,i_p} \in M$ schreiben. Wiederum gibt es eine Parition der Eins in der Form $1 = \sum_{k=0}^m a_k f_k^{n+N}$. Setzt man nun

$$\gamma_{i_0,\ldots,i_{p-1}} := \sum_{k=0}^{m} a_k f_k^N \frac{\beta_{k,i_0,\ldots,i_{p-1}}}{f_{i_0}^n \cdots f_{i_{p-1}}^n},$$

so kann man nachprüfen, dass $d\gamma = \alpha \in B^{p-1}(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$, woraus die Behauptung folgt. □

Satz 11. *Sei X eine affine algebraische Varietät und*

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G} \xrightarrow{p} \mathcal{H} \longrightarrow 0$$

eine exakte Sequenz quasikohärenter Garben. Dann ist die Sequenz

$$0 \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{F}) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{G}) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{H}) \longrightarrow 0$$

exakt.

Beweis. Der Schnittfunktor ist linksexakt, daher ist

$$0 \longrightarrow \Gamma(X,) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{G}) \xrightarrow{\pi} \Gamma(X, \mathcal{H})$$

exakt, $\pi = p(X)$ muss aber nicht unbedingt surjektiv sein.

Sei nun $h \in \Gamma(X, \mathcal{H})$. Wir wollen nun zeigen, dass es ein $g \in \Gamma(X, \mathcal{G})$ gibt, welches unter π auf h abgebildet wird. Da p surjektiv ist, gibt es eine offene Überdeckung $\mathfrak{U} = (U_i)_{i=0,\ldots,n}$ von $X = \bigcup_{i=0}^{n} U_i$, sodass es Schnitte $g_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{G})$ gibt, die auf h abgebildet werden: $p(U_i)(g_i) = h|_{U_i}$.

Wenn wir die g_i nun zu einem globalen Schnitt $g \in \Gamma(X, \mathcal{G})$ zusammenkleben könnten, so hätten wir ein geeignetes g gefunden. Dies geht genau dann, wenn die g_i auf U_{ij} übereinstimmen, wenn also $g_i|_{U_{ij}} = g_j|_{U_{ij}}$ gilt. Im allgemeinen können wir dies nicht erwarten, wir können die g_i aber durch Funktionen $\varphi_i \in \operatorname{im} \Gamma(U_i, \mathcal{F}) \longrightarrow \Gamma(U_i, \mathcal{G})$ abändern, so dass $p(U_i)(g_i + \varphi_i) = p(U_i)(g_i) + p(U_i)(\varphi_i) = (h + 0)|_{U_i}$ erhalten bleibt. Können wir nun φ_i mit

$$(g_i + \varphi_i)|_{U_{ij}} = (g_j + \varphi_j)_{U_{ij}} \quad \Longleftrightarrow \quad (g_i - g_j)|_{U_{ij}} = (\varphi_j - \varphi_i)|_{U_{ij}}$$

finden, so ist h surjektiv.

Wir betrachten hierzu über U_{ij} die Schnitte

$$f_{ij} := (g_i - g_j)|_{U_{ij}}.$$

Über U_{ijk} gilt dann

$$f_{ij} + f_{jk} = (g_i - g_j + g_j - g_k)|_{U_{ijk}} = (g_i - g_k)|_{U_{ijk}} = f_{ik}.$$

Daher ist (f_{ij}) ein 1-Kozykel und nach obigem Satz daher ein 1-Korand, es gibt also Schnitte $\varphi_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{F})$ mit $f_{ij} = \varphi_j - \varphi_i$.

Ferner ist

$$p(f_{ij}) = p(g_i) - p(g_j) = (h - h)|_{U_{ij}} = 0$$

auf U_{ij} und daher gilt $f_{ij} \in \ker \Gamma(U_{ij}, \mathcal{G}) \longrightarrow \Gamma(U_{ij}, \mathcal{H}) = \operatorname{im} \Gamma(U_{ij}, \mathcal{G}) \longrightarrow \Gamma(U_{ij}, \mathcal{H})$. Die hierdurch gefundenen φ_i erfüllen also obige Bedingung und es folgt die Behauptung.

□

Teil II: Anwendungen der Čech-Kohomologie

Eike Fokken Oliver Thomas

Bemerkung 12. i) Čech-Kohomologie ist funktoriell: Ist $u : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ ein Garbenhomomorphismus, so existiert ein assoziierter Homomorphismus von Komplexen $C^\bullet(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow C^\bullet(\mathfrak{U}, \mathcal{G})$ sowie Gruppenhomomorphismen $H^p(u) : \check{H}^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow \check{H}^p(\mathfrak{U}, \mathcal{G})$.

ii) Es folgt direkt aus der Definition der $C^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ als endliches Produkt, dass Čech-Kohomologie mit direkten Summen kommutiert:

$$\check{H}^p(X, \bigoplus_{i \in I} \mathcal{F}_i) = \bigoplus_{i \in I} \check{H}^p(X, \mathcal{F}_i)$$

iii) Ist X eine algebraische Varietät über einem Körper k und $\mathcal{F}$ ein $\mathcal{O}_X$-Modul, so haben die Gruppen $\mathcal{F}(U_{i_0, \ldots, i_p}), C^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ eine natürliche k-Vektorraumstruktur. Da die Differentiale k-lineare Abbildungen sind, gilt dies auch für die Kohomologiegruppen $\check{H}^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$.

2.3 Lange exakte Sequenz der Čech-Kohomologie

Satz 13. *Sei X eine algebraische (quasi-)affine oder (quasi-)projektive Varietät und $\mathfrak{U} = (U_i)_{i=0,\ldots,n}$ eine endliche offene affine Überdeckung von X sowie*

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H} \longrightarrow 0$$

eine exakte Sequenz quasikohärenter Garben. Dann gibt es eine lange exakte Sequenz

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \check{H}^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \arrow[r] & \check{H}^0(\mathfrak{U}, \mathcal{G}) \arrow[r] & \check{H}^0(\mathfrak{U}, \mathcal{H}) \arrow[dll, out=0, in=180] & & \\ & & \check{H}^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \arrow[r] & \check{H}^1(\mathfrak{U}, \mathcal{G}) \arrow[r] & \check{H}^1(\mathfrak{U}, \mathcal{H}) \arrow[dll, out=0, in=180] & \\ & & & \check{H}^2(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \arrow[r] & \check{H}^2(\mathfrak{U}, \mathcal{G}) \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

der Čech-Kohomologiegruppen.

Beweis. Wir betrachten die durch $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}$ induzierten Čech-Komplexe. Diese bilden eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow C^\bullet(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow C^\bullet(\mathfrak{U}, \mathcal{G}) \longrightarrow C^\bullet(\mathfrak{U}, \mathcal{H}) \longrightarrow 0$$

von Komplexen.

Da die Schnittmengen $U_{i_0,\dots,i_p}$ affin und die Garben $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}$ quasikohärent sind, erhalten wir nach Satz 11 eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}(U_{i_0,\dots,i_p}) \longrightarrow \mathcal{G}(U_{i_0,\dots,i_p}) \longrightarrow \mathcal{H}(U_{i_0,\dots,i_p}) \longrightarrow 0.$$

Indem wir das endliche Produkt für $i_0 < \ldots < i_p$ bilden, erhalten wir eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow C^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow C^p(\mathfrak{U}, \mathcal{G}) \longrightarrow C^p(\mathfrak{U}, \mathcal{H}) \longrightarrow 0.$$

Nach Satz 4 gibt es daher eine lange exakte Sequenz der Kohomologiegruppen wie behauptet. □

Bemerkung 14. Wir werden im Folgenden ohne Beweis verwenden, dass die Kohomologiegruppen nicht von der Wahl der affinen Überdeckung abhängen. Wir werden ferner nicht zeigen, dass Čech-Kohomologie für unsere Fälle *richtige* Kohomologie ist, dass es also für Γ nur einen rechtsderivierten Funktor gibt, der gewisse schöne Eigenschaften hat. Aus diesem Grund werden wir die Kohomologie-Gruppen von nun an mit $H^i(X, \mathcal{F})$ bezeichnen (also auf das „ˇ“ verzichten) und auch X weglassen, wenn keine Verwechslungsgefahr besteht.

3 Verschwindungssatz

Dass wir aus der langen exakten Sequenz der Kohomologie-Gruppen viele Informationen gewinnen können, hängt zu wesentlichen Teilen von unserer Fähigkeit ab, zu zeigen, dass möglichst viele Gruppen trivial sind. Im folgenden Abschnitt wollen wir uns also einige Resultate erarbeiten, wann die Gruppen trivial werden.

Wie wir bereits in Satz 10 gezeigt haben, verschwinden die Kohomologiegruppen einer affinen algebraischen Varietät für die Grade > 0.

Satz 15. *Sei V eine abgeschlossene projektive algebraische Varietät und $\mathcal{F}$ eine quasikohärente Garbe. Dann ist $H^i(V, \mathcal{F}) = 0$ für alle $i > \dim \mathcal{F}$.*

Bemerkung. Der Satz 15 lässt sich auf beliebige (quasi-)projektive und (quasi-)affine Varietäten verallgemeinern, wie sich zum Beispiel im Hartshorne nachlesen lässt.

Lemma 16. *Sei V eine abgeschlossene Untervarietät von $\mathbb{P}^N$ der Dimension n. Dann existiert eine lineare Untervarietät[1] $W \subset \mathbb{P}^N$ der Kodimension $n+1$ (d. h. $n+1 = N - \dim W$), sodass $V \cap W = \varnothing$.*

Beweis. Wir werden dies per Induktion nach N beweisen. Für $N = 0$ ist der Fall klar, die Dimension der leeren Menge können wir als -1 definieren. Für den Schluss von $N-1$ auf N werden wir zeigen, dass es eine Hyperfläche $\mathbb{P}^{N-1} \cong H \subset \mathbb{P}^N$ gibt, welche keine irreduzible Komponente von $V = \bigcup_{i=1}^r V_i$ ganz enthält. Die Einschränkungen $V_i \cap H$ sind dann leer oder von Dimension $\leq n-1$, $V' = V \cap H$ ist dann eine abgeschlossene Untervarietät von $H \cong \mathbb{P}^{N-1}$ und wir wenden Induktion an. Für die sich

[1] Eine Menge $W \subset \mathbb{P}^N$ heißt Untervarietät, wenn sie Bild eines Unterraums ohne Null des k^{N+1} ist.

ergebende lineare Untervarietät $W \subset H$ gilt dann $n = \operatorname{codim}_H W = \operatorname{codim}_{\mathbb{P}^{N-1}} W = \operatorname{codim}_{\mathbb{P}^N} W - 1$, sie erfüllt also die Voraussetzungen.

Setze $E = k^{N+1}$. Bemerke, dass die projektiven Hyperflächen zu Linearformen korrespondieren, die auf E nicht verschwinden. Zwei zueinander proportionale Linearformen gehören offensichtlich zur gleichen Hyperfläche. Der Raum der Hyperflächen lässt sich damit als $\mathbb{P}(E^*)$ auffassen. In Koordinatenschreibweise korrespondiert damit die Hyperfläche H, gegeben durch die Gleichung $\sum_{i=0}^N a_i X_i = 0$, zum Punkt H in $\mathbb{P}(E^*)$ mit homogenen Koordinaten $H = (a_0 : \ldots : a_N)$.

Ist $V = \bigcup_{i=1}^r V_i$, dann wählen wir $x_i \in V, x_i = (x_{i0} : \ldots : x_{iN})$. Im Raum der Hyperflächen ist die Menge derjenigen Hyperflächen, welche x_i nicht enthalten, eine nicht-leere offene Menge Ω_i: $x \notin H = (a_0 : \ldots : a_N) \Leftrightarrow \sum_{i=0}^N a_i x_i \neq 0$, also

$$\Omega_i = \left\{ H = (a_0 : \ldots : a_n) \in \mathbb{P}(E^*) \;\middle|\; \sum_{i=0}^N x_i a_i \neq 0 \right\} = D^+\left(\sum_{i=0}^N x_i A_i\right) \neq \varnothing$$

Betrachte jetzt $\Omega = \bigcap_{i=1}^r \Omega_i$. Da der projektive Raum irreduzibel ist, ist $\Omega \neq \varnothing$. Jedes $H \in \Omega$ erfüllt offensichtlich die geforderten Bedingungen.

Nun wollen wir Satz 15 beweisen. Zur Erinnerung: V ist eine projektive algebraische Varietät der Dimension n. Sei W durch Lemma 16 gegeben, bis auf eine Homographie können wir $W = V(X_0, \ldots, X_n)$ annehmen. Nach Voraussetzung ist der Schnitt $V \cap W = \varnothing$, deshalb ist $V \subset \bigcup_{i=0}^n D^+(X_n)$, womit V durch $n+1$ affine Mengen der Form $V \cap D^+(X_i)$ überdeckt wird. Im Čech-Komplex, welcher zu dieser Überdeckung assoziiert ist, verschwinden (nach Definition!) also alle Gruppen C^i für $i > n$ und damit auch die entsprechenden Gruppen H^i. $\square$

4 Die Kohomologiegruppen der Garben $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)$

Die Kohomologiegruppen der Garben $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)$ sind besonders einfach, wie wir auf den nächsten Seiten sehen werden. Es soll in folgendem Satz münden:

Satz 17. *Sei $n \in \mathbb{N}$ und $d \in \mathbb{Z}$. Es bezeichne S_d die homogenen Polynome vom Grad d in $n+1$ Variablen. Für $d < 0$ setzen wir $S_d = 0$. Dann gelten:*

i) $H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)) = S_d$

ii) $H^i(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)) = 0$ *für* $0 < i < n$

iii) $H^n(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)) \cong (H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-d-n-1)))^*$ *als Vektorräume, wobei* $\cdot^*$ *wie üblich den Dualraum bezeichne*

Wir werden zuerst *i)* und *iii)* zeigen. Im Verlauf des Beweises werden uns noch einige Lemmata begegnen.

Beweis. Zuerst setzen wir $S = k[X_0, \ldots, X_n] = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}_0} S_d$. Im Beweis werden wir die Garbe $\mathcal{F} = \bigoplus_{d \in \mathbb{Z}} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)$ betrachten. $\mathcal{F}$ ist quasi-kohärent über $\mathbb{P}^n$ und assoziiert zum graduierten S-Modul $M = \bigoplus_{d \in \mathbb{Z}} S(d)$. Wie wir in Bemerkung 12 gesehen haben, kommutiert der Kohomologie-Funktor mit direkten Summen. Wenn wir also die Kohomologie von $\mathcal{F}$ berechnen, berechnen wir sie auch für jeden einzelnen Faktor und damit die Behauptung.

Wir werden die Kohomologiegruppen von $\mathcal{F}$ bezüglich der Standardüberdeckung $U_i = D^+(X_i)$ berechnen. Aus dem achten Vortrag wissen wir, dass $\Gamma(U_{i_0\cdots i_p}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)) = S(d)_{(X_{i_0}\cdots X_{i_p})}$, die Menge der vom Grad d homogenen Elemente des lokalen Ringes $S_{X_{i_0}\cdots X_{i_p}}$. Mit dieser Information können wir den Čech-Komplex von $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)$ ausrechnen. Der Čech-Komplex von $\mathcal{F}$, welcher einfach die direkte Summe von eben genanntem Komplex ist, besteht aus den verschiedenen Lokalisierungen von S: Es gilt

$$C^p = C^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = \prod_{i_0<\cdots<i_p} S_{X_{i_0}\cdots X_{i_p}} = \prod_{i_0<\cdots<i_p} \bigoplus_{d\in\mathbb{Z}} S(d)_{(X_{i_0}\cdots X_{i_p})},$$

wodurch wir folgenden Komplex erhalten:

$$\prod_{i=0}^{n} S_{X_i} \longrightarrow \prod_{0\leq i<j\leq n} S_{X_iX_j} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \prod_{i=0}^{n} S_{X_0\cdots\hat{X}_i\cdots X_n} \xrightarrow{\delta_{n-1}} \underbrace{S_{X_0X_1\cdots X_n}}_{C^n} \left(\xrightarrow{\delta_n} 0\right)$$

Wir halten an dieser Stelle fest, dass es sich bei der Gruppe C^p mit der natürlichen Zerlegung als direkte Summe um einen graduierten S-Modul handelt, folglich gilt das gleiche für $H^p(\mathbb{P}^n, \mathcal{F})$. Der vom Grad d homogene Teil dieser Gruppe ist $H^p(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d))$.

Da der Funktor H^0 gleich dem Funktor Γ ist, haben wir $H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d))$ bereits in Vortrag 8 berechnet.

An dieser Stelle bemerken wir, dass es sich bei $S_{X_0\cdots X_n}$ um einen unendlich-dimensionalen Vektorraum handelt; eine Basis ist durch alle Monome der Form $X_0^{\alpha_0}\cdots X_n^{\alpha_n}$ mit $\alpha_i \in \mathbb{Z}$ gegeben. Es ist $H^n = \frac{\ker\delta_n}{\operatorname{im}\delta_{n-1}} = \frac{C^n}{\operatorname{im}\delta_{n-1}} = \operatorname{coker}\delta_{n-1}$, das Bild von δ_{n-1} besteht aus allen Brüchen der Form

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i \frac{F_i}{(X_0\cdots\hat{X}_i\cdots X_n)^r} = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i \frac{X_i^r F_i}{(X_0\cdots X_n)^r}$$

Eine Basis des Bildes von δ_{n-1} besteht damit aus Monomen der Form $X_0^{\alpha_0}\cdots X_n^{\alpha_n}$ mit mindestens einem $\alpha_i \geq 0$. Der Kokern (also H^n) hat folglich eine Basis von Monomen, deren Exponenten alle echt negativ sind, wobei $H^n(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d))$ eine Basis derartiger Monome mit Grad $\sum_{i=0}^n \alpha_i = d$ hat. Dieser Raum ist 0 für $d \geq -n$, da dann ein Summand zwingend größer 0 sein muss. Für $d \leq -n-1$ müssen wir die Monome vom Grad d in den Variablen X_i zählen, deren Exponenten alle < 0 sind. Das ist äquivalent dazu, die Monome vom Grad $-d-(n+1)$ in den Variablen $1/X_i$ zu zählen, von diesen gibt es $\binom{-d-1}{n}$.

Im Fall $d = -n-1$ ist damit $H^n(\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-n-1))$ von Dimension 1, eine Basis ist durch das Monom $1/(X_0\cdots X_n)$ gegeben. Identifizieren wir diesen Raum mit dem zugrunde liegenden Körper k, erhalten wir eine nicht-ausgeartete Bilinearform

$$\phi : H^n(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)) \times H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-d-n-1)) \longrightarrow H^n(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-n-1)) \cong k,$$

welche den Monomen $X_0^{\alpha_0}\cdots X_n^{\alpha_n}$ und $X_0^{\beta_0}\cdots X_n^{\beta_n}$ – wobei natürlich $\sum\alpha_i = d$ und $\sum\beta_i = -d-n-1$ gilt – das Bild des Monoms $X_0^{\alpha_0+\beta_0}\cdots X_n^{\alpha_n+\beta_n}$ in $H^n(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-n-1))$ zuordnet.

Diese Bilinearform ist nicht ausgeartet, denn die Darstellungsmatrix ist bei geschickter Ordnung der Monome die Einheitsmatrix. Folglich induziert sie den gewünschten Isomorphismus zwischen $H^n(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d))$ und $H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-d-n-1))^*$.

Es muss also noch die zweite Aussage gezeigt werden. Wir werden eine Induktion nach n durchführen und bemerken, dass für $n = 1$ nichts zu zeigen ist. Wir betrachten jetzt das Element X_0 in S und den Komplex $C^\bullet_{(X_0)}$, der entsteht, wenn wir den gesamten Komplex von $\mathcal{F}$ nach X_0 lokalisieren und nur die vom Grad 0 homogenen Elemente betrachten. Zunächst brauchen wir das folgende Lemma:

Lemma 18. *Sei*

$$M^\bullet = M' \xrightarrow{v} M \xrightarrow{u} M''$$

ein Komplex graduierter S-Moduln und $H(M^\bullet)$ die zugehörige Kohomologiegruppe, die als Quotient selbst ein graduierter S-Modul ist. Sei ferner $f \in S$ ein homogenes Element vom Grade $d > 0$ und

$$M^\bullet_{(f)} = M'_{(f)} \xrightarrow{v_{(f)}} M_{(f)} \xrightarrow{u_{(f)}} M''_{(f)}$$

derjenige Komplex, der aus $M^\bullet$ durch Lokalisieren nach f und Betrachten der Elemente vom Grad 0 entsteht. $H(M^\bullet_{(f)})$ sei die zugehörige Kohomologiegruppe. Dann vertauscht Kohomologie mit Lokalisieren und Grad 0 setzen, d. h. $H(M^\bullet_{(f)}) = H(M^\bullet)_{(f)}$.

Dieses Lemma zeigt, dass man die Kohomologiegruppen von $C^\bullet_{(X_0)}$ erhalten kann, indem man die Gruppen H^p lokalisiert und nur Grad-0-Elemente betrachtet.

Ferner wissen wir, dass der Operator

$$\flat : S_{(X_0)} \longrightarrow R = k[X_1, \ldots, X_n] = \Gamma(D^+(X_0), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n})$$

ein Isomorphismus ist und damit Isomorphismen auf den lokalisierten Ringen induziert: $(S_{X_{i_0}\cdots X_{i_p}})_{(X_0)} \cong R_{X_{i_0}\cdots X_{i_p}}$, wobei natürlich gegebenenfalls X_{i_j} durch 1 ersetzt werden muss. Mit anderen Worten ist der Komplex $C^\bullet_{(X_0)}$ isomorph zum Komplex $C'^\bullet$ der Garbe $\mathcal{F}$ eingeschränkt auf $D^+(X_0)$ mit der affinen offenen Überdeckung durch $D^+(X_i) \cap D^+(X_0)$.

Da $D^+(X_0)$ affin und $\mathcal{F}$ quasikohärent ist, verschwindet die Kohomologie von $C'^\bullet$ für $p \geq 1$ und damit auch von $C^\bullet_{(X_0)}$. Folglich ist $H^p(\mathcal{F})_{(X_0)} = 0$ für $p \geq 1$. Das bedeutet, dass es für alle $x \in H^p(\mathcal{F})$ eine Potenz von X_0 gibt, sodass $xX_0^n = 0$.

Um zu zeigen, dass $H^p(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d))$ für $p \geq 1$ verschwindet, reicht es also, folgendes Lemma zu beweisen:

Lemma 19. *Multiplikation mit X_0 induziert einen Isomorphismus $H^p(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)) \cong H^p(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d+1))$ für $1 \leq p \leq n-1$.*

Setze $H = V(X_0) \cong \mathbb{P}^{n-1}$ und betrachte folgende aus Vortrag 8 bekannte exakte Sequenz von Garben, die durch Multiplikation mit X_0 induziert wird:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d) \xrightarrow{X_0} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d+1) \longrightarrow \mathcal{O}_H(d+1) \longrightarrow 0$$

Die lange exakte Sequenz von Kohomologiegruppen beginnt mit:

$$0 \longrightarrow H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)) \xrightarrow{X_0} H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d+1)) \xrightarrow{\pi} H^0(\mathcal{O}_H(d+1)) \longrightarrow \cdots$$

Die Dimensionen der obigen Vektorräume sind nach dem Vorangegangenen in der richtigen Reihenfolge $\binom{n+d}{n}, \binom{n+d+1}{n}, \binom{n+d}{n-1}$, folglich ist π surjektiv.

Die lange exakte Sequenz endet mit:

$$\begin{aligned} \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow H^{n-1}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)) \longrightarrow H^{n-1}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d+1)) \longrightarrow H^{n-1}(\mathcal{O}_H(d+1)) \\ \longrightarrow H^n(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)) \longrightarrow H^n(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d+1)) \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

Es ist nämlich $H^n(\mathcal{O}_H(d+1)) = 0$, da $\dim H = n-1$ und es sind alle Gruppen $H^p(\mathcal{O}_H(d+1)) = 0$ für $1 \leq p \leq n-2$ nach Induktionsvoraussetzung. Die Abbildung

$$V = H^{n-1}(\mathcal{O}_H(d+1)) \xrightarrow{i} H^n(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)) = W$$

ist aus Dimensionsgründen aber injektiv:

$$\dim V = \binom{-d-2}{n-1}, \quad \dim W = \binom{-d-1}{n}, \quad \dim H^n(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d+1)) = \binom{-d-2}{n}.$$

Damit gilt $H^{n-1}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)) \cong H^{n-1}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d+1))$ und die Behauptung ist gezeigt. $\square$

Definitionen zur Erinnerung

Affine algebraische Menge

Definition 20. Sei $S \subseteq k[X_1, \ldots, X_n]$ eine beliebige Menge von Polynomen.

$$V(S) = \{x \in k^n \mid P(x) = 0 \, \forall P \in S\}$$

ist die gemeinsame Nullstellenmenge der Polynome in S und heißt *affine algebraische Menge definert durch S.*

Satz 21. *Es gilt:*

- *Ein Punkt ist eine affine algebraische Menge; daher: jede endliche Menge ist eine affine algebraische Menge*
- *der Schnitt affine algebraische Menge ist eine affine algebraische Menge*
- *die endliche Vereinigung affiner algebraischer Mengen ist eine affine algebraische Menge*

Affine algebraische Varietät (a.a.V)

Definition 22. Eine *affine algebraische Varietät* ist ein geringter Raum, der isomorph zu einem Paar $(V, \mathcal{O}_V)$ mit V als affiner algebraischen Menge und $\mathcal{O}_V$ als Garbe regulärer Funktionen auf V. Ein Morphismus zwischen affinen algebraischen Varietäten ist somit ein Morphismus zwischen geringten Räumen.

Satz 23. *Sei V eine affine algebraische Menge und $f \in \Gamma(V)$. Die offene Menge $D(f)$ mit der Einschränkung der Garbe $\mathcal{O}_V$ auf $D(f)$ ist eine affine algebraische Varietät.*

Affiner Koordinatenring

Definition 24. Betrachte den Ringhomomorphismus $r : k[X_1, \ldots, X_n] \to F(V, k),\ P \mapsto P|_V$. Sei

$$F(V, k) = \{f : V \to k \mid f \text{ polynomial}\}$$

der Ring der k-wertigen Funktionen auf V. $I(V)$ ist der Kern von r, das Bild von r ist der *affine Koordinatenring von V:*

$$\Gamma \cong k[X_1, \ldots X_n]/I(V)$$

Algebraische Varietät (alg.V)

Definition 25. Eine *algebraische Varietät* $(X, \mathcal{O}_V)$ ist ein geringter Raum, der folgende zwei Eigenschaften erfüllt:

- X ist quasikompakt,d.h.

$$X = \bigcup_{i \in I} U_i,\ U_i \text{ offen} \, \forall i \ \Rightarrow\ \exists K \subseteq I \text{ endlich} : X = \bigcup_{i \in K} U_i$$

- $(X, \mathcal{O}_V)$ ist lokal isomorph zu einer affinen algebraischen Varietät, d.h. für jeden Punkt $x \in X$ gibt es eine offene Umgebung $U \subseteq X$, so dass $x \in U$ und $(U, \mathcal{O}_V|_U)$ isomorph zu einer affinen aalgebraischen Varietät ist.

Satz 26. *Es gelten folgende Implikationen:*

$$X \text{ affine algebraische Varietät} \Rightarrow X \text{ algebraische Varietät} \Rightarrow X \text{ geringter Raum}$$

Äquidimensional

Definition 27. Eine algebraische Varietät X wird *äquidimensional* genannt, wenn all ihre irreduziblen Komponenten dieselbe Dimension haben.

Dimension

Definition 28. Sei X ein topologischer Raum. Die *Dimension* $\dim X$ *von* X ist das Supremum der Längen der Ketten irreduzibler abgeschlssener Untermengen von X. Sie ist entweder eine natürliche Zahl oder $+\infty$.

Direktes Bild φ_*

Definition 29. Sei $\varphi : Y \longrightarrow X$ eine stetige Abbildung und sei $\mathcal{F}$ die Garbe von Y. Das *direkte Bild von* $\mathcal{F}$, bezeichnet mit $\varphi_*\mathcal{F}$, ist die auf X durch

$$\varphi_*\mathcal{F}(U) = \mathcal{F}(\varphi^{-1}(U))$$

definierte Garbe für jede offene Menge U in X.

Endliches Schema, Vielfachheit

Definition 30. Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper, Z eine endliche Menge, ausgestattet mit der diskreten Topologie. Der geringte Raum $(Z, \mathcal{O}_Z)$ heißt dann *endliches Schema*, wenn $\mathcal{O}_Z(P) := \mathcal{O}_Z(\{P\})$ für alle $P \in Z$ eine (lokale) k-Algebra endlicher Dimension ist ($\mathcal{O}_Z(P)$ aufgefasst als k-Vektorraum).

$$\mu_P(Z) := \dim_k \mathcal{O}_Z$$

heißt dann Vielfachheit von Zin P.

Prägarbe und Garbe

Definition 31 (Prägarbe)**.** Sei X ein topologischer Raum. Eine *Prägarbe* auf X ist gegeben durch:

i) Jeder offenen Menge $U \subseteq X$ wird eine Menge $\mathcal{F}(U)$ zugeordnet.
ii) Sind U, V offene Mengen mit $V \subset U$, so gibt es eine eine einschränkende Abbildung $r_{V,U} : \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{F}(V)$.

So dass folgende Bedingungen erfüllt sind:

i) Wenn $W \subseteq V \subseteq U$ ist, so gilt $r_{W,U} = r_{W,V} r_{V,U}$

ii) Es ist $r_{U,U} = \mathrm{id}_{\mathcal{F}(U)}$. Schreibe: $r_{V,U} = f|_V$.

Erfüllt $\mathcal{F}(U)$ zusätzlich die Verklebungseigenschaft, so wird sie *Garbe* genannt.

Definition 32 (Garbe K-wertiger Funktionen)**.** Sei X ein topologischer Raum und K eine Menge. Eine K-wertige Garbe von Funktionen auf X ist gegeben durch folgende Definition:

Jeder offenen Menge $U \subset X$ wird eine Menge $\mathcal{F}(U) \subset \mathrm{Abb}(U, K)$ von Funktionen von U nach K zugeordnet, welche die folgenden Axiome erfüllt:

i) Einschränkung: falls $V \subset U$ eine offene Menge und $f \in \mathcal{F}(U)$ ist, dann gilt $f|_V \in \mathcal{F}(V)$.

ii) Verkleben: Falls U von offenen Mengen U_i, $(i \in I)$ überdeckt wird, dann gibt es für jede Wahl von Elementen $f_i \in \mathcal{F}(U_i)$, für die $f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j}$ gilt, eine eindeutige Funktion $f \in \mathcal{F}(U)$, so dass $f|_{U_i} = f_i \; \forall i$.

Definition 33 (Garbe der regulären Funktionen)**.** Sei V ein affine algebraische Menge und $f \in \Gamma(V) \setminus \{0\}$. Setze

$$\mathcal{O}_V(D(f)) := \Gamma(D(f), \mathcal{O}_V) := \Gamma(V)_f,$$

indem man dies als Teilring des Ringes von Funktionen von $D(f)$ nach K mittels Lokalisierung betrachtet. Dadurch wird eine Garbe von Ringen auf V definiert, die *Garbe der regulären Funktionen.*

Geringter Raum

Definition 34. Ein *geringter Raum* ist ein topologischer Raum X versehen mit einer Garbe von Ringen. Diese Garbe wird Strukturgarbe von X genannt und wird geschrieben als $\mathcal{O}_X$.

Graduierte Ringe

Definition 35. Eine k-Algebra R heißt *graduiert*, wenn sie dargestellt werden kann als direkte Summe

$$R = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} R_n$$

wobei die R_n als k- Unterräume von R die Relation $R_p R_q \subset R_{p+q}, \quad p, q \in \mathbb{N}$ erfüllen. Die Elemente von R_p heißen homogen vom grad p.

Halme und Keime

Definition 36. Sei X eine affine algebraische Varietät und $x \in X$. Betrachte Paare der Form (U, f) mit U offene Menge in X, $x \in U$ und $f \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$. Zwei solche Paare $(U, f), , (V, g)$ heißen äquivalent, falls

$$\exists\, W \text{ offen} : x \in W \subseteq U \cup V \text{ und } f|_W = g|_W.$$

Die Äquivalenzklassen diese Relation heißen *Keime der Funktionen auf* x. Der Keim von (U, f) an x wird mit f_x bezeichnet.

Eine Menge von Keimen an x heißt *Halm* und wird mit $\mathcal{O}_{X,x}$ bezeichnet.

Die Menge $\mathcal{O}_{X,x}$ ist kanonisch mit einer Ringstuktur ausgestattet. Dieser Ring ist eine lokale K-Algebra mit maximalem Ideal

$$m_{X,x} := \{f \in \mathcal{O}_{X,x} \mid f(x) = 0\}$$

Wir nennen ihn den *lokalen Ring von* X *an* x.

Es gilt:

$$\mathcal{O}_{X,x}/m_{X,x} \cong K$$

Homomorphismus, Kerngarbe, Bildgarbe

Definition 37. Seien $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ zwei $\mathcal{O}_X$-Moduln. Ein *Homomorphismus* $f : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ ist gegeben durch die Eigenschaften der $\mathcal{O}_X(U)$-linearen Abbildungen für jedes U, $f(U) = \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{G}(U)$, welche mit Einschränkungen verträglich sind.

Definition 38. Die *Kerngarbe* von f ist definiert als

$$(\ker f)(U) := \ker(f(U)).$$

f heißt injektiv, wenn $f(U)$ für alle U injektiv ist beziehungsweise wenn $\ker f = 0$.

Definition 39. Die *Bildgarbe* wird folgendermaßen definiert: Sei $s \in \mathcal{G}(U)$.

$$s \in (\operatorname{im} f)(U) \Leftrightarrow \forall x \in U\, \exists V \subseteq U \text{ offen} : x \in V \text{ und } s|_V \in \operatorname{im}(f(V)).$$

f heißt surjektiv, falls $\operatorname{im} f = \mathcal{G}$.

Ideal

Definition 40. Sei $V \subseteq k^n$ eine beliebeige Menge von Punkten. Die Menge

$$I(V) = \{f \in k[X_1, \ldots, X_n] \mid f(x) = 0\, \forall x \in V\}$$

ist die Menge von Polynomfunktionen, die auf V verschwinden und heißt *Ideal* von V.

Es sei:

$$\operatorname{rad}(I) := \{x \in A \mid \exists\, r \in \mathbb{N} : x^r \in I\}$$

Irreduzibel

Definition 41. Sei X ein nicht-leerer topologischer Raum. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

i) Lässt sich X schreiben als $X = F \cup G$, wobei F und G abgeschlossene Mengen von X sind, dann gilt:
$$X = F \text{ oder } X = G$$

ii) Sind U, V zwei offene Mengen von X, und $U \cap V = \varnothing$. Dann gilt:
$$U = \varnothing \text{ oder } V = \varnothing$$

iii) Jede nicht-leere offene Menge von X ist dicht in X.

Erfüllt X eine der drei Bedingungen, so heißt X *irreduzibel.*

Kette

Definition 42. Sei X eine Menge. Eine *Kette* aus Untermengen von X ist eine Folge

$$X_0 \subset X_1 \subset \ldots \subset X_n$$

wobei die Mengen X_i voneinander verschieden sind. Eine solche Kette hat die Länge n.

Kodimension

Lemma 43. *i) Sei X ein topologischer Raum und Y ein topologischer Unterraum von X, so ist* $\dim Y \leq \dim X$.

ii) Ist X weiter irreduzibel und von endlicher Dimension und Y eine echte abgeschlossene Untermenge, so ist $\dim Y < \dim X$.

Definition 44. Ist X endlich dimensional, so definieren wir die *Kodimension* von Y in X als:

$$\operatorname{codim} Y := \dim X - \dim Y$$

Krull-Dimension

Definition 45. Sei A ein Ring. Die *Krull-Dimension* $\dim_K A$ von A ist das Maximum der Längen der Ketten aus Primidealen in A.

Morphismus

Definition 46. Seien $V \subseteq k^n$ und $W \subseteq k^n$ affine algebraische Mengen und $\varphi : V \longrightarrow W$ wobei $\varphi = (\varphi_1, \ldots \varphi_2)$. Dann heißt φ ein *Morphismus* bzw. *regulär*, falls die φ_i polynomiale Funktionen sind.

Sei in obiger Situation $f \in \Gamma(W)$. Dann ist

$$\varphi^*(f) = f \circ \varphi$$

für jedes f ein Morphismus von k-Algebren. Dabei gilt:

$$(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$$

Offene Standardmenge

Definition 47. i) Sei $f \in k[X_1, \ldots, X_n]$. Die Menge

$$D(f) := k^n \setminus V(f) = \{x \in k^n \mid f(x) \neq 0\}$$

ist eine Zariski-offene Menge und heißt *offene Standardmenge.*

ii) Sei V eine affine algebraische Menge und $f \in k[X_1, \ldots, X_n]$, $f \in \Gamma(V) \neq 0$. Die Menge

$$D_V(f) := V \setminus V(f) = \{x \in V \mid f(x) \neq 0\}$$

ist eine Zariski-offene Menge und heißt *offene Standardmenge von V.*

Die offenen Standardmengen bilden eine Basis der Zariski-Topologie, denn jede offene Menge U ist eine endliche Vereinigung von Standardmengen.

Offene Untervarietäten

Definition 48. Für $U \subseteq X$ ist $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ eine algebraische Varietät, die sogenannte *offene Untervarietät* von $(X, \mathcal{O}_X)$. „offen“ heißt in diesem Zusammenhang, dass U offen ist, nicht unbedingt die Untervarietät.

$\mathcal{O}_V$-Modul $\widetilde{M}$

Definition 49. Sei M ein A-Modul. Ein *$\mathcal{O}_V$-Modul $\widetilde{M}$* auf den Standardoffenen Mengen von V ist auf folgende Weise definert: Sei $f \in A$, dann setze:

$$\widetilde{M}(D(f)) := M_f = M \otimes_A A_f$$

insbesondere gilt:

$$\widetilde{M}(V) = \Gamma(V, M) = M \quad \widetilde{A} = \mathcal{O}_V$$

$\mathcal{O}_X$-Modul

Definition 50. Ein *$\mathcal{O}_X$-Modul* ist eine Garbe $\mathcal{F}$, so dass für jede offene Menge U in X $\mathcal{F}(U)$ ein $\mathcal{O}_X$-Modul ist und die Einschränkungsabbildungen lineare Abbildungen sind.

Zur Linearität: seien

$$r : \mathcal{O}_X(U) \longrightarrow \mathcal{O}_X(V) \text{ und } \rho : \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{F}(V).$$

Linearität bedeutet nun, dass $\rho(af) = r(a)\rho(f)$.

Quasikohärent

Definition 51. Ein $\mathcal{O}_V$-Modul, der isomorph zu einem $\mathcal{O}_V$-Modul vom Typ $\widetilde{M}$ ist, heißt *quasikohärent*. Ist M über A endlich erzeugt, dann heißt M *kohärent*.

Sei X eine algebraische Varietät und sei $\mathcal{F}$ ein $\mathcal{O}_X$-Modul. Dann heißt $\mathcal{F}$ quasikohärent (kohärent), wenn es eine offene, affine überdeckung U_i von X gibt, so dass $\mathcal{F}|_{U_i}$ quasikohärent (kohärent) auf jedem U_i ist.

Schnitte

Definition 52. Notation: Wir setzen:

$$\mathcal{F}(U) := \Gamma(U, \mathcal{F}).$$

Die Elemente von $\Gamma(U, \mathcal{F})$ werden *Schnitte* von $\mathcal{F}$ über U genannt. Wenn $U = X$ nennt man die dazugehörigen Schnitte *globale Schnitte*.

Schnittvielfachheit

Definition 53. Seien $F, G \in R := k[X, Y]$ zwei teilerfremde Polynome, $I := (F, G)$ und $Z := V(F, G)$ (endlich). Die Schnittvielfachheit $\mu_P(F, G)$ von F und G ist die Vielfachheit des endlichen Schemas Z in P.

Alternativ:

$$\mu_P(F, G) := \dim_k \mathcal{O}_{k^2, P}/(F, G).$$