Übungen zur Algebra I

- 8. Blatt -

Prof. Dr. K. Wingberg
J. Bartels

WS 2010/2011
abzugeben bis Donnerstag, den 9. Dezember 2010 um 9:15 Uhr
in den Kästen neben dem Seifertraum

http://www.mathi.uni-heidelberg.de/~bartels/Vorlesung

Name:	/name/	Matrikelnummer:	/nr/
Übungsleiter:	/uebleiter/		
2. Name:	/namezwei/	2. Matrikelnummer:	/nrzwei/

Man achte auf eine saubere Darstellung und eine ordentliche Schrift.
Bitte keine maschinell erstellten Lösungen abgeben.

Aufgabe	1	2	3	4	$\sum$
Punkte					

---

1 . Aufgabe (6 Punkte):
Es sei $p > 0$ eine Primzahl und K ein Körper der Charakteristik p.

a) Es seien Elemente $a, b \in K \setminus K^p$ und $\alpha, \beta \in \overline{K}$ derart gegeben, daß $\alpha^p = a$ und $\beta^p = b$ gilt. Zeigen Sie, daß $K(\alpha) = K(\beta)$ genau dann gilt, wenn $K^p(a) = K^p(b)$ gilt. Hierbei bezeichne $\overline{K}$ einen fest gewählten algebraischen Abschluß zu K.

b) Wenn $[K : K^p] = p$ ist, dann zeige man, daß für gegebenes $n \in \mathbb{N}$ es stets eine und nur eine Teilerweiterung in $\overline{K}$ gibt, welche rein inseperabel vom Grad p^n über K ist, gibt.

c) Ist E/K eine endliche Erweiterung mit $[E : K]_i = p^r$, $r \in \mathbb{N}$ und gibt es kein $s < r$, so daß $E^{p^s}K$ über K separabel ist, dann ist E eine einfache Erweiterung.

2 . Aufgabe (6 Punkte):
Es sei $f(X) \in K[X]$ ein normiertes Polynom $n^{\underline{ten}}$ Grades mit Koeffizienten aus einem Körper K. Ω/K sei ein fest gewählter algebraischer Abschluß von K und $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\} \subset \Omega$ die Menge der Nullstellen von $f(X)$ in K.

a) Zeigen Sie, daß
$$D(f) := \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\alpha_i - \alpha_j)^2$$
ein Element des Körpers K ist.

b) Die Determinante aus der zweiten Aufgabe des fünften Aufgabenblatts wird mit $R(f, g)$ bezeichnet. Zeigen Sie, daß
$$D(f) = (-1)^{n(n-1)/2} R(f, f') \text{ gilt.}$$

3 . Aufgabe (6 Punkte):
Es sei $f(X) = X^3 + aX^2 + bX + c$ ein Polynom aus $\mathbb{Q}[X]$.

a) Finden Sie eine lineare Transformation $Y = \alpha X + \beta$ derart, daß daraus das Polynom $f(Y) = Y^3 + pY + q$ wird.

b) Berechnen Sie $D(f)$ aus Aufgabe 2.

4 . Aufgabe (6 Punkte):
Es sei F ein Körper der Kardinalität q. Wenn $d \geq 1$ ist, bezeichne I_d die Menge der normierten irreduziblen Polynome vom Grad d aus $F[X]$ und N_d ihre Anzahl.

a) Es sei $n \geq 1$. Zeigen Sie, daß der Grad eines irreduziblen Teilers von $X^{q^n} - X$ die Zahl n teilt und daß umgekehrt jedes Element aus I_d ein Teiler von $X^{q^n} - X$ ist, wenn $d|n$ gilt.

b) Zeigen Sie die Gleichheit
$$q^n = \sum_{d|n} dN_d.$$

c) Zeigen Sie, daß für $n \in \mathbb{N}$
$$N_n \geq \frac{1}{n} q^n \frac{q-2}{q-1} \text{ gilt.}$$

d) Es sei $\mu : \mathbb{N} \setminus \{0\} \to \{-1, 0, 1\}$ durch $\mu(n) = (-1)^r$ gegeben, wenn n das Produkt von r verschiedenen Primzahlen ist und im sonstigen Fall durch $\mu(n) = 0$ definiert. Zeigen Sie: Wenn f und g zwei Funktionen von $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ nach $\mathbb{C}$ sind, dann gilt $f(n) = \sum_{d|n} g(d)$ genau dann für jedes n, wenn $g(n) = \sum_{d|n} \mu(n/d) f(d)$ für jedes n gilt. Insbesondere gilt
$$N_n = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \mu(n/d) q^d$$
.