Übungen zur Algebra I

- 11. Blatt -

Prof. Dr. K. Wingberg
J. Bartels

WS 2010/2011
abzugeben bis Donnerstag, den 20. Januar 2011 um 9:15 Uhr
in den Kästen neben dem Seifertraum

http://www.mathi.uni-heidelberg.de/∼bartels/Vorlesung

Name:	/name/	Matrikelnummer:	/nr/
Übungsleiter:	/uebleiter/		
2. Name:	/namezwei/	2. Matrikelnummer:	/nrzwei/

Man achte auf eine saubere Darstellung und eine ordentliche Schrift.
Bitte keine maschinell erstellten Lösungen abgeben.

Aufgabe	1	2	3	4	$\sum$
Punkte					

1 . Aufgabe (6 Punkte):
Es sei G eine endliche Gruppe. Zeigen Sie:

a) Wieviele Elemente der Ordnung 7 hat die Gruppe, wenn G exakt 168 Elemente und keine echten Normalteiler $N \leq G$ hat?

b) Die Gruppe G hat einen echten Normalteiler, wenn ihre Ordnung p^2q ist - wobei p, q verschiedene Primzahlen sein mögen.

2 . Aufgabe (6 Punkte):
Eine endliche Gruppe operiere auf einer endlichen Menge X und $G \setminus X$ bezeichne die Menge der Bahnen von X unter G.

a) Zeigen Sie, daß die Anzahl der Bahnen gleich der durchschnittlichen Fixpunktanzahl ist, d.h.

$$|G \setminus X| = |G|^{-1} \sum_{g \in G} |Fix_X(g)|.$$

b) Es sei eine Halskette mit neun Perlen gegeben, von denen jede einzelne in genau einer von drei verschiedenen Farben leuchtet. Jeweils drei Perlen haben dabei dieselbe Farbe und sind nicht voneinander zu unterscheiden. Wieviele verschiedene Anordnungen von Perlen gibt es, wenn Anordnungen, die durch Drehungen rsp. Spiegelungen aus einer anderen hervorgehen nicht von der Ursprünglichen unterschieden werden?

3 . Aufgabe (6 Punkte):
Begründen Sie Wahrheit oder Irrtum der folgenden Aussagen:

a) Jede Körpererweiterung vom Grad 6 ist normal.

b) Ist $f \in K[X]$ ein separables Polynom mit $Gal(f) = S_4$, L/K dessen Zerfällungskörper, dann gibt es genau 4 Teilkörper Z vom Grad 8 über K.

c) Für ungerades $n \in \mathbb{N}$ ist $X^3 + nX^2 + n \in \mathbb{Q}[X]$ stets irreduzibel.

4 . Aufgabe (6 Punkte):
Es sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

a) Zeigen Sie, daß $4 + 2\sqrt{2}$ kein Quadrat in K ist.
Es sei fortan $L := \mathbb{Q}(\sqrt{4 + 2\sqrt{2}})$.

b) Berechnen Sie $[L : \mathbb{Q}]$ und das Minimalpolynom des Elements $\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}$ über $\mathbb{Q}$ und K.

c) Zeigen Sie, daß $\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$ in L enthalten ist und $L/\mathbb{Q}$ eine Galoissche Erweiterung ist. Welche Galoisgruppe hat sie?