Übungen zur Algebra I

- der Tensorzettel (7. Blatt) -

Prof. Dr. K. Wingberg
J. Bartels

WS 2008/2009
abzugeben bis Dienstag, den 24. November 2008 um 9:15 Uhr

http://www.mathi.uni-heidelberg.de/~bartels/Vorlesung

Name:	/name/	Matrikelnummer:	/nr/
Übungsleiter:	/uebleiter/		
2. Name:	/namezwei/	2. Matrikelnummer:	/nrzwei/

Man achte auf eine saubere Darstellung und eine ordentliche Schrift. Bitte keine maschinell erstellten Lösungen abgeben.

Aufgabe	1	2	3	4	$\sum$
Punkte					

Alle auf diesem Blatt erwähnten Ringe seien per definitionem kommutativ und mit einem Einselement versehen.

0.0.1 Definition: Es sei A ein Ring.

a) Ein $A-$Modul ist ein Tripel $(M, +, \cdot)$, wobei $(M, +)$ eine abelsche Gruppe ist und $\cdot$ eine Abbildung $A \times M \to M; (a, m) \mapsto am$ ist, für die für jedes $(a, b) \in A^2,\ (m, m') \in M^2$ gilt:

$$(a+b)m = am + bm,\ a(m+m') = am + am',\ a(bm) = (ab)m \text{ und } 1 \cdot m = m.$$

Unter anderem ist $Hom_A(M, M')$ ein $A-$Modul mit den Verknüpfungen

$$(f + f')(m) := f(m) + f'(m) \text{ und } (af)(m) = a \cdot f(m).$$

Das Tensorprodukt von Moduln wird genauso definiert wie das von $K-$Algebren, d.h. u.a. das Produkt zweier Moduln wird wiederum ein Modul sein.

1 . Aufgabe (6 Punkte):
Berechnen Sie die $\mathbb{C}-$Algebra $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, d.h. man zeige: $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \mathbb{C}[t]/(t^2 + 1)$.
Achtung: A priori ist dies eine $\mathbb{R}-$Algebra, die allerdings auch als $\mathbb{C}-$Algebra gesehen werden kann - und zwar auf verschiedene Weisen!

2 . Aufgabe (6 Punkte):
Es sei A ein Ring und M, N seien $A-$Moduln. Zeigen Sie:

a) Sind M und N freie Moduln mit Basen $e_i, i \in I$ und $f_j, j \in J$, dann ist $M \otimes_A N$ frei und hat in $e_i \otimes f_j$, $i \in I, j \in J$ eine Basis.

b) Gegeben sei eine exakte Sequenz von $A-$Moduln

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0.$$

Dann ist die Sequenz

$$M' \otimes_A N \to M \otimes_A N \to M'' \otimes_A N \to 0$$

exakt. Die linke Abbildung ist injektiv, wenn N frei über A ist.

c) Es gibt Moduln M', M, M'' und N wie oben, so daß die linke Abbildung nicht injektiv ist!

3 . Aufgabe (6 Punkte):
Es sei A ein Ring. Gegeben sei eine $A-$Algebra, d.h. ein Paar (B, φ), bestehend aus einem Ring B und einem Ringhomomorphismus $\varphi : A \to B$. Zeigen Sie:

a) Wenn M ein $B-$Modul ist, ist es auch ein $A-$Modul via der Multiplikation $a.m := \varphi(a)m$. (Einschränkung der Skalare, Bezeichnung: $M_{[A]}$) und wenn M ein $A-$Modul ist, dann ist $M \otimes_A B$ mit der Multiplikation $b(x \otimes c) := x \otimes bc$ ein $B-$Modul (Erweiterung der Skalare). Anmerkung: damit ist insbesondere auch B ein $A-$Modul!

b) Wenn M ein $A-$Modul ist, und N ein $B-$Modul ist, dann ist

$$\psi : Hom_A(M, N_{[A]}) \to Hom_B(M \otimes_A B, N), f \mapsto \psi(f)(x \otimes b) := bf(x)$$

ein Isomorphismus von $A-$Moduln.

c) Ist S eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge von A und $I \subseteq A$ ein Ideal von A, dann gilt für einen $A-$Modul M

$$M \otimes_A A/I \cong M/IM$$

und

$$S^{-1}A \otimes_A M \cong S^{-1}M.$$

4 . Aufgabe (6 Punkte):
Berechnen Sie diese Tensorprodukte:

a) $k[X_1, ..., X_m] \otimes_k k[Y_1, ..., Y_n]$, wobei k ein beliebiger Körper sei (Ergebnis: $k[X_1, ..., X_m, Y_1, ..., Y_n]$).

b) Berechnen Sie das Tensorprodukt aller Kombinationen von $\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ und $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ über $\mathbb{Z}$, wobei $n \in N$ variabel sei (Es bietet sich eine Multiplikationstabelle an).

Zusätzliche Fragen zum letzten Zettel (ohne Wertung)

a) Was bewirkt die Lokalisierung eines Rings oder Moduls? Wird er größer oder kleiner durch Lokalisierung?

b) Was für einen Sinn macht es, eine Gruppe G in einen Matrizenring abzubilden?

c) In welcher Form sind Ihnen bisher Gruppen erschienen?

d) Welche Faktorisierungsverfahren kennen Sie nun? Welche Irreduzibilitätskriterien? Welche sind effektiver als andere? Wie würden Sie diese vergleichen?

Anmerkung: Die dritte Aufgabe behandelte Darstellungstheorie, d.h. die Abbildung von Gruppen in Matrizenringe. Dies ist eine eigenständige mathematische Disziplin mit viel Nutzen und Querverbindungen, beispielsweise zur Zahlentheorie. Mehr Informationen entnehme der Interessierte den Büchern von Serre: Représentations linéaires des Groupes Finis oder Fulton/Harris: Representation Theory.