Vortrag 11: Der Satz von Bézout

Friedrich Feuerstein, Christian Pehle

17. Juli 2009

1 Einleitung

Ziel dieses Vortrages ist es zu zeigen, dass zwei Kurven vom Grad s bzw. t in der Ebene genau st Schnittpunkte haben. Wir haben im ersten Vortrag gesehen, dass dafür einige zusätzliche Annahmen nötig sind:

1. Die Kurven haben keine gemeinsame Komponenten.
2. Der Grundkörper K ist algebraisch abgeschlossen.
3. Wir betrachten die Kurven im projektiven Raum.
4. Wir zählen die Schnittpunkte mit Vielfachheiten.

1 bis 3 haben wir schon in früheren Vorträgen behandelt. Im letzten Vortrag wurde die Vielfachheiten im affinen Raum eingeführt. Nun übertragen wir sie in den projektiven Raum und setzen die erarbeiteten Beweisteile zusammen. Betrachten wir also im Folgenden zwei von null verschiedene homogene Polynome F, $G \in K[X,Y,T]$ ohne gemeinsame Faktoren vom Grad s bzw. t.

2 Satz von Bézout

2.1 Schnittvielfachheiten im projektiven Raum

Sei $P = (x,y,t) \in \mathbf{P}^2$. Eine der Koordinaten ist verschieden von null; wir können also annehmen, dass t verschieden von null und nach normieren $t = 1$ ist. Wir definieren die dehomogenisierten Polynome $F_\flat = F(X,Y,1)$ und $G_\flat$, sowie die Schnittvielfachheit in P durch $\mu_P(F,G) = \mu_{(x,y)}(F_\flat, G_\flat)$.
Es muss nun gezeigt werden, dass die Definition der Schnittvielfachheit unabhängig von der Wahl der Geraden im Unendlichen ist ($P = 0$ in diesem Fall). Sei $I(P)$ das homogene Primideal zum Punkt P in $\mathbf{P}^2$. Der lokale Ring $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2,P}$ ist der Unterring der Lokalisierung $K[X,Y,T]_{I(P)}$ an P, welcher aus den homogenen Elementen A/B mit $B(P) \neq 0$ gleichen Grades besteht. Sei J ein Ideal von $K[X,Y,T]$, so bezeichnet J_P die Einschränkung des Ideals, welches von J in $K[X,Y,T]_{I(P)}$ generiert wird, auf $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2,P}$.

Lemma 2.1. *Mit den vorangestellten Definitionen gibt es einen Ringisomorphismus zwischen*

$$\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2,P}/(F,G)_P \simeq \mathcal{O}_{K^2,P}/(F_\flat, G_\flat)$$

Beweis. Betrachte den Homomorphismus

$$\begin{aligned} \flat : K[X,Y,T] &\to K[X,Y] \\ F(X,Y,T) &\mapsto F(X,Y,1) \end{aligned}$$

durch ihn wird ein Homomorphismus $\Phi : K[X,Y,T]_{I(P)} \to K[X,Y]_{m_P} = \mathcal{O}_{K^2,P}$, $A/B \mapsto A_\flat/B_\flat$ induziert. (m_P ist das in K^2 zu P gehörige maximale Ideal). Die Einschränkung von Φ auf $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2,P}$ ist ein Isomorphismus zwischen $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2,P}$ und

$\mathcal{O}_{K^2,P}$ (Siehe Vortrag 7, Satz 1.10 oder Kapitel 3, 8.7). Da das Bild von (F, G) unter Φ $(F_\flat, G_\flat)$ ist, folgt die Behauptung durch Übergang auf den Quotienten. $\square$

Nun sind wir in der Lage, den Satz von Bézout zu formulieren:

Satz 2.2. *(Bézout) Sei $F, G \in K[X, Y, T]$ zwei homogene Polynome ohne gemeinsame Faktoren vom Grad s und t. So gilt*

$$\sum_{P \in V(F) \cap V(G)} \mu_P(F, G) = st$$

2.2 Die Verbindung zum affinen Fall

Lemma 2.3. *Die Menge $V(F) \cap V(G) \subset \mathbf{P}^2$ ist endlich.*

Beweis. Sei $D_\infty := \{P \in K[X, Y, T] \mid T = 0\}$ die unendlich ferne Gerade. Die Restriktion von $V(F)$ bzw. $V(G)$ auf D_∞ ist endlich oder die Gerade D_∞ selber, da F und G keine gemeinsamen Faktoren haben ist also $V(F) \cap V(G) \cap D_\infty$ endlich. Wir identifizieren $\mathbf{P}^2 - D_\infty$ mit K^2 auf die übliche Weise. Es gilt dann $V(F) \cap K^2 = V(F_\flat)$ (siehe Vortrag X oder Kapitel 3, 8.b) und analog $V(G) \cap K^2 = V(G_\flat)$. Da $F_\flat$, $G_\flat$ keine gemeinsamen Faktoren haben, ist

$$V(F) \cap V(G) \cap K^2 = V(F_\flat) \cap V(G_\flat)$$

endlich. Also ist auch

$$V(F) \cap V(G) = (V(F) \cap V(G) \cap D_\infty) \cup (V(F) \cap V(G) \cap K^2)$$

endlich. $\square$

Lemma 2.4. *Es gibt eine projektive Gerade D, welche keine Punkte mit $V(F) \cap V(G)$ gemeinsam hat.*

Beweis. Sei $Z \subset \mathbf{P}^2$ eine endliche Menge. Es soll gezeigt werden, dass es eine Gerade gibt, welche nicht Z trifft. Wähle $a \notin Z$ und betrachte die Geraden, welche durch a gehen. Von ihnen gibt es offenbar unendlich viele, aber nur endlich viele haben einen gemeinsamen Punkt mit Z. $\square$

2.3 Beschreibung der Strukturgarbe

Sei D eine projektive Gerade, welche nicht $Z = V(F, G)$ schneidet. Nach Homographie (welche nicht die Schnittvielfachheit von F und G oder ihren Grad ändert), kann angenommen werden, dass D die Gerade $T = 0$ ist und diese als Gerade im Unendlichen wählen. Nun wird $\mathbf{P}^2 - D_\infty$ mit K^2 indentifiziert und $V(F) \cap V(G) = V(F_\flat) \cap V(G_\flat) \subset K^2$. Wir versehen $Z = V(F_\flat, G_\flat)$ mit der Struktur eines Schemas wie in Vortrag 10 (Z ist *endlich* nach 2.3). Es ist bereits bekannt (Vortrag 10, Korollar 4.2), dass

$$\sum_{P \in V(F,G)} \mu_P(F, G) = \sum_{P \in V(F_\flat, G_\flat)} \mu_P(F_\flat, G_\flat) = \dim_K \Gamma(Z, \mathcal{O}_Z)$$

und es bleibt zu zeigen (siehe auch Vortrag 10, Korollar 4.3), dass

$$\dim_K \Gamma(Z, \mathcal{O}_Z) = \dim_K K[X,Y]/(F_\flat, G_\flat) = st$$

Sei $S = K[X,Y,T]$, $J = (F,G)$ (ein homogenes Ideal) und $B = S/J$ (ein graduierter S-Modul). Sei weiter $R = K[X,Y]$ und $I = (F_\flat, G_\flat)$ und bezeichne i die Inklusion von Z in K^2 und j die Inklusion von Z in $\mathbf{P}^2$. Es gibt dann die folgende Beschreibung von $\mathcal{O}_Z$.

Lemma 2.5. *Es gibt einen Isomorphismus* $i_*(\mathcal{O}_Z) \simeq \widetilde{R/I}$ *und* $j_*(\mathcal{O}_Z) \simeq \widetilde{S/J} = \tilde{B}$. *Insbesondere gilt* $\Gamma(Z, \mathcal{O}_Z) = \Gamma(\mathbf{P}^2, \widetilde{S/J})$

Beweis. Der erste Isomorphismus wurde in Vortrag 10, Satz 3.1 bewiesen, der zweite kann auf die selbe Weise bewiesen werden indem man $D(f)$ durch $D^+(f)$ ersetzt. □

Mit dem letzten Lemma genügt es zu zeigen, dass $\dim_K \Gamma(\mathbf{P}^2, \widetilde{S/J}) = st$

Lemma 2.6.
2.4 Beschreibung von $B = S/J$

Die folgende Sequenz von graduierten S*-Modulen ist exakt:*

$$0 \to S(-s-t) \xrightarrow{\psi} S(-s) \oplus S(-t) \xrightarrow{\phi} S \to B \to 0$$

Wobei $\psi(W) = (WG, -WF)$ *und* $\phi(U,V) = UF + VG$.

Beweis. Dies wurde in Vortrag 7, Satz 2.2 bzw. Kapitel 3, 10.1 bewiesen. □

Korollar 2.7. *Die folgende Sequenz von Garben ist exakt:*

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(-s-t) \to \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(-s) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(-t) \to \tilde{J} \to 0$$

$$0 \to \tilde{J} \to \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2} \to \widetilde{S/J} \to 0$$

Beweis. Garbifizierung ist exakt, die zweite Sequenz wurde auch schon in Vortrag 6, Beispiel 3.4 erwähnt. □

Wir möchten die Dimension globalen Schnitte $\Gamma(\mathbf{P}^2, \widetilde{B})$ bestimmen. Da aber Γ i.A. nur ein linksexakter Funktor ist, wird die exakte Sequenz aus 2.7 zu:

$$0 \to \Gamma(\mathbf{P}^2, \widetilde{J}) \to \Gamma(\mathbf{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}) \to \Gamma(\mathbf{P}^2, \widetilde{B})$$

Die letzte Abbildung ist aber nicht surjektiv, weil $\dim \Gamma(\mathbf{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}) = 1$ und wir möchten zeigen, dass $\dim \Gamma(\mathbf{P}^2, \widetilde{B}) = st$. Um dieses Problem zu umgehen, betrachten wir stattdessen die verschobene Garbe $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(d)$ (vgl. Vortrag 7, Definition 2.7).

2.5 Vergleich von $\widetilde{B}$ mit $\widetilde{B(d)}$

Satz 2.8. *Multiplikation mit T induziert eine Einbettung α von graduierten S-Modulen von $B(-1)$ nach B. Für $n \geq s+t-1$ ist die Abbildung $\alpha_n : B_{n-1} \to B_n$ surjektiv.*

Beweis. Injektivität: Sei $\bar{H} \in B(-1)$ und $\alpha(\bar{H}) = 0$. Das heißt $TH = UF + VG$ in S. Setzt man $T = 0$, so folgt $U(X,Y,0)F(X,Y,0) + V(X,Y,0)G(X,Y,0) = 0$. $F(X,Y,0)$ und $G(X,Y,0)$ teilerfremd, weil F und G sich nicht im Unendlichen schneiden. Folglich teilt $G(X,Y,0)$ $U(X,Y,0)$ also $U(X,Y,0) = C(X,Y)G(X,Y,0)$ und somit $V(X,Y,0) = -F(X,Y,0)C(X,Y)$. In S ist somit $U = GC + TU'$, $V = -FC + TV'$ und folglich $TH = T(U'F + V'G)$, also ist $H \in (F,G)$ und damit $\bar{0}$ in S/J. Die Surjektivität folgt aus der Injektivität und dem folgenden Lemma. □

Lemma 2.9. *Sei $d \geq s+t-2$, dann ist $\dim_K B_d = st$.*

Beweis. Die exakte Sequenz aus 2.4 geht für Grad d in

$$0 \to S_{d-s-t} \to S_{d-s} \oplus S_{d-t} \to S_d \to B_d \to 0$$

über, also $\dim B_d = \dim S_d - \dim S_{d-s} - \dim S_{d-t} + \dim S_{d-s-t}$. Es gilt für $n \geq -2$ (daher die Bedingung $n \geq s+t-2$) (Vortrag 7, Korollar 1.3):

$$\dim S_n = \binom{n+2}{2}$$

Damit folgt die Behauptung durch Ausrechnen. □

Korollar 2.10. *Multiplikation mit T induziert einen Garbenisomorphismus $\widetilde{B(-1)} \simeq \widetilde{B}$. (d.h. $\widetilde{B(d)}$ und $\widetilde{B}$ sind für alle d isomorph.)*

Beweis. Dies folgt aus 2.8 und Vortrag 7, Satz 2.4 bzw. Kapitel 3, 9.4 (weil Surjektivität für große n ausreicht). □

Indem wir $j_*(\mathcal{O}_Z)$ mit $\tilde{B}$ identifizieren kann Korollar 2.10 umformuliert werden zu:

Korollar 2.11. *Multiplikation mit T induziert einen Garbenisomorphismus $\mathcal{O}_Z(-1) \simeq \mathcal{O}_Z$ und für jedes $d \in \mathbb{N}$ existiert ein Isomorphismus $\mathcal{O}_Z \simeq \mathcal{O}_Z(d)$.*

2.6 Schlussfolgerung

Es bleibt zu zeigen, dass

$$\dim_K \Gamma(Z, \mathcal{O}_Z) = \dim_K \Gamma(\mathbf{P}^2, \widetilde{B(d)}) = \dim k[X,Y]/(F_\flat, G_\flat) = st$$

Da $\dim_K B_d = st$ für ausreichend großes d, genügt es einen Isomorphismus zwischen B_d und $K[X,Y]/(F_\flat, G_\flat)$ zu finden. Betrachte den Homomorphismus

$$\begin{aligned} \flat : K[X,Y,T] = S &\to K[X,Y] = R \\ F(X,Y,T) &\mapsto F(X,Y,1) \end{aligned}$$

Es ist $J_\flat = I$, folglich kann man $\flat$ auch als Homomorphismus von $B = S/J \to A = R/I$ betrachten. Die Einschränkung von $\flat$ auf B_d sei durch v_d bezeichnet.

Satz 2.12. *Die Abbildung $v = v_d : B_d \to R/I = K[X,Y]/(F_\flat, G_\flat)$ ist ein Isomorphismus für $d \geq s + t - 2$.*

Beweis. Injektivität: Sei $\bar{P} \in B_d$ das Bild von $P \in S_d$ und $v(\bar{P}) = 0$. Dann ist $P_\flat \in I$, d.h. $P_\flat = aF_\flat + bG_\flat$ mit $a, b \in K[X,Y]$. Die Abbildung $\sharp$ (siehe Vortrag 7, Satz 1.7, oder Kapitel 3, 8b) liefert $T^\alpha P = T^\beta a^\sharp F + T^\gamma b^\sharp G$ für $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}$. Folglich ist $T^\alpha P \in J$. Nach Satz 2.8 ist Multiplikation mit T injektiv in S/J, damit ist $P \in J$ und $\bar{P} = 0$. Surjektivität: Sei $\bar{f} \in K[X,Y]/I$ das Bild des Polynoms $f \in K[X,Y]$. Sei weiter $f^\sharp$ das zugehörige homogene Polynom mit Grad n und $\overline{f^\sharp}$ das Bild in B_n. Ist $n \leq d$, so wird das Element $T^{d-n}\overline{f^\sharp} \in B_d$ durch v auf f abgebildet. Ist $n > d \geq s + t - 2$, so ist Multiplikation mit T^{n-d} ein Isomorphismus zwischen B_d und B_n, d.h. $\overline{f^\sharp} = T^{n-d}\overline{P}$, wobei $\overline{P} \in B_d$ durch v nach f abgebildet wird. □

Literatur

[Perrin 2008] Perrin, D.: *Algebraic Geometry, An Introduction.* London : Springer, 2008