Übungen zur Algebra I
- 7. Blatt -

Prof. Dr. K. Wingberg
J. Bartels

WS 2010/2011
abzugeben bis Donnerstag, den 2. Dezember 2010 um 9:15 Uhr
in den Kästen neben dem Seifertraum

http://www.mathi.uni-heidelberg.de/~bartels/Vorlesung

Name:	/name/	Matrikelnummer:	/nr/
Übungsleiter:	/uebleiter/		
2. Name:	/namezwei/	2. Matrikelnummer:	/nrzwei/

Man achte auf eine saubere Darstellung und eine ordentliche Schrift.
Bitte keine maschinell erstellten Lösungen abgeben.

Aufgabe	1	2	3	4	$\sum$
Punkte					

---

1 . Aufgabe (6 Punkte):
Es sei A ein kommutativer Ring mit 1. Betrachtet man den Polynomring $A[X_1, ..., X_n]$, dann definiert man

$$S_p(X) := \sum_{1 \leq i_1 < ... < i_p \leq n} X_{i_1} ... X_{i_p} \text{ für } 1 \leq p \leq n$$

und

$$N_p(X) := \sum_{1 \leq i \leq n} X_i^p \text{ für alle } p \geq 1.$$

a) Zeigen Sie, daß die Polynome $N_p(X)$ ein ganzzahliges Polynom in den $S_i(X)$ darstellen, d.h. es gibt ein Polynom $P_p(T) \in \mathbb{Z}[T_1, ..., T_n]$ mit

$$P_p(S_1(X), ..., S_n(X)) = N_p(X).$$

b) Zeigen Sie per Induktion über den Grad von $P(X_1, ..., X_n)$: Ist ein Polynom $P(X_1, ..., X_n)$ bezüglich jeder Permutation $\sigma \in S_n$ invariant, d.h. $P(X_{\sigma(1)}, ... X_{\sigma(n)}) = P(X_1, ..., X_n)$, dann gilt

$$P(X_1, ..., X_n) = Q(S_1(X), ..., S_n(X))$$

für genau ein Polynom $Q(T_1, ..., T_n) \in A[T_1, ..., T_n]$.

2 . Aufgabe (6 Punkte):
Es sei K ein Körper der Charakteristik 0 und

$$Q(X) := Z^3 - S_1(z_1,z_2,z_3)Z^2 + S_2(z_1,z_2,z_3)Z - S_3(z_1,z_2,z_3) \in K[Z]$$

gegeben. Die Polynome $S_i(Z_1,Z_2,Z_3)$ entnehme man der vorangegangenen Aufgabe. Für das Argument (z_1,z_2,z_3) mögen ihre Funktionswerte sämtlich in K liegen. Dabei sei

$$\begin{aligned} z_1 &= (x_1+x_2)(x_3+x_4) \\ z_2 &= (x_1+x_3)(x_2+x_4) \\ z_3 &= (x_1+x_4)(x_2+x_3) \end{aligned}$$

mit algebraischen Zahlen x_1,x_2,x_3,x_4 über K. Es gelte $\sum_i x_i = 0$. Zeigen Sie die Gleichungen:

a) $S_1(z_1,z_2,z_3) = 2S_2(x_1,x_2,x_3,x_4)$ und $S_2(z_1,z_2,z_3) = (S_2(x_1,x_2,x_3,x_4))^2 - 4S_4(x_1,x_2,x_3,x_4)$.

b) $S_3(z_1,z_2,z_3) = -(S_3(x_1,x_2,x_3,x_4))^2$.

c) Geben Sie die x_i in Abhängigkeit der z_i an.

3 . Aufgabe (6 Punkte):
Sie haben in der Vorlesung diverse Faktorisierungsmethoden und Irreduzibilitätskriterien kennengelernt. Wenden Sie diese auf die folgenden Polynome aus $\mathbb{Q}[X]$ an und ermitteln Sie ihre Zerlegbarkeit resp. Zerlegung.

a) $7X^5 + 4X^4 - 2X^3 + 5X^2 - 6X + 11$

b) $X^5 + 3X^4 - 2X^3 - 4X^2 + 5X + 4$

4 . Aufgabe (6 Punkte):
Es seien N, H zwei Gruppen und $Aut(N)$ die Automorphismengruppe von N und $\varphi : H \to Aut(N)$ ein Gruppenhomomorphismus. Auf $N \times H$ (als Menge) definiert man die Verknüpfung:

$$(n,h) * (n',h') := (n\varphi(h)(n'), hh'), \text{ wobei } n,n' \in N; h,h' \in H.$$

Zeigen Sie:

a) Mit dieser Verknüpfung ist $N \times H$ eine Gruppe und N ist ein Normalteiler davon.

b) Eine Gruppe G ist genau dann isomorph zu $N \times H$ mit obiger Verknüpfung, wenn es sowohl eine exakte Sequenz von Gruppen

$$1 \to N \xrightarrow{i} G \xrightarrow{p} H \to 1$$

als auch eine Untergruppe $\overline{H}$ in G gibt, die unter p isomorph auf H abgebildet wird - d.h. es gibt einen injektiven Gruppenhomomorphismus $s : H \to G$, so daß $p \circ s = id_H$ gilt.

c) Wenn es in einer Gruppe G einen Normalteiler N und eine Untergruppe H gibt, deren Schnitt trivial ist und jedes Element g von G sich folgendermaßen schreiben läßt: $g = nh$, wobei $n \in N, h \in H$ ist, dann ist G isomorph zu $N \times H$, versehen mit einer durch einen geeignet gewählten Homomorphismus $\varphi : H \to Aut(N)$ gegebenen Verknüpfung.

d) Auf dem zweiten Blatt wurde die Gruppe D_n eingeführt. Schreiben Sie diese als Produkt zweier geeigneter Untergruppen und geben Sie den Homorphismus φ dazu an.