Übungen zur Algebra I
- 6. Blatt -

Prof. Dr. K. Wingberg
J. Bartels

WS 2010/2011
abzugeben bis Donnerstag, den 25. November 2010 um 9:15 Uhr
in den Kästen neben dem Seifertraum

http://www.mathi.uni-heidelberg.de/~bartels/Vorlesung

Name:	/name/	Matrikelnummer:	/nr/
Übungsleiter:	/uebleiter/		
2. Name:	/namezwei/	2. Matrikelnummer:	/nrzwei/

Man achte auf eine saubere Darstellung und eine ordentliche Schrift.
Bitte keine maschinell erstellten Lösungen abgeben.

Aufgabe	1	2	3	4	$\sum$
Punkte					

---

1 . Aufgabe (6 Punkte):
Es sei A ein kommutativer Ring mit 1 und M ein $A-$Modul, bezeichne man mit $M^\vee := Hom(M, A)$ dessen Dual. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

a) Ist N ein weiterer $A-$Modul, dann gibt es genau einen Homomorphismus von $A-$Moduln

$$\Phi : M^\vee \otimes_A N \longrightarrow Hom_A(M, N),$$

welcher einem Element $\psi \otimes n$ mit $\psi \in M^\vee$ und $n \in N$ den Homomorphismus $m \mapsto \psi(m)n$ zuordnet.

b) Wenn M frei von endlichem Rang ist, ist Φ ein Isomorphismus. Ist dieser im Allgemeinen auch ein Isomorphismus?

c) Es gibt genau einen $A-$Modulhomomorphismus

$$s : M^\vee \otimes_A M \longrightarrow A,$$

so daß $s(\psi \otimes m) = \psi(m)$ gilt. Welcher Homomorphismus wird durch die Verkettung

$$s \circ \Phi^{-1} : End_A(M) \to A$$

im Fall eines freien Moduls $M = N$ endlichen Rangs beschrieben?

2 . Aufgabe (6 Punkte):
Es sei M ein $\mathbb{Z}-$Modul.

a) Zeigen Sie, daß $M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ torsionsfrei ist.

b) Es sei $S := \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Zeigen Sie, daß $M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ zu $S^{-1}M$ isomorph ist.

c) Zeigen Sie, daß der Torsionsteil M^{tor} von M dem Kern der natürlichen Abbildung $M \to M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ entspricht.

3 . Aufgabe (6 Punkte):
Es seien zwei endlich-dimensionale $\mathbb{C}$-Vektorräume E, F gegeben, desgleichen zwei Endomorphismen f, g zu E, F.

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte von $f \otimes g : E \otimes F \to E \otimes F, e \otimes f \mapsto f(e) \otimes g(f)$ in Abhängigkeit derer von f und g.

b) Vergleichen Sie die Determinanten von $f \otimes g$ mit den Determinanten von f und g.

4 . Aufgabe (6 Punkte):
Es sei A ein Ring und M, N seien $A-$Moduln. Zeigen Sie:

a) Sind M und N freie Moduln mit Basen $e_i, i \in I$ und $f_j, j \in J$, dann ist $M \otimes_A N$ frei und hat in $\{e_i \otimes f_j,\ i \in I, j \in J\}$ eine Basis.

b) Gegeben sei eine exakte Sequenz von $A-$Moduln

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0.$$

Dann ist die Sequenz

$$M' \otimes_A N \to M \otimes_A N \to M'' \otimes_A N \to 0$$

exakt. Die linke Abbildung ist injektiv, wenn N frei über A ist.

c) Es gibt Moduln M', M, M'' und N wie oben, so daß die linke Abbildung nicht injektiv ist!

Nota bene: Die in der zweiten Aufgabe des letzten Blatts behandelte Determinante ist die sog. Resultante - sie wird benötigt bei der Auflösung der allgemeinen Gleichung vierten Grades und der Berechnung der Diskriminante von Erweiterungen über $\mathbb{Q}$. Letzteres ist Stoff der algebraischen Zahlentheorie, erstes wird in unserer Vorlesung eine bedeutsame Rolle haben.
Nota bene 2: Die vierten Aufgaben der letzten beiden Blätter beinhalteten die Herstellung der freien Gruppe über einer Indexmenge. Mit ihrer Hilfe ist es möglich, die Darstellung von Gruppen in Form von Erzeugern und Relationen zu definieren - was uns in den nächsten Wochen eine Herausforderung sein wird.