Übungen zur Algebra I
- 2. Blatt -

Prof. Dr. K. Wingberg WS 2008/2009
J. Bartels abzugeben bis Dienstag, den 21. Oktober 2008 um 9:15 Uhr

http://www.mathi.uni-heidelberg.de/˜bartels/Vorlesung

Name: /name/

Matrikelnummer: /nr/

Übungsleiter: /uebleiter/

2. Name: /namezwei/

2. Matrikelnummer: /nrzwei/

Man achte auf eine saubere Darstellung und eine ordentliche Schrift. Bitte keine maschinell erstellten Lösungen abgeben.

Aufgabe	1	2	3	4	$\sum$
Punkte					

---

1 . Aufgabe (6 Punkte):
Zeigen Sie die Irreduzibilität von $X^3 - 3X + 1$ über $\mathbb{Q}$. Es sei $\alpha \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle dieses Polynoms. Was ist $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]$? Ist α mit Zirkel und Lineal aus $\mathbb{Q}$ konstruierbar?

2 . Aufgabe (6 Punkte):

a) Zeigen Sie, daß das Polynom $P(X) = X^3 + X + 1$ über $\mathbb{F}_2$ irreduzibel ist.

b) Man setzt: $\mathbb{F}_8 := \mathbb{F}_2[X]/(X^3 + X + 1)$. Finden Sie einen Erzeuger von $\mathbb{F}_8^*$.

3 . Aufgabe (6 Punkte):

a) Es sei F eine quadratische Erweiterung des Körpers E, und ein Element $x \in F \setminus E$ derart gegeben, daß $x^2 \in E$ gilt und ein weiteres Element $a \in E$. Dann gilt: Wenn a ein Quadrat in F und kein Quadrat in E ist, dann ist ax^2 ein Quadrat in E.

b) Es seien $p_1, ..., p_n$ paarweise verschiedene Primzahlen. Gegeben seien die Aussagen:
a_n) der Körper $\mathbb{Q}(\sqrt{p_1}, ..., \sqrt{p_n})$ hat den Grad 2^n über $\mathbb{Q}$.
b_n) ein Element $x \in \mathbb{Q}$ ist genau dann ein Quadrat in $\mathbb{Q}(\sqrt{p_1}, ..., \sqrt{p_n})$, wenn es eine Teilmenge $I \subset \{1, ..., n\}$ gibt, so daß $x \prod_{i \in I} p_i$ ein Quadrat in $\mathbb{Q}$ ist.

Zeigen Sie, daß die Aussagen a_n) und b_n) (bzw. a_n) und b_{n-1})) zusammengenommen die Aussage a_{n+1}) (bzw. b_n)) zur Folge hat.

c) Zeigen Sie damit, daß die Menge $\{\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}, ...\}$ der Quadratwurzeln der Primzahlen über $\mathbb{Q}$ linear unabhängig ist.

4 . Aufgabe (6 Punkte):
Es sei $\alpha \in \mathbb{C}$ eine algebraische Zahl über $\mathbb{Q}$ und $P(X) \in \mathbb{Q}[X]$ dessen Minimalpolynom über $\mathbb{Q}$, es gelte $Grad(P(X)) = d \geq 2$.

a) Zeigen Sie, daß $P'(\alpha) \neq 0$ gilt.

b) Zeigen Sie, daß es eine reelle Zahl $c > 0$ gibt, so daß für jedes $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}_{>0}$ die Ungleichung

$$|\alpha - \frac{p}{q}| \geq \frac{c}{q^d} \text{ gilt.}$$

Hinweis: benutzen Sie den Mittelwertsatz.

c) Zeigen Sie, daß die reelle Zahl

$$\sum_{n=0}^{\infty} 10^{-n!}$$

transzendent über $\mathbb{Q}$ ist. Hinweis: Beweisen Sie durch Widerspruch.

Zusätzliche Fragen zum letzten Zettel (ohne Wertung)

a) Was ist die Zahl, die in der 1. Aufgabe konstruiert wurde?

b) Was ist der Unterschied zwischen dem Minimalpolynom von α, welches zum einen als Endomorphismus via Linksmultiplikation auf den Elementen von $\mathbb{Q}(\alpha)$ verstanden wird und zum anderen wie es in der Vorlesung definiert wurde?