Übungen zur Algebra I

- 1. Blatt -

Prof. Dr. K. Wingberg
J. Bartels

WS 2010/2011
abzugeben bis Donnerstag, den 21. Oktober 2010 um 9:15 Uhr
in den Kästen neben dem Seifertraum

http://www.mathi.uni-heidelberg.de/~bartels/Vorlesung

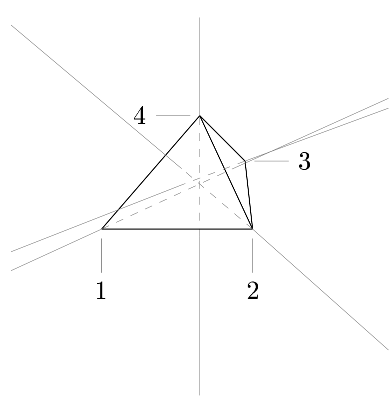
Name:	/name/	Matrikelnummer:	/nr/
Übungsleiter:	/uebleiter/		
2. Name:	/namezwei/	2. Matrikelnummer:	/nrzwei/

Man achte auf eine saubere Darstellung und eine ordentliche Schrift.
Bitte keine maschinell erstellten Lösungen abgeben.

Aufgabe	1	2	3	$\sum$
Punkte				

---

1 . Aufgabe (6 Punkte):
Es sei ein regulärer Tetraeder gegeben.



a) Zeigen Sie, daß die Drehungen um die Symmetrieachsen des Tetraeders (s. Bild) eine Untergruppe der S_4 darstellen.

b) Zeigen Sie, daß jedes Element aus dem Kern des Signumhomomorphismus

$$sign : S_4 \to \{\pm 1\}; \sigma \mapsto \prod_{1 \leq i < j \leq 4} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}$$

genau einem Element der Untergruppe aus Teil a) entspricht.

2 . Aufgabe (6 Punkte):
Es seien zwei Mengen M_1 und M_2 gegeben, dazu eine Abbildung $\varphi : M_1 \to M_2$.

a) Zeigen Sie, daß es genau eine Äquivalenzrelation $\sim_R$ auf M_1 und eine Teilmenge $B \subset M_2$ gibt, so daß diese Abbildung über die kanonische Projektion $\pi : M_1 \to M_1/\sim_R$, eine bijektive Abbildung $\tilde{\varphi}$ und die Inklusion $\iota : B \hookrightarrow M_2$ faktorisiert, wie im Bild angegeben.

$$\begin{tikzcd} M_1 \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, two heads, "\pi"] & M_2 \\ M_1/\sim_R \arrow[r, "\tilde{\varphi}"] & B \arrow[u, hook, "\iota"] \end{tikzcd}$$

Das bedeutet, es gilt

$$\varphi = \iota \circ \tilde{\varphi} \circ \pi.$$

b) Geben Sie für die Mengen $M_1 := \mathbb{R}$, $M_2 := \mathbb{C}^*$ und die Abbildung $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^*; x \mapsto e^{ix}$ die Äquivalenzrelation $\sim_R$ aus a), die Menge $M_1/\sim_R$ sowie die Menge B an.

3 . Aufgabe (6 Punkte):
Es sei d eine quadratfreie ganze Zahl, welche von 0 und 1 verschieden sei. Gegeben sei der Restklassenring $K := \mathbb{Q}[X]/(X^2 - d)$.

a) Zeigen Sie, daß K ein Körper ist, welcher $\mathbb{Q}$ enthält und als Vektorraum über $\mathbb{Q}$ die Dimension 2 hat.

b) Zeigen Sie, daß die Abbildung

$$m_X : K \to K; f(X) \mod (X^2 - d) \mapsto X.f(X) \mod (X^2 - d)$$

linear ist und bestimmen Sie das charakteristische Polynom, das Minimalpolynom von m_X und das Inverse von $X \mod (X^2 - d)$.

c) Zeigen Sie, daß $\{1 \mod (X^2 - d), X \mod (X^2 - d)\}$ eine Basis des Vektorraums $K/\mathbb{Q}$ ist und die Abbildung

$$\sigma : K \to K, f(X) \mod (X^2 - d) \mapsto f(-X) \mod (X^2 - d)$$

ein bijektiver Ringhomomorphismus ist.