Übungen zur Algebra I
- 8. Blatt -

Prof. Dr. K. Wingberg
J. Bartels

WS 2008/2009
abzugeben bis Dienstag, den 2. Dezember 2008 um 9:15 Uhr

http://www.mathi.uni-heidelberg.de/~bartels/Vorlesung

Name:	/name/	Matrikelnummer:	/nr/
Übungsleiter:	/uebleiter/		
2. Name:	/namezwei/	2. Matrikelnummer:	/nrzwei/

Man achte auf eine saubere Darstellung und eine ordentliche Schrift. Bitte keine maschinell erstellten Lösungen abgeben.

Aufgabe	1	2	3	4	$\sum$
Punkte					

---

1 . Aufgabe (6 Punkte):
Es sei $p > 0$ eine Primzahl und K ein Körper der Charakteristik p.

a) Es seien Elemente $a, b \in K \setminus K^p$ und $\alpha, \beta \in \overline{K}$ derart gegeben, daß $\alpha^p = a$ und $\beta^p = b$ gilt. Zeigen Sie, daß $K(\alpha) = K(\beta)$ genau dann gilt, wenn $K^p(a) = K^p(b)$ gilt.

b) Wenn $[K : K^p] = p$ ist, dann zeige man, daß für gegebenes $n \in \mathbb{N}$ es stets eine und nur eine Teilerweiterung in $\overline{K}$ gibt, welche rein inseperabel vom Grad p^n über K ist, gibt.

c) Ist E/K eine endliche Erweiterung mit $[E : K]_i = p^r$, $r \in \mathbb{N}$ und gibt es kein $s < r$, so daß $E^{p^s}K$ über K separabel ist, dann ist E eine einfache Erweiterung.

2 . Aufgabe (6 Punkte):
Es sei K ein Körper und zwei Polynome

$$f(X) = a_0 \prod_{i \le m} (X - x_i) = \sum_{i \le m} a_{m-i} X^i; \;\; g(X) = b_0 \prod_{j \le n} (X - y_j) = \sum_{j \le n} b_{n-j} X^j \in K[X]$$

gegeben. Dann definiert man die Matrix A durch

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & a_m & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & a_m & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_0 & \cdots & \cdots & \cdots & a_m \\ b_0 & b_1 & \cdots & \cdots & b_n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & \cdots & \cdots & b_n & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & b_0 & \cdots & \cdots & \cdots & b_n \end{pmatrix}$$

Man zeige: Die Determinante der obigen Matrix entspricht dem Ausdruck

$$a_0^n b_0^m \prod_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}} (x_i - y_j)$$

und diskutiere den Fall $g = f'$, wobei f' die Ableitung des Polynoms f ist.

3 . Aufgabe (6 Punkte):
Es seien N, H zwei Gruppen und $Aut(N)$ die Automorphismengruppe von N und $\varphi : H \to Aut(N)$ ein Gruppenhomomorphismus. Auf $N \times H$ (als Menge) definiert man die Verknüpfung:

$$(n, h) * (n', h') := (n\varphi(h)(n'), hh'), \text{ wobei } n, n' \in N; h, h' \in H.$$

Zeigen Sie:

a) Mit dieser Verknüpfung ist $N \times H$ eine Gruppe und N ist ein Normalteiler davon.

b) Eine Gruppe G ist genau dann isomorph zu $N \times H$ mit obiger Verknüpfung, wenn es sowohl eine exakte Sequenz von Gruppen

$$1 \to N \xrightarrow{i} G \xrightarrow{p} H \to 1$$

als auch eine Untergruppe $\overline{H}$ in G gibt, die unter p isomorph auf H abgebildet wird - d.h. es gibt einen injektiven Gruppenhomomorphismus $s : H \to G$, so daß $p \circ s = id_H$ gilt.

c) Wenn es in einer Gruppe G einen Normalteiler N und eine Untergruppe H gibt, deren Schnitt trivial ist und jedes Element g von G sich folgendermaßen schreiben läßt: $g = nh$, wobei $n \in N, h \in H$ ist, dann ist G isomorph zu $N \times H$, versehen mit einer durch einen geeignet gewählten Homomorphismus $\varphi : H \to Aut(N)$ gegebenen Verknüpfung.

d) Auf dem ersten Blatt wurde die Gruppe D_n eingeführt. Schreiben Sie diese als Produkt zweier geeigneter Untergruppen und geben Sie den Homorphismus φ dazu an.

Anmerkung: Ist G eine Gruppe, dann nennt man einen Gruppenisomorphismus $\varphi : G \to G$ auch Automorphismus. Die Menge $Aut(G)$ der Automorphismen von G nennt man Automorphismengruppe zu G. Das dies bezüglich der Hintereinanderausführung wirklich eine Gruppe ist, bleibt dem Leser zur Überprüfung überlassen - allerdings nicht im Rahmen dieses Übungsblatts.

4 . Aufgabe (6 Punkte):
Es sei $p > 2$ eine Primzahl und n eine natürliche Zahl.

a) Welche multiplikative Ordnung hat das Element $1 + p$ in $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$?

b) Welchen Kern hat die Einschränkungsabbildung

$$\psi : (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^* \to (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*; x\ (mod\ p^n) \mapsto x\ (mod\ p)?$$

c) Welche Struktur hat $(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^*$ als abelsche Gruppe? Warum wurde $p > 2$ vorausgesetzt?

Zusätzliche Fragen zum letzten Zettel (ohne Wertung)

a) Was ist der Unterschied von Algebren und Vektorräumen über einem Körper k? Was versteht man unter dem Begriff Erzeuger in den beiden Fällen?

b) Würde die zweite Aufgabe funktionieren, wenn man statt Freiheit die Endlichkeit der Erzeugermengen voraussetzte?

c) Der in der vierten Aufgabe auftauchende Ring $k[X_1, ..., X_m]$ ist der Koordinatenring (Ring der polynomialen Funktionen) auf dem affinen Raum $\mathbb{A}^m$, gleiches gilt für $k[Y_1, ..., Y_n]$. Wofür steht dann das Tensorprodukt? Wie ist das geometrisch zu verstehen?

Anmerkung:
Wer den Sinn von Tensorprodukten in extenso erfahren möchte, solle sich künftig mit dem Thema der algebraischen Geometrie auseinandersetzen; Bücher zum Einstieg wären Harris:Algebraic Geometry, Eisenbud:Commutative Algebra, Liu:Algebraic Geometry and Algebraic Curves und Perrin:Introduction to Algebraic Geometry.