Übungen zur Algebra I
- 3. Blatt -

Prof. Dr. K. Wingberg
J. Bartels

WS 2008/2009
abzugeben bis Dienstag, den 28. Oktober 2008 um 9:15 Uhr

http://www.mathi.uni-heidelberg.de/~bartels/Vorlesung

Name: /name/

Matrikelnummer: /nr/

Übungsleiter: /uebleiter/

2. Name: /namezwei/

2. Matrikelnummer: /nrzwei/

Man achte auf eine saubere Darstellung und eine ordentliche Schrift. Bitte keine maschinell erstellten Lösungen abgeben.

Aufgabe	1	2	3	4	$\sum$
Punkte					

---

1 . Aufgabe (6 Punkte):
Zeigen Sie, daß wenn ein normiertes Polynom mit ganzen Koeffizienten über $\mathbb{Q}$ reduzibel ist, also als Produkt zweier normierter Polynome mit rationalen Koeffizienten erscheint, so sind die rationalen Koeffizienten der Faktorpolynome ebenfalls ganze Zahlen.

2 . Aufgabe (6 Punkte):
Es sei $P(X) = X^n + a_1X^{n-1} + ... + a_n \in \mathbb{C}[X]$ gegeben.

a) Zeigen Sie, daß jede komplexe Nullstelle α von $P(X)$ der folgenden Bedingung genügt:

$$|\alpha| \leq 1 + n.max\{|a_1|, ..., |a_n|\}.$$

b) Wenn sich das Polynom folgendermaßen faktorisieren läßt:

$$P(X) = \prod_{i=1}^{n}(X - \alpha_i),$$

dann gilt $|a_i| \leq \binom{n}{i} (max\{|\alpha_1|, ..., |\alpha_n|\})^i$.

3 . Aufgabe (6 Punkte):
Diese Aufgabe beschäftigt sich mit der expliziten Faktorisierung von Polynomen. Es sei $f(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in \mathbb{Z}[X]$ gegeben und $d := ggT(a_0, ..., a_n)$. Also ist $f(X) = dg(X)$ mit $g(X) \in \mathbb{Z}[X]$.

a) Zeigen Sie, daß wenn es einen Teiler $t(X)$ von $g(X)$ gibt, d.h. $g(X) = s(X)t(X)$ mit $s(X), t(X) \in \mathbb{Z}[X]$, dann gilt o.E: $m := Grad(t(X)) \leq \frac{1}{2}n$. Wenn man mit $z_0, ..., z_m$ paarweise verschiedene ganze Zahlen nimmt, welche Werte kann $t(z_i)$ mit $i \in \{0, ..., m\}$ nur annehmen?

b) Man folgere, daß das Polynom in endlich vielen Schritten faktorisierbar ist. D.h. unter anderem, daß man in endlich vielen Schritten feststellen kann, ob ein Polynom reduzibel ist oder nicht. (Hinweis: Lagrange-Interpolation)

4 . Aufgabe (6 Punkte):
Zeigen oder widerlegen Sie die Irreduzibilität der folgenden Polynome in $\mathbb{Q}[X]$:

a) $X^6 + X^2 + 1$

b) $X^6 + X^3 + 1$

c) $X^7 + X + 1$

Zusätzliche Fragen zum letzten Zettel (ohne Wertung)

a) Was ist das Minimalpolynom von $cos(\frac{2\pi}{9})$?

b) Wie läßt sich $cos(\frac{2\pi}{9})^3$ einfacher schreiben?

c) Warum kann man nicht jeden Winkel mit Zirkel und Lineal durch drei teilen?

d) Welchen beispielsweise nicht?

e) Welches (gleichschenklige) Dreieck kann man also nicht konstruieren?

f) Wenn man hinnimmt, daß jeder endliche Körper die Kardinalität p^n mit einer Primzahl p hat, wie läßt sich für $n > 1$ die Addition und die Multiplikation der Elemente hinschreiben? Wie bekommt man die entsprechenden Verknüpfungstafeln? Gibt es einen Unterschied zu $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$?

g) Welche Dimension hat der Körper $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}, ..., \sqrt{p_n})$ über dem Körper der rationalen Zahlen?

h) Kennen Sie noch andere transzendente Zahlen?

i) Was kann man über das Verhältnis der Mächtigkeit der algebraischen im Vergleich zu der Mächtigkeit der transzendenten Zahlen sagen?