

# Übungen zur Algebra I

- 5. Blatt -

Prof. Dr. K. Wingberg  
J. Bartels

WS 2008/2009  
abzugeben bis Dienstag, den 11. November 2008 um 9:15 Uhr

<http://www.mathi.uni-heidelberg.de/~bartels/Vorlesung>

Name: /name/

Matrikelnummer: /nr/

Übungsleiter: /uebleiter/

2. Name: /namezwei/

2. Matrikelnummer: /nrzwei/

Man achte auf eine saubere Darstellung und eine ordentliche Schrift. Bitte keine maschinell erstellten Lösungen abgeben.

Aufgabe	1	2	3	4	$\Sigma$
Punkte					

---

## 1 . Aufgabe (6 Punkte):

Es sei  $k$  ein Körper und  $A := k[X, Y]/(X^2 + 5Y^2)$ . Ist der Ring  $A$

- nullteilerfrei?
- ohne nilpotente Elemente, (d.h. es gibt kein  $a \in A \setminus \{0\}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  mit  $a^n = 0$ )?
- faktoriell?

Geben Sie gegebenenfalls Bedingungen an den Körper  $k$  an, unter denen die Antwort anders lauten würde.

## 2 . Aufgabe (6 Punkte):

Es sei  $f(X) \in \mathbb{Z}[X]$  gegeben, so daß

$$f(X) \equiv X^4 + 2X^3 + 2X^2 + 2 \pmod{3}$$

$$f(X) \equiv X^4 + 2X^2 + 2 \pmod{5}$$

$$f(X) \equiv X^4 + X^3 + X^2 + X + 1 \pmod{2}$$

gilt.

a) Sind die Polynome aus  $\mathbb{F}_p[X]$ ,  $p \in \{3, 5, 2\}$  der rechten Seite irreduzibel?

b) Wie kann  $f(X) \in \mathbb{Z}[X]$  dann nur aussehen?

**3 . Aufgabe (6 Punkte):**

Es sei  $p$  eine Primzahl,  $K := \mathbb{F}_p(X^p, Y^p)$  und  $L := \mathbb{F}_p(X, Y)$ .

a) Was ist  $[L : K]$ ?

b) Wieviele Zwischenkörper gibt es?

c) Ist die Körpererweiterung einfach?

**4 . Aufgabe (6 Punkte):**

Finden Sie die Minimalpolynome von

a)  $\sqrt[3]{7} + \sqrt{2}$ ,  $\sqrt[5]{7}$  und  $\sqrt[3]{2 - \sqrt{3}}$  über  $\mathbb{Q}$ .

b)  $\zeta_5 := \exp(2\pi i/5) \in \mathbb{C}$  über  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{Q}(i)$  und  $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ .