Übungen zur Algebra I
- 6. Blatt -

Prof. Dr. K. Wingberg
J. Bartels
WS 2008/2009
abzugeben bis Dienstag, den 18. November 2008 um 9:15 Uhr

http://www.mathi.uni-heidelberg.de/~bartels/Vorlesung

Name:	/name/	Matrikelnummer:	/nr/
Übungsleiter:	/uebleiter/		
2. Name:	/namezwei/	2. Matrikelnummer:	/nrzwei/

Man achte auf eine saubere Darstellung und eine ordentliche Schrift. Bitte keine maschinell erstellten Lösungen abgeben.

Aufgabe	1	2	3	4	$\sum$
Punkte					

---

1 . Aufgabe (6 Punkte):
Es sei A ein Ring, M ein $A-$Modul und S eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge von A, $0 \notin S$. In $M \times S$ betrachte man die Äquivalenzrelation

$$(m, s) \equiv (m', s') \Leftrightarrow \exists s'' \in S \text{ mit } s''(s'm - sm') = 0.$$

a) Zeigen Sie, daß die Menge M_S der Äquivalenzklassen $\overline{(m, s)}$ einen $A-$Modul bildet und daß $M \to M_S, a \mapsto \overline{(a, 1)}$, ein Homomorphismus ist. Insbesondere ist A_S ein Ring.

b) Berechnen Sie für $A = \mathbb{Z}$, $S = \mathbb{Z} \setminus p\mathbb{Z}$ (p prim) und $M = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ den Modul M_S, den man in diesem Fall auch M_p bezeichnet.

c) Leiten Sie daraus den Gruppenisomorphismus

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \bigoplus_p (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_p$$

her.

2 . Aufgabe (6 Punkte):
Das Radikal $Rad(A)$ eines Rings A ist per definitionem der Schnitt aller maximalen Ideale von A:

$$Rad(A) := \bigcap_{\substack{m \leq A \\ \text{maximal}}} m$$

a) Zeigen Sie, daß wenn $x \in Rad(A)$, dann ist $1 - x \in A^*$.

b) Zeigen Sie: Ist M ein endlich erzeugter $A-$Modul und $I \leq A$ ein Ideal, so daß $IM = M$ gilt, dann gibt es ein $y \in I$ mit $(1+y)M = (0)$, insbesondere gilt für $I \leq Rad(A)$, daß $M = \{0\}$ ist.

3 . Aufgabe (6 Punkte):
Es sei G eine Gruppe, die von zwei Elementen a, b erzeugt wird.

$$\rho : G \to Gl_2(\mathbb{C}); a \mapsto \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, b \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

sei ein injektiver Gruppenhomomorphismus.

a) Wieviele Elemente hat die Gruppe G? Welche Ordnungen haben sie? Welche Untergruppen gibt es?

b) Finden Sie ein einen injektiven Gruppenhomomorphismus $G \to S_n$, wobei $n \in \mathbb{N}$ frei gewählt werden darf.

4 . Aufgabe (6 Punkte):
Sie haben in der Vorlesung diverse Faktorisierungsmethoden und Irreduzibilitätskriterien kennengelernt. Wenden Sie diese auf die folgenden Polynome an.

a) $X^5 - X^4 + 5X^3 + 9X^2 + 12X - 6$

b) $X^5 + 17X^4 + 47X^3 - 46X^2 - 270X - 227$

Sind sie irreduzibel über $\mathbb{Q}$? Wenn nicht, wie sehen die Faktoren aus?