Seminarankündigung
- Geometrie algebraischer Varietäten -

Prof. Dr. K. Wingberg
J. Bartels

für das Sommersemester 2009

Thema

Was ist algebraische Geometrie? Diese Frage könnte ebenso als Titel des Seminars herhalten. Es sei eine Familie $(f_i)_{1 \leq i \leq m}$ von Funktionen gegeben. In Abhängigkeit der mathematischen Disziplin, die man verfolgt, ist man an verschiedenen Objekten interessiert:

Topologie	topologische Räume	stetige Funktionen
Algebraische Geometrie	algebraische Varietäten	polynomiale Funktionen
Differentialgeometrie	differenzierbare Mannigfaltigkeiten	differenzierbare Funktionen
Komplexe Geometrie	komplexe Mannigfaltigkeiten	analytische Funktionen

Das Seminar im kommenden Semester wird das Augenmerk auf den algebraischen Teil richten: d.h. die zu untersuchenden Funktionen f_i werden Polynome in mehreren Variablen sein, deren Koeffizienten in einem Körper k liegen. Im Vergleich zur linearen Algebra (zwar mehrere Funktionen in mehreren Variablen, aber alle nur linear) und zur Algebra (keine Gradbeschränkung, doch nur eine Funktion) liefert der Gegenstand, welcher nun untersucht wird, eine wirkliche Verallgemeinerung dieser beiden Disziplinen. Geometrisch gesehen wird es dabei um die Nullstellenmengen solcher Polynome im Raum gehen. Es drängen sich dabei sofort Fragen auf, wie beispielsweise:

1. Wie ist der Durchschnitt solcher Mengen beschaffen?
2. Wie ist ein Dimensionsbegriff zu definieren, der mit unserer Anschauung übereinstimmt?

Der gewählte Zugang zur Algebraischen Geometrie soll zudem deutlich machen, daß sich die erarbeiteten Konzepte leicht auf die oben genannten Disziplinen übertragen lassen (und das werden sie auch!).

Inhalt

Bis in die 40-er Jahre des vergangenen Jahrhunderts bedeutete Algebraische Geometrie, sich allein auf solche Nullstellenmengen im affinen $\mathbb{A}^n(k)$ oder projektiven Raum $\mathbb{P}^n(k)$ zu beschränken. Im Zuge der durch Weil, Serre und Grothendieck vorangetriebenen Entwicklung wurde es nötig, den Begriff der Varietät abstrakter zu fassen, was erst durch die Definition einer Topologie auf den Nullstellenmengen ermöglicht wird. Neben der Einführung oben genannter Räume ist dies der zentrale Teil der ersten Seminarvorträge.

Es werden anschließend auf offenen Mengen gewisse Funktionenräume eingeführt, die in den Begriff der Garbe - ein Konzept aus der komplexen Geometrie - miteinfließen. Dieser wichtige - und sehr oft in anderen Gebieten auftauchende - Begriff der Garbe wird es ermöglichen, Varietäten zu definieren. Jene grundlegenden Objekte - Garbe und Varietät - werden ausführlich in der Mitte des Semesters behandelt.

Es ist dann möglich, die oben angesprochenen Probleme mit diesen Begriffen nicht nur algebraisch zu fassen, sondern sie auch in Angriff zu nehmen. Wenn dies geschehen ist, bietet es sich an, einen Blick an den Horizont zu werfen: in die Welt der Kohomologie. Dafür werden die letzten Vorträge in Anspruch genommen.

Nota bene

Aus physikalischer Sicht liefert die Geometrie den gegenwärtig favorisierten Ansatz zur Entwicklung einer einheitlichen Theorie, welche die Fundamentalkräfte der Physik beschreiben soll - konkret geht es um die Einbindung der Gravitation in die Elektrodynamik oder Quantenmechanik. Die Modelle, welche seit den 70-er Jahren des vergangenen Jahrhunderts in Erwägung gezogen werden, sowie deren zugrunde liegende Theorien bedienen sich sämtlich höherdimensionaler komplexer Mannigfaltigkeiten mit gewissen - physikalisch interpretierbaren - Garben, welche auch in der algebraischen Geometrie vorkommen. Sie werden gebraucht, um diverse Freiheitsgrade in der Stringtheorie zu eliminieren und dadurch eine Theorie zu bekommen, die nicht mehr als vier Dimensionen benötigt.

Voraussetzungen/Adressaten

Nachdem nun grob umrissen wurde, worum es im Sommersemester gehen soll, ein paar Bemerkungen zur Zielgruppe und zu den Teilnahmevoraussetzungen. Neben dem Interesse, sich ein Thema selbständig zu erarbeiten und einen Vortrag darüber halten zu wollen, sind Kenntnisse der Algebra unabkömmlich. Weniger geht es dabei um die Galoistheorie, als um die Stichpunkte Lokalisierung, Restklassenring, chinesischer Restsatz, Ideale, Primideale, maximale Ideale, (endlich erzeugte) k-Algebren, usf. In Frage kommen sollte die Teilnahme also für alle Studenten höherer (d.h. ab dem vierten) Semester, die die Vorlesung Algebra I gehört haben.
Interessenten können sich direkt melden: bartels@mathi.uni-heidelberg.de

Auf Anfrage wird ein vorläufiges Semesterprogramm gern zugeschickt. Die Vortragseinteilung erfolgt in einer noch anzukündigenden Vorbesprechung am Ende des Semesters.

gez.: J. Bartels.