Übungen zur Algebra I

- 9. Blatt -

Prof. Dr. K. Wingberg — WS 2008/2009

J. Bartels — abzugeben bis Dienstag, den 9. Dezember 2008 um 9:15 Uhr

http://www.mathi.uni-heidelberg.de/~bartels/Vorlesung

Name:	/name/	Matrikelnummer:	/nr/
Übungsleiter:	/uebleiter/		
2. Name:	/namezwei/	2. Matrikelnummer:	/nrzwei/

Man achte auf eine saubere Darstellung und eine ordentliche Schrift. Bitte keine maschinell erstellten Lösungen abgeben.

Aufgabe	1	2	3	4	$\sum$
Punkte					

---

1 . Aufgabe (6 Punkte):

Es sei die reelle Zahl $\alpha = \sqrt{3+\sqrt{3}}$ gegeben.

a) Zeigen Sie, daß α eine Nullstelle des Polynoms
$$f(X) := X^4 - 6X^2 + 6$$
ist und schließen Sie dann auf den Körpergrad $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]$.

b) Zeigen Sie, daß $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}(\alpha)$ und $\mathbb{Q}(\alpha, \sqrt{2})$ ein Zerfällungskörper von $f(X)$ über $\mathbb{Q}$ ist.

c) Was ist die Galoisgruppe von $f(X)$ über $\mathbb{Q}$? Ist sie abelsch? Geben Sie die Struktur dieser Gruppe an.

2 . Aufgabe (6 Punkte):

Es sei die reelle Zahl $\alpha = \sqrt[3]{2+\sqrt{2}}$ gegeben. Zeigen Sie:

a) α ist eine Nullstelle von
$$f(X) := X^6 - 4X^3 + 2$$
Bestimmen Sie den Körpergrad $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]$ und das Minimalpolynom von α über $\mathbb{Q}$.

b) Der Zerfällungskörper von $f(X)$ ist $K = \mathbb{Q}(\alpha, \sqrt[3]{2}, j)$, wobei j eine Nullstelle von $X^2 + X + 1$ ist.

c) $\sqrt[3]{2} \notin \mathbb{Q}(\alpha)$ und folgern Sie den Körpergrad $[K : \mathbb{Q}]$. Wie sehen die $\mathbb{Q}-$Automorphismen von K aus? Wieviele gibt es davon? Kommutieren Sie miteinander?

3 . Aufgabe (6 Punkte):
Es sei $f(X) \in K[X]$ ein normiertes Polynom $n^{\underline{ten}}$ Grades mit Koeffizienten aus einem Körper K. Ω/K sei ein fest gewählter algebraischer Abschluß von K und $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\} \subset \Omega$ die Menge der Nullstellen von $f(X)$ in K.

a) Zeigen Sie, daß
$$D(f) := \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\alpha_i - \alpha_j)^2$$
ein Element des Körpers K ist.

b) Die Determinante aus der zweiten Aufgabe des vorangegangenen Aufgabenblatts wird mit $R(f, g)$ bezeichnet. Zeigen Sie, daß
$$D(f) = (-1)^{n(n-1)/2} R(f, f') \text{ gilt.}$$

c) Zeigen Sie, daß gilt:
$$Gal(f, K) \leq A_n \Leftrightarrow D(f) \in K^2.$$
Nota bene: Die A_n ist die Untergruppe der geraden Permutationen in S_n.

d) Ist die Galoisgruppe des Polynoms $X^6 - 1536X - 5120$ über $\mathbb{Q}$ in der A_6 enthalten?

4 . Aufgabe (6 Punkte):
Es sei $f(X) = X^4 + pX^2 + qX + r \in K[X]$ ein irreduzibles Polynom, $\{x_1, ..., x_4\}$ die Nullstellen dieses Polynoms und
$$z_1 = (x_1 + x_2)(x_3 + x_4)$$
$$z_2 = (x_1 + x_3)(x_2 + x_4)$$
$$z_3 = (x_1 + x_4)(x_2 + x_3)$$
und $Q(X) := \prod_{1 \leq i \leq 3}(X - z_i)$.

a) Man zeige, daß $Q(X) \in K[X]$ ist und schreibe $Q(X)$ explizit in Abhängigkeit der Koeffizienten von f hin.

b) Man zeige, daß
$$Gal(f, K) \leq D_4 \Leftrightarrow Q(X) \text{ ist irreduzibel in } K[X]$$
gilt.
Nota bene: Die D_4 ist die Drehgruppe mit 8 Elementen, s. erstes Aufgabenblatt.

c) Was für Galoisgruppen kann $f(X)$ über K überhaupt haben? Welche Ordnungen haben sie? Gibt es eine größte Gruppe unter ihnen, in denen die anderen enthalten sind? Welche? Zeichnen Sie einen Untergruppengraphen, der verdeutlicht, welche Gruppe in welcher enthalten ist.

Zusätzliche Fragen zum letzten Zettel (ohne Wertung)

a) Wie könnte man feststellen, ob zwei ruhig etwas größere Polynome eine (oder mehrere) gemeinsame Nullstellen haben, ohne sie selbst konkret zu kennen?

b) Das Produkt aus der 3. Aufgabe nennt man semidirektes Produkt. Kennen Sie weitere Beispiele für semidirekte Produkte?

c) Gegeben sei $\varphi : (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^* \to (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^*; x \mapsto x^{p-1}$. Welche Ordnung hat das Bild dieser Abbildung? Was läßt sich sonst noch darüber sagen?

d) Was ist die Galoisgruppe von $\mathbb{Q}(\zeta_8)/\mathbb{Q}$? Hierbei sei $\zeta_8 = e^{2\pi i/8}$. Wie sieht es aus, wenn 8 durch 6 oder 9 ersetzt wird?

e) Welche Struktur hat $(\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z})^*$? Für welche $n \in \mathbb{N}$ ist diese Gruppe abelsch? ...zyklisch? (s. Literatur)