Übungen zur Algebra I

- Weihnachtsblatt -

Prof. Dr. K. Wingberg
J. Bartels

WS 2010/2011
abzugeben bis Donnerstag, den 13. Januar 2010 um 9:15 Uhr
in den Kästen neben dem Seifertraum

http://www.mathi.uni-heidelberg.de/~bartels/Vorlesung

Name:	/name/	Matrikelnummer:	/nr/
Übungsleiter:	/uebleiter/		
2. Name:	/namezwei/	2. Matrikelnummer:	/nrzwei/

Man achte auf eine saubere Darstellung und eine ordentliche Schrift.
Bitte keine maschinell erstellten Lösungen abgeben.

Aufgabe	1	2	3	4	$\sum$
Punkte					

---

1 . freiwillige Zusatzaufgabe (6 Sonderpunkte):
Es sei $L = \mathbb{Q}(\zeta)$, wobei $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{17}} \in \mathbb{C}$ ist. Zeigen Sie:

a) $G = Gal(L/\mathbb{Q})$ ist zyklisch vom Grad 16: $\{e\} \leq H_1 \leq H_2 \leq H_3 \leq H_4 = G$, wobei $\sharp H_i = 2^i$ gilt.

b) Wenn $H_i \leq G$ eine Untergruppe ist, gilt: $\sum_{\sigma \in H} \zeta^\sigma \in Fix(H_i) \setminus Fix(H_{i+1})$ und $\sum_{\sigma \in H_i} \zeta^\sigma$ ist Nullstelle eines Polynoms zweiten Grades mit Koeffizienten in $Fix(H_{i+1})$ für $1 \leq i \leq 3$.

c) Die iterierten quadratischen Erweiterungen liefern eine explizite Konstruktion des regulären Siebzehnecks. Führen Sie die Konstruktion durch.

Nota bene: Unter $Fix(H_i)$ versteht man L^{H_i}. Ein Teil der Punkte wird für saubere, schöne und übersichtliche Darstellung der Konstruktion vergeben!

2 . freiwillige Zusatzaufgabe (6 Sonderpunkte):
Wir haben auf den Blättern 4 und 5 die Darstellung einer Gruppe durch Erzeuger und Relationen erklärt. Es sei nun die Gruppe

$$G =< a, b | a^2 = b^3 = (ab)^5 = 1 > \text{ gegeben.}$$

Wieviele Elemente hat sie?

3 . freiwillige Zusatzaufgabe (6 Sonderpunkte):
Ziel dieser Aufgabe ist es, sich ein Bild davon zu machen, wie oft die symmetrische Gruppe S_n als Galoisgruppe vorkommt. Es sei p eine Primzahl. In der vierten Aufgabe des achten Blatts haben wir festgestellt, daß der Ausdruck

$$N_n = \frac{1}{n}\sum_{d|n} \mu(n/d)p^d$$

die Anzahl der irreduziblen normierten Polynome vom Grad n über einem endlichen Körper K der Ordnung p beschreibt.

a) Zeigen Sie: Es gibt mindestens

- $\frac{p^n}{3n}$ Polynome $n^{\underline{ten}}$ Grades in $\mathbb{F}_p[X]$, welche normiert und irreduzibel sind.
- $\frac{p^n}{3(n-1)}$ normierte Polynome $n^{\underline{ten}}$ Grades in $\mathbb{F}_p[X]$, welche einen irreduziblen Teiler vom Grad $n-1$ haben.
- $\frac{p^n}{9.(n-2)}$ normierte Polynome $n^{\underline{ten}}$ Grads in $\mathbb{F}_p[X]$, welche einen irreduziblen Teiler vom Grad 2 haben und deren restliche irreduziblen Teiler allesamt ungeraden Grades sind.

b) Es sei $k = max\{3n, 3(n-1), 9(n-2)\}$, $\epsilon > 0$ und $m \in \mathbb{N}$ so gewählt, daß $(1-\frac{1}{k})^m < \epsilon$ gilt. Es sei $P := p_1 \cdots p_m$ das Produkt der ersten m Primzahlen. Zeigen Sie, daß es in $\mathbb{Z}/P\mathbb{Z}[X]$ höchstens

$$(1-\frac{1}{k})^m P^n$$

verschiedene normierte Polynome $n^{\underline{ten}}$ Grades gibt, die weder modulo p_1, noch modulo $p_2, ..., p_m$ irreduzibel sind.
Folgern Sie, daß mindestens $(1-3\epsilon)P^n$ normierte Polynome f in $\mathbb{Z}/P\mathbb{Z}[X]$ vom Grad n gibt, die die folgende Eigenschaft haben:
Es gibt ein $p_i \in \{p_1, ..., p_m\}$, so daß

- f modulo p_i normiert und irreduzibel ist.
- f modulo p_i einen irreduziblen Teiler vom Grad $n-1$ hat.
- f modulo p_i einen irreduziblen Teiler vom Grad 2 hat und dessen restliche irreduziblen Teiler ungeraden Grades sind.

c) Zeigen Sie, daß die Galoisgruppe eines normierten Polynoms $f \in \mathbb{Z}[X]$ vom Grad n, dessen Rest modulo P die in Teil b) erwähnte Eigenschaft hat, die symmetrische Gruppe S_n ist.

d) Es sei $N \in \mathbb{N}$ derart, daß $2N+1 \geq P$. Man betrachte nun die Menge der Polynome

$$f(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + ... + a_0 \in \mathbb{Z}[X],$$

für deren Koeffizientenbeträge $|a_i| \leq N$ gilt. Zeigen Sie, daß es in den höchstens $3\epsilon P^n$ Restklassen modulo P, in denen alle Polynome obiger Form liegen, deren Galoisgruppe nicht die symmetrische Gruppe S_n ist; höchstens $3\epsilon(4N+1)^n$ Polynome der obigen Menge gibt.
Folgern Sie, daß für die Polynome $f \in \mathbb{Z}[X]$ vom Grad n folgendes gilt:
Zu $\epsilon > 0$ gibt es ein N_0 derart, daß für jedes $N > N_0$ gilt:

$$\frac{\sharp\{\text{ normierte Polynome mit Koeffizientenbetrag } \leq N \text{ und Galoisgruppe } \neq S_n\}}{\sharp\{\text{ alle normierten Polynome mit Koeffizientenbetrag } \leq N\}} < 3\epsilon 2^n.$$

Mit anderen Worten: Der Anteil der Polynome mit Galoisgruppe S_n ist mindestens $1-3\epsilon 2^n$, wenn N groß genug gewählt ist.

$$\spadesuit$$
$$\pm$$
$$\gg\ll$$
$$\gg \heartsuit \ll$$
$$\Uparrow\gg\gg\ll\ll\Uparrow$$
$$>\gg\gg \diamondsuit \ll\ll<$$
$$\gg\gg\ll\ll$$
$$\gg\gg \circ \ll\ll$$
$$\gg \nabla \gg\ll \phi \ll$$
$$\gg\gg\gg \infty \ll\ll\ll\ll$$
$$\Uparrow\gg \oplus \gg\gg\ll\ll\curvearrowleft\ll\Uparrow$$
$$>\gg\gg\gg\gg \Theta \ll\ll\ll\ll<$$
$$\gg \odot \gg\gg\ll\ll \int \ll$$
$$\gg\gg\gg\gg\bowtie\ll\ll\ll\ll$$
$$\gg\gg \cup \gg\gg\ll\ll \delta \ll$$
$$\Uparrow\gg\gg\gg\gg\gg \otimes \ll\ll\ll\ll\ll\Uparrow$$
$$>\gg\gg \cap \gg\gg\gg\ll\ll \text{©} \text{®} \ll\ll<$$
$$\Vert$$
$$\Longleftrightarrow$$

Ein angenehmes und ruhiges Weihnachtsfest und Gottes Segen auch im kommenden Jahr!