Übungen zur Algebra I

- 12. Blatt -

Prof. Dr. K. Wingberg
J. Bartels

WS 2008/2009
abzugeben bis Dienstag, den 13. Januar 2009 um 9:15 Uhr

http://www.mathi.uni-heidelberg.de/~bartels/Vorlesung

Name:	/name/	Matrikelnummer:	/nr/
Übungsleiter:	/uebleiter/		
2. Name:	/namezwei/	2. Matrikelnummer:	/nrzwei/

Man achte auf eine saubere Darstellung und eine ordentliche Schrift. Bitte keine maschinell erstellten Lösungen abgeben.

Aufgabe	1	2	3	$\sum$
Punkte				

---

1 . Aufgabe (6 Punkte):

a) Zeigen Sie, daß Gruppen der Ordnung 48 einen nichttrivialen Normalteiler mit 8 oder 16 Elementen haben.

b) Zeigen Sie, daß wenn eine Gruppe G mit 55 Elementen auf einer Menge M mit 18 Elementen operiert, es mindestens zwei Fixpunkte gibt, d.h. es gibt $m_1, m_2 \in M$, so daß für alle $g \in G$ gilt: $g.m_i = m_i$, wobei $i \in \{1, 2\}$ ist. Hinweis: Bahnengleichung!

2 . Aufgabe (6 Punkte):
Es sei die Situation wie auf dem 8. Blatt, 3. Aufgabe. Durch die Gruppen N und H sei durch $\varphi : H \to Aut(N)$ auf der Menge $N \times H$ wie dort eine Gruppenstruktur definiert. Diese Gruppe bezeichnet man mit $N \rtimes_\varphi H$. Man zeige:

a) Wenn zwei Homomorphismen $\varphi, \psi : H \to Aut(N)$ gegeben sind, dann sind $N \rtimes_\varphi H$ und $N \rtimes_\psi H$ genau dann isomorph zueinander, wenn es einen Isomorphismus $\alpha : H \to H$ gibt, so daß $\varphi = \psi \circ \alpha$ gilt.

b) Es seien p, q zwei verschiedene Primzahlen, o.B.d.A. $p < q$. Bestimmen Sie alle Gruppen der Ordnung pq. Hinweis: Unterscheiden Sie die Fälle $p \nmid (q-1)$ und $p | (q-1)$.

3 . Aufgabe (6 Punkte):
Es sei $f(X) = X^6 - 72 \in \mathbb{Q}[X]$.

a) Zeigen Sie, daß f irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$ ist, bestimmen Sie den Zerfällungskörper L und dessen Grad über $\mathbb{Q}$.

b) Geben Sie $Gal(L/\mathbb{Q})$ als Untergruppe der symmetrischen Gruppe S_6 an. Ist die Gruppe abelsch?

c) Bestimmen Sie alle Zwischenkörper Z der Erweiterung $L/\mathbb{Q}$ mit $[Z : \mathbb{Q}] = 6$. Welche davon sind Galoissch über $\mathbb{Q}$?

Bemerkungen zum Weihnachtsblatt:

Die vierte Aufgabe ist eine Veröffentlichung von B. L. van der Waerden in den Mathematischen Annalen N$^{\underline{o}}$ 109 von 1934: es geht um die „Seltenheit der Gleichungen mit Affekt“. Unter dem „Affekt“ einer separablen Gleichung $n^{\underline{ten}}$ Grads $f(X) = 0$ versteht man den Index $(S_n : Gal(f, K))$ und dementsprechend ist eine Gleichung ohne Affekt (auch affektfreie Gleichung genannt) eine solche, bei der dieser Index der Zahl 1 entspricht. Historisch gesehen ist dieses Thema viel behandelt worden, neben dem erwähnten Mathematiker u.a. von D. Hilbert und M. Bauer. Der in dieser Aufgabe ausgearbeitete Beweis entspricht dem Zugang in diesem Artikel und ist mitunter bis heute ein beliebtes Thema für Zulassungsarbeiten oder Seminarvorträge.

Zu Geschichte des 17-Ecks und Nebenwirkungen lesen Sie ein vernünftiges Algebrabuch und fragen Sie Ihren Übungsleiter oder Professor.