Übungen zur Algebra I
- 4. Blatt -

Prof. Dr. K. Wingberg
J. Bartels

WS 2010/2011
abzugeben bis Donnerstag, den 11. November 2010 um 9:15 Uhr
in den Kästen neben dem Seifertraum

http://www.mathi.uni-heidelberg.de/∼bartels/Vorlesung

Name:	/name/	Matrikelnummer:	/nr/
Übungsleiter:	/uebleiter/		
2. Name:	/namezwei/	2. Matrikelnummer:	/nrzwei/

Man achte auf eine saubere Darstellung und eine ordentliche Schrift.
Bitte keine maschinell erstellten Lösungen abgeben.

Aufgabe	1	2	3	4	$\sum$
Punkte					

Nota bene: Transzendenzbeweise sind im Allgemeinen kompliziert und vollkommen mit analytischen Argumenten durchtränkt. Die Auseinandersetzung mit ihnen liefert wenig brauchbare Einsichten in vorlesungsrelevante algebraische Sachverhalte und daher verzichten wir hier auf eine solche und wollen an ihrer statt den zweiten Schritt vor dem ersten vornehmen und diesen auf Lindemann und Weierstraß zurückgehenden Satz annehmen und im Folgenden als wahrhaftig und rigoros bewiesen erachten. Die Lektüre dessen Beweises sei dem Interessierten jedoch hiermit ausdrücklich nahegelegt.

0.0.1 Satz (Lindemann-Weierstraß)**:** *Sind $\alpha_1, ..., \alpha_m$ verschiedene über $\mathbb{Q}$ definierte algebraische Größen (=Zahlen), so sind die Zahlen*

$$\{e^{\alpha_1}, ..., e^{\alpha_m}\}$$

über dem algebraischen Abschluß $\overline{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{C}$ in $\mathbb{C}$ der rationalen Größen (=Zahlen) m linear unabhängige Größen.

1 . Aufgabe (6 Punkte):
Folgern Sie aus dem erwähnten Satz diese Aussagen:

a) Ist α eine reelle algebraische Größe (=Zahl), so ist $sin(\alpha)$ transzendent, insbesondere gilt für eine rationale Zahl a/b, daß $sin(a/b)$ genau dann algebraisch ist, wenn $a/b = 0$ ist.

b) Ist α eine nicht-negative reelle algebraische Größe $\neq 0, 1$, so ist $log(\alpha)$ transzendent.

2 . Aufgabe (6 Punkte):
Es sei $f(X) \in \mathbb{Z}[X]$ so gegeben, daß

$$\begin{aligned} f(X) &\equiv X^4 + X^3 + X^2 + X + 1 \mod 2 \\ f(X) &\equiv X^4 + X^2 + X + 2 \mod 3 \\ f(X) &\equiv X^4 + 2X^3 + X^2 + 3X + 2 \mod 5 \end{aligned}$$

gilt.

a) Sind die Polynome der rechten Seite aus $\mathbb{F}_p[X]$ für $p \in \{2, 3, 5\}$ irreduzibel?

b) Wie sieht $f(X) \in \mathbb{Z}[X]$ allgemein aus? Modulo welchem Ideal ist es eindeutig festlegbar?

3 . Aufgabe (6 Punkte):
Es sei A ein Ring und S eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge daraus, welche die 1 enthalte. Darüber hinaus sei M ein $A-$Modul.

a) Die Menge $S \times M/\equiv$, wobei $(s, m) \equiv (s', m') \leftrightarrow \exists \sigma \in S$ mit $\sigma(s'm - sm') = 0$ gilt, ist eine Quotientenmenge von $S \times M$ modulo einer Äquivalenzrelation $\equiv$ und besitzt in kanonischer Weise eine $S^{-1}A-$Modulstruktur, $S \times M/\equiv$ wird auch mit $S^{-1}M$ bezeichnet.

b) Sind mehrere $A-$Moduln M_1, M_2, M_3 mit einer Sequenz von Modulhomomorphismen $M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3$ mit $Kern(g) = Bild(f)$ gegeben, dann induziert diese Sequenz in kanonischer Weise eine weitere $S^{-1}M_1 \xrightarrow{f_S} S^{-1}M_2 \xrightarrow{g_S} S^{-1}M_3$, für die $Kern(g_S) = Bild(f_S)$ gilt.

4 . Aufgabe (6 Punkte):
Es sei I eine nichtleere Menge. Zeigen Sie, daß es ein Paar (G_I, ϵ) bestehend aus einer Gruppe G_I und einer Abbildung $\epsilon : I \to G_I$ gibt, so daß die universelle Abbildungseigenschaft (UAE) erfüllt ist:

> (UAE): Für jedes weitere Paar (G, φ) bestehend aus einer Gruppe G und einer Abbildung $\varphi : I \to G$, so gibt es einen eindeutig bestimmten Homomorphismus $\Phi : G_I \to G$ mit $\varphi = \Phi \circ \epsilon$.

Nota bene: Das Ziel der dritten Aufgabe Aufgabe des vergangenen Blatts war der Nachvollzug des sog. Kroneckerschen Verfahrens. Allgemein kann man somit Polynome aus $\mathbb{Q}[X]$ faktorisieren. Dazu benötigt man gemeinhin noch den Satz von Gauß, welcher in der Vorlesung zu späterem Zeitpunkt Eingang findet. Erst mit ihm findet dieser Algorithmus seinen wahren Platz in der Algebra. Es hat zwar nicht jedes Polynom in $\mathbb{Q}$ eine Nullstelle, doch aber ist jedes eindeutig zu zerlegen innerhalb eines endlichen Zeitintervalls - selbiges ist über den algebraisch abgeschlossenen Körper $\mathbb{C}$ nicht zu behaupten.
Nota bene 2: Ein ähnliches Argument wie in der vierten Aufgabe des vergangenen Blatts liefert

$$(\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z})^* = \begin{cases} \mathbb{Z}/\mathbb{Z} & \text{für } n = 1 \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{für } n = 2 \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2^{n-2}\mathbb{Z} & \text{für } n \geq 3 \end{cases}$$

Dies können wir uns ab dato merken.