Übungen zur Algebra I
- 5. Blatt -

Prof. Dr. K. Wingberg
J. Bartels

WS 2010/2011
abzugeben bis Donnerstag, den 18. November 2010 um 9:15 Uhr
.
in den Kästen neben dem Seifertraum

http://www.mathi.uni-heidelberg.de/~bartels/Vorlesung

Name:	/name/	Matrikelnummer:	/nr/
Übungsleiter:	/uebleiter/		
2. Name:	/namezwei/	2. Matrikelnummer:	/nrzwei/

Man achte auf eine saubere Darstellung und eine ordentliche Schrift.
Bitte keine maschinell erstellten Lösungen abgeben.

Aufgabe	1	2	3	4	$\sum$
Punkte					

---

1 . Aufgabe (6 Punkte):
Es seien die Elemente

$$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in Gl_2(\mathbb{C})$$

gegeben.

a) Bestimmen Sie die Ordnung der durch die beiden Elemente erzeugten Untergruppe G. Welche Ordnung haben ihre Elemente? Was sind die Untergruppen?

b) Finden Sie zu einem $n \in \mathbb{N}$ ihrer Wahl einen injektiven Gruppenhomomorphismus $G \to S_n$.

2 . Aufgabe (6 Punkte):
Es sei K ein Körper und zwei Polynome

$$f(X) = a_0 \prod_{i \leq m} (X - x_i) = \sum_{i \leq m} a_{m-i} X^i; \quad g(X) = b_0 \prod_{j \leq n} (X - y_j) = \sum_{j \leq n} b_{n-j} X^j \in K[X]$$

gegeben. Dann definiert man die Matrix A durch

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & a_m & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & a_m & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_0 & \cdots & \cdots & \cdots & a_m \\ b_0 & b_1 & \cdots & \cdots & b_n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & \cdots & \cdots & b_n & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & b_0 & \cdots & \cdots & \cdots & b_n \end{pmatrix}$$

Man zeige: Die Determinante der obigen Matrix entspricht dem Ausdruck

$$a_0^n b_0^m \prod_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} (x_i - y_j)$$

und diskutiere den Fall $g = f'$, wobei f' die Ableitung des Polynoms f ist.

3 . Aufgabe (6 Punkte):
Untersuchen Sie die folgenden Polynome aus $\mathbb{Z}[X]$ auf ihre Irreduzibilität.

a) $X^6 + 2X + 1$.

b) $X^6 + X + 1$.

c) $X^7 - X + 1$.

4 . Aufgabe (6 Punkte):
Zeigen Sie, daß jede Gruppe G zu einer Quotientengruppe einer Gruppe G_I aus der 4. Aufgabe des vorangegangenen Blatts isomorph ist, das heißt es gibt eine Sequenz von Gruppenhomomorphismen

$$1 \to N \xrightarrow{i} G_I \xrightarrow{\pi} G \to 1,$$

so daß das Bild eines Homomorphismus dem Kern des darauf folgenden Homomorphismus entspricht.