Vortrag 10: Schnittvielfachheiten

Thomas Schreiber, Johannes Röhrenbach

18. Juni 2009

1 Einführung

Ein wichtiges Ergebnis dieses Seminars ist der **Satz von Bézout**, welcher besagt, dass zwei ebene Kurven vom Grad s und t genau st Schnittpunkte haben. Wie wir in den vergangenen Vorträgen bereits gesehen haben, muss man bei dieser Aussage sorgfältig vorgehen:

- Man muss voraussetzen, dass die Kurven keine gemeinsamen Komponenten haben
- Man muss den Grundkörper k als algebraisch abgeschlossen annehmen
- Man muss im projektiven Raum arbeiten
- Man muss die Vielfachheiten der Schnitte zählen

Dieser Vortrag wird sich mit dem letzten Punkt befassen. Da Vielfachheit ein lokaler Begriff ist, arbeiten wir zunächst in affinen Räumen.

2 Endliche Schemata

Wir möchten mit einem Beispiel starten: Sei $C = V\left(Y - X^2\right)$ die Normalparabel und $D_\lambda = (Y - \lambda)$ eine Gerade. Der Schnitt dieser beiden Varietäten ist also $C \cap D_\lambda = V\left(Y - X^2, Y - \lambda\right)$.
Sei $I_\lambda = \left(Y - X^2, Y - \lambda\right) = \left(X^2 - \lambda, Y - \lambda\right)$, also $C \cap D_\lambda = V\left(I_\lambda\right)$,
$A_\lambda = k\left[X, Y\right]/I_\lambda$ der zugehörige Restklassenring.
Dann ist $A_\lambda \cong k\left[X\right]/\left(X^2 - \lambda\right)$ (denn $Y \equiv \lambda \; mod \; I_\lambda$).

a) Sei $\lambda \neq 0$, so setze $\alpha^2 := \lambda$. Es ist dann $A_\lambda \cong k \times k$ via dem Ringisomorphismus $k\left[X\right]/\left(X^2 - \lambda\right) \longrightarrow k \times k, X \longmapsto (\alpha, -\alpha)$.
$k \times k$ ist offensichtlich reduziert, also auch A_λ
$\Rightarrow I_\lambda = \sqrt{I_\lambda} = I\left(C \cap D_\lambda\right)$ und A_λ ist der zu $C \cap D_\lambda$ gehörige Ring.
$\Rightarrow C \cap D_\lambda = \left\{(\alpha, \lambda), (-\alpha, \lambda)\right\}$ besteht aus zwei verschiedenen Punkten; der lokale Ring in beiden Punkten ist k.
b) Ist $\lambda = 0$, also D_0 tangential zu C, so ist
$A_0 \cong k\left[X\right]/\left(X^2\right) = \left\{a + b\epsilon;\; a, b \in k, \epsilon^2 = 0\right\} =: k\left[\epsilon\right]$.
Also ist A_0 nicht reduziert (da X nilpotent) und $I\left(C \cap D_0\right) = \sqrt{I_0} = (X, Y)$.
Es ist $C \cap D_0 = \left\{(x, y) \in k^2;\; y = x^2 \; und \; y = 0\right\} = \left\{(0, 0)\right\}$; der lokale Ring in $(0, 0)$ ist wieder k.

Problem: Was ist die Schnittvielfachheit in $(0,0)$?

Lösung: Wir fassen $C \cap D_0$ nicht als Varietät, sondern als Schema auf. Der lokale Ring in $(0,0)$ ist dann $\Gamma((0,0)) = k[X] / (X^2) = k[\epsilon]$ und nicht k. Dies führt uns zu folgender Definition:

Definition 2.1. *Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper, Z eine endliche Menge, ausgestattet mit der diskreten Topologie. Der geringte Raum $(Z, \mathcal{O}_Z)$ heißt dann* endliches Schema*, wenn $\mathcal{O}_Z(P) := \mathcal{O}_Z(\{P\})$ für alle $P \in Z$ (lokale) k-Algebra endlicher Dimension ist. ($\mathcal{O}_Z(P)$ aufgefasst als k-Vektorraum, d.h. $\mathcal{O}_Z(P)$ endliche k-Algebra)*
$\mu_P(Z) := dim_k \mathcal{O}_Z(P)$ heißt dann Vielfachheit *von Z in P.*

Bemerkung 2.2.
1) *$\mathcal{O}_Z(P)$ ist auch der lokale Ring von Z in P, d.h. $\mathcal{O}_Z(P) = \mathcal{O}_{Z,P}$. (siehe Vortrag 6, 1.2 bzw. Kap. III, 5.1)*

2) *Das maximale Ideal $m_P := m_{Z,P} = \{f \in \mathcal{O}_{Z,P};\ f(P) = 0\}$ von $\mathcal{O}_{Z,P}$ ist sein einziges Primideal.*
In der Tat: ist I ein Primideal von $\mathcal{O}_{Z,P}$, so ist $\mathcal{O}_{Z,P}/I$ nullteilerfrei und *somit ein Körper, da von endlicher Dimension über k. Also I* maximales *Ideal, also $I = m_P$*
Es ist m_P also das Nilradikal *von $\mathcal{O}_{Z,P}$; seine Elemente sind demnach nilpotent. Da m_P auch endlich erzeugt, ist m_P selbst nilpotent, d.h. $\exists n \geq 1$ mit $(m_P)^n = 0$.*

3) *Jede endliche Varietät wird trivialerweise zu einem endlichen Schema, wenn man k als lokalen Ring in jedem Punkt wählt. Alle Punkte besitzen dann die Vielfachheit* 1.

Satz 2.3. *Sei $(Z, \mathcal{O}_Z)$ ein endliches Schema, $V \subseteq Z$ Teilmenge. Dann gilt*

$$\Gamma(V, \mathcal{O}_Z) = \prod_{P \in V} \mathcal{O}_{Z,P}$$

Sei umgekehrt Z endliche Menge und für jeden Punkt $P \in Z$ eine lokale endliche k-Algebra gegeben. Dann definiert $\Gamma(V, \mathcal{O}_Z) = \prod_{P \in V} \mathcal{O}_{Z,P}$, $V \subseteq Z$ Teilmenge, auf Z die Struktur eines endliche Schemas.

Beweis: Diese Aussage ist klar. Wir ordnen jedem Schnitt $f \in \Gamma(V, \mathcal{O}_Z)$, $V = \{x_1, ..., x_n\} \subseteq Z$ Teilmenge, das Tupel $(f\,\big|_{\{x_1\}}, ..., f\,\big|_{\{x_n\}}) \in \prod_{i=1}^{n} \mathcal{O}_{Z,x_i}$ zu. Die Verklebungseigenschaft ist in diesem Fall trivialerweise erfüllt. q.e.d.

Definition 2.4. *Sei $(Z, \mathcal{O}_Z)$ ein endliches Schema. Dann schreibt man*

$$Z = Spec(\Gamma(Z, \mathcal{O}_Z))$$

Bemerkung 2.5. *1) $\Gamma(Z, \mathcal{O}_Z)$ ist eine endliche k-Algebra, da $\Gamma(Z, \mathcal{O}_Z)$ ein Produkt von endlich-dimensionalen lokalen Ringen $\mathcal{O}_{Z,P}$ ist. (vgl. Definition 2.1 Satz 2.3)*

2) Es gilt: $(Z, \mathcal{O}_Z)$ ist eine Varietät $\iff \Gamma(Z, \mathcal{O}_Z)$ ist reduziert.

Beispiel: Sogar ein einzelner Punkt kann durch Zuordnung eines lokalen Ringes viele verschiedene Schema-Strukturen aufweisen , bspw. $k[X]/(X^n)$ oder $k[X,Y]/(X^2, XY, Y^2)$.

3 Ein endliches Schema auf dem Schnitt zweier ebener affiner Kurven

Seien $F, G \in k[X,Y], F, G \neq 0$, teilerfremde Polynome. Nach Vortrag 2 ist dann die Menge $Z = V(F,G)$ endlich und die Algebra $k[X,Y]/(F,G)$ ist endlich-dimensional als k-Vektorraum. Unser Ziel ist es nun, auf Z die Struktur eines endlichen Schemas zu definieren.
In Vortrag 6 haben wir gesehen, dass für eine abgeschlossene Teilmenge Z einer affinen Varietät X mit $R = \Gamma(X)$ und $I = I(Z)$, gilt $\mathcal{O}_Z = \widetilde{R/I}$ (vgl. III 7.4). Wie das Beispiel mit $C \cap D_0$ andeutete, werden wir obige Formel benutzen um $\mathcal{O}_Z$ zu definieren (ersetze $I(Z)$ durch(F,G)). Wir werden eine genaue Beschreibung der Garbe $\widetilde{R/I}$ benötigen, welche wir nun allgemein geben:

Satz und Definition 3.1. *Sei X eine irreduzible affine algebraische Varietät und sei $R = \Gamma(X)$. Sei $I \subseteq R$ ein Ideal und Z die abgeschlossene Menge $V(I)$ (wir fordern nicht $I = I(Z)$). Sei i die Inklusion von Z in X und sei $\mathcal{F} = \widetilde{R/I}$. Sei $D(f)$ eine offene Standardmenge in X. Dann gelten folgende Aussagen:*

1) Ist $D(f) \cap Z = \emptyset \Longrightarrow \Gamma(D(f), \mathcal{F}) = 0$

2) Ist $D(f) \cap Z = \{x\} \Longrightarrow \Gamma(D(f), \mathcal{F}) = \mathcal{O}_{X,x}/I\mathcal{O}_{X,x}$

3) Ist $D(f) \cap Z = \{x_1, ..., x_n\} \Longrightarrow \Gamma(D(f), \mathcal{F}) = \prod_{i=1}^{n} \mathcal{O}_{X,x_i}/I\mathcal{O}_{X,x_i}$

4) Die Menge $Z = V(I)$ ist endlich $\Longleftrightarrow$ R/I ist endlich-dimensional als k-Vektorraum;
Z ist dann diskret und wir können auf Z eine Garbe von Ringen definieren, indem wir für jedes $U \subseteq Z$:

$$\Gamma(U, \mathcal{O}_Z) := \prod_{x \in U} \mathcal{O}_{X,x}/I\mathcal{O}_{X,x}$$

setzen. Dann ist $\mathcal{F} = i_* \mathcal{O}_Z$. Insbesondere ist

$$\Gamma(Z, \mathcal{O}_Z) = \Gamma(X, \mathcal{F}) = R/I = \prod_{x \in Z} \mathcal{O}_{X,x}/I\mathcal{O}_{X,x}$$

Der geringte Raum $\Gamma(Z, \mathcal{O}_Z)$ ist ein endliches Schema, bezeichnet mit $Spec(R/I)$ wie in 2.4.

Beweis: Es gilt $\Gamma(D(f), \mathcal{F}) = (R/I)_f = R_f/IR_f$

1) Sei $D(f) \cap Z = \emptyset$. Dann ist $Z \subseteq V(f)$ und f verschwindet daher auf $Z = V(I)$. Somit ist $f \in I(V(I)) = \sqrt{I} \Rightarrow f^r \in I$ für ein $r \in \mathbb{N}$, also $f^r = 0$ in $(R/I)_f = R_f/IR_f$. Andererseits ist f^rinvertierbar in R_f/IR_f. Daher kann R_f/IR_f nur der Nullring sein $\Rightarrow \Gamma(D(f), \mathcal{F}) = R_f/IR_f = 0$

2) Sei $D(f) \cap Z = \{x\}$. Wir können den Punkt x mit dem maximalen Ideal $m_x (= \{f \in R \,|\, f(x) = 0\})$ in R identifizieren (vgl. I.4.9).
$x \in D(f)$ bedeutet $f \notin m_x$; damit definiert m_x auch ein maximales Ideal in R_f.
$x \in Z$ bedeutet, dass $I \subseteq m_x$, daher definiert m_x ein maximales Ideal in R_f/IR_f.
Ist x einziger Punkt in $D(f) \cap Z$, dann bedeutet dies, dass das durch m_x definierte Ideal in R_f/IR_f das einzige maximale Ideal in R_f/IR_f. Somit ist R_f/IR_f lokal.
$\Rightarrow R_f/IR_f = (R_f/IR_f)_{m_x} = R_{m_x}/IR_{m_x} = \mathcal{O}_{X,x}/I\mathcal{O}_{X,x}$

3) Sei $D(f) \cap Z = \{x_1, ..., x_n\}$. Seien $f_1, ..., f_n \in R$ mit $f_i(x_i) \neq 0$ und $f_i(x_j) = 0$ für $i \neq j$. Dann ist $x_i \in D(ff_i)$ und $x_i \notin D(ff_j)$, $i \neq j$. Wir bestimmen nun $\Gamma(D(f), \mathcal{F})$ indem wir $D(f)$ mit den Mengen $D(ff_i)$ und $D(g_j)$ überdecken, wobei die Mengen $D(g_j)$ disjunkt zu Z sind. Wir haben somit einen injektiven Homomorphismus:

$$\varphi\colon \Gamma(D(f),\mathcal{F}) \to \prod_{i=1}^{n} \Gamma(D(ff_i),\mathcal{F}) \times \prod_j \Gamma(D(g_j),\mathcal{F})$$

Nach 1) gilt $\Gamma(D(g_j),\mathcal{F}) = 0$ und es bleiben nur noch die Mengen $\Gamma(D(ff_i),\mathcal{F})$ übrig.
Da für $i \neq j$ $D(ff_i) \cap D(ff_j) \cap Z = D(ff_if_j) \cap Z = \emptyset$ gilt, ist die Verklebungsbedingung trivialer Weise erfüllt und φ ist somit ein Isomorphismus. Nach 2) gilt $\Gamma(D(g_j),\mathcal{F}) = \mathcal{O}_{X,x_i}/I\mathcal{O}_{X,x_i}$ woraus die Behauptung folgt.

4) " $\Leftarrow$ ": Sei R/I endlich-dimensional als k-Vektorraum. Dann ist, da $I \subset I(Z)$, der Ring $\Gamma(Z) = R/I(Z)$ endlich-dimensional, und somit ist Z endlich (vgl. I.4.8).
" $\Rightarrow$ ": Sei Z endlich. Dann ist der Ring $\Gamma(Z) = R/I(Z) = R/\sqrt{I}$ endlich-dimensional. Wendet man nun die Formel aus 3) mit $f = 1$ an, so sieht man, dass R/I ein Produkt von lokalen Ringen ist. Da $I \subset I(Z)$ gilt das Gleiche für $\Gamma(Z) = R/I(Z)$, wobei bei letzterem alle lokalen Ringe gleich k sind (s. 2.2)
Die lokalen Ringe von R/I haben somit alle nilpotente maximale Ideale, also sind wir fertig, wenn wir folgendes Lemma beweisen:

Lemma 3.2. *Sei A eine lokale endlich erzeugte k-Algebra mit maximalem Ideal m, wobei $k = A/m$. Sei m nilpotent, also $m^n = 0$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Dann ist A endlich-dimensional über k.*

Beweis: Betrachte folgende Kette:

$$0 = m^n \subset m^{n-1} \subset .... \subset m \subset A$$

Da A endlich erzeugt ist, gilt das Gleiche für die Ideale m^i. Somit sind die Quotienten m^i/m^{i+1} alle endlich-dimensional als k-Vektorraum. Und wir können mit der Dimensionsformel für Vektorräume folgern, dass A endlich-dimensional ist. q.e.d.

Zurück zu 4): Dass $\mathcal{F} = i_*\mathcal{O}_Z$ ist, folgt aus 3). Und schließlich ist $(Z,\mathcal{O}_Z)$ genau dann ein endliches Schema, wenn die lokalen Ringe $\mathcal{O}_{X,x}/I\mathcal{O}_{X,x}$ endlich-dimensional über k sind.
Dies folgt, da R/I endlich-dimensional als k-Vektorraum ist. q.e.d.

Bemerkung 3.3. *Die oben definierte Garbe von Ringen $\mathcal{O}_Z$ heißt das Urbild der Garbe $\mathcal{F}$ unter der Abbildung i, und man schreibt $i^*(\mathcal{F})$.*

Zurück zum Beginn des Abschnitts: Wir definieren auf $V(F,G)$ nun die Struktur eines endlichen Schemas als Spezialfall von Satz 3.1:

Satz 3.4. *Seien $F, G \in R := k[X,Y]$ zwei teilerfremde Polynome, $I := (F,G)$ und $Z := V(F,G)$ (Z ist endlich).*
Wir statten Z mit der Struktur eines geringten Raumes aus, indem wir $\mathcal{O}_Z$ wie in 3.1 definieren $\left(\mathcal{O}_Z = i^*\left(\widetilde{R/I}\right)\right)$. Dann gilt:
Der geringte Raum $(Z, \mathcal{O}_Z)$ ist ein endliches Schema.
Weiter gilt $\mathcal{O}_{Z,P} = \mathcal{O}_{k^2,P}/(F,G)$ für den lokalen Ring von Z in P und

$$k[X,Y]/(F,G) \cong \prod_{P \in Z} \mathcal{O}_{k^2,P}/(F,G) = \Gamma(Z, \mathcal{O}_Z),$$

also $Z = Spec(R/I) = Spec(k[X,Y]/(F,G))$.

4 Schnittvielfachheiten

Definition 4.1. *Mit der Notation aus Satz 3.4 definieren wir die* Schnittvielfachheit *$\mu_P(F,G)$ von F und G als die Vielfachheit $\mu_P(Z)$ des endlichen Schemas $Z = V(F,G)$ in P.*
Alternativ: $\mu_P(F,G) := dim_k \mathcal{O}_{k^2,P}/(F,G)$

Korollar 4.2. *Mit der Notation aus Satz 3.4 ist*

$$\textstyle\sum_{P \in V(F,G)} \mu_P(F,G) = dim_k k[X,Y]/(F,G) = dim_k \Gamma(Z, \mathcal{O}_Z)$$

Beachte: diese Gleichung enthält schon einen großen Teil der Information, die wir suchen; die Summe der Vielfachheiten von Schnittpunkten.

Bemerkung 4.3. *1) Wir können nun also Schnittvielfachheiten zählen. Allerdings stoßen wir auf Probleme, wenn wir zum projektiven Fall übergehen; einige Punkte im Unendlichen könnten übergangen werden (der Satz von Bézout berücksichtigt jedoch auch diese).*
Bsp: $F = X, G = X - 1$.

2) Definition 3.5 ist sogar für $P \notin V(F,G)$ sinnvoll. Es gilt dann $\mu_P(F,G) = 0$, denn $F(P) \neq 0, G(P) \neq 0$, also F, G invertierbar in $\mathcal{O}_{k^2,P}$, also $\mu_P(F,G) = dim_k \mathcal{O}_{k^2,P}/(F,G) = dim_k 0 = 0$.

3) *Eine axiomatische Definition von Vielfachheit, sowie ein Algorithmus zur Berechnung ist in* Fulton, Algebraic Curves, Kap. III *zu finden. (siehe auch Problem VII in Perrin, Algebraic Geometry)*

4) *Wie wir in Satz 3.1 gesehen haben, ist also jede endliche k-Algebra isomorph zu einem Produkt von endlichen lokalen k-Algebren. Es ist nun einfach zu folgern, dass der Funktor*

$$\begin{aligned} \{\textit{endliche Schemata}\} &\longrightarrow \{\textit{endliche } k\textit{-Algebren}\}, \\ Z &\longmapsto \Gamma(Z, \mathcal{O}_Z) \end{aligned}$$

eine Gleichstellung von Kategorien ist.

Beispiel: Betrachte $X^3 - X^2 - Y, Y \in k[X, Y]$.
Gesucht ist die Schnittvielfachheit in $P = (0, 0)$.
Sei $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{k^2,P}$ der lokale Ring in P. Dann gilt
$I\mathcal{O} = (X^3 - X^2 - Y, Y) = (X^3 - X^2, Y) = (X^2(X - 1), Y) = (X^2, Y)$, da $(X - 1)$ invertierbar in $\mathcal{O}$.
Weiter folgt also:

$$\mathcal{O}/I\mathcal{O} \cong k[X, Y]/(X^2, Y) \cong k[X]/(X^2)$$

ist zweidimensional, d.h. $\mu_P(X^3 - X^2 - Y, Y) = 2$.

Literatur:

Daniel Perrin *Algebraic Geometry*, Seiten 101-105 Springer London 2008