Übungen zur Algebra I

- 2. Blatt -

Prof. Dr. K. Wingberg
J. Bartels

WS 2010/2011
abzugeben bis Donnerstag, den 28. Oktober 2010 um 9:15 Uhr
in den Kästen neben dem Seifertraum

http://www.mathi.uni-heidelberg.de/~bartels/Vorlesung

Name:	/name/	Matrikelnummer:	/nr/
Übungsleiter:	/uebleiter/		
2. Name:	/namezwei/	2. Matrikelnummer:	/nrzwei/

Man achte auf eine saubere Darstellung und eine ordentliche Schrift.
Bitte keine maschinell erstellten Lösungen abgeben.

Aufgabe	1	2	3	4	$\sum$
Punkte					

---

1 . Aufgabe (6 Punkte):
Gegeben sei eine Gerade mit den Punkten 0 und 1. Konstruieren Sie mit Zirkel und Lineal daraus die komplexe Zahl

$$-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\sqrt{5}-\left(\sqrt{\frac{5}{8}+\frac{1}{8}\sqrt{5}}\right)i.$$

Dokumentieren Sie Ihre Vorgehensweise.

2 . Aufgabe (6 Punkte):
Es sei $K := \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, j)$, $K_1 := \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ sowie $K_2 := \mathbb{Q}(j)$. Hierbei sei $j = e^{\frac{2\pi i}{3}}$.

a) Finden Sie das Minimalpolynom von $\sqrt[3]{2}$ und j über K, K_1, K_2 und $\mathbb{Q}$.

b) Zeigen Sie, daß das Minimalpolynom von $\sqrt[3]{2} + j$ über $\mathbb{Q}$ den Grad 6 hat.

3 . Aufgabe (6 Punkte):
Für eine natürliche Zahl $n \geq 2$ betrachte man das regelmäßige $n-$Eck Γ im $\mathbb{R}^2$ mit den Ecken A_k, deren Koordinaten durch

$$(x, y) = (cos(2\pi k/n), sin(2\pi k/n)),\ 1 \leq k \leq n$$

gegeben sind. $\mathcal{O}$ sei der Ursprung des Koordinatensystems. D_n sei die Gruppe der Drehungen und Spiegelungen der Ebene, welche die Ecken A_k ineinander überführen.

a) Es sei r die Rotation um $\mathcal{O}$ um den Winkel $2\pi/n$ und s die Spiegelung an der $x-$Achse. Zeigen Sie, daß sich jedes Element aus D_n als Produkt von Potenzen von r und s schreiben läßt.

b) Zeigen Sie, daß die Abbildung

$$\varphi : D_n \to M_{2\times 2}(\mathbb{R}); r \mapsto \begin{pmatrix} cos(\frac{2\pi}{n}) & -sin(\frac{2\pi}{n}) \\ sin(\frac{2\pi}{n}) & cos(\frac{2\pi}{n}) \end{pmatrix}; s \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

einen Gruppenhomomorphismus definiert. Wieviele Elemente hat das Bild? Ist diese Abbildung injektiv?

c) Welche Elemente σ aus D_n lassen sich in folgender Weise ausdrücken: $\sigma = g_1 g_2 g_1^{-1} g_2^{-1}$ mit $g_1, g_2 \in D_n$.