Übungen zur Algebra I

- 2. Unbewertetes Zusatzblatt -

Prof. Dr. K. Wingberg
J. Bartels

WS 2008/2009
nicht abzugeben

http://www.mathi.uni-heidelberg.de/~bartels/Vorlesung

---

1 . Aufgabe (6 Punkte):
Sei G eine Gruppe mit 2007 Elementen. Zeigen Sie:

a) G besitzt eine normale 223-Sylowgruppe N.

b) Die Operation von G auf N durch Konjugation induziert eine Operation der Faktorgruppe G/N auf N und G/N enthält eine Untergruppe H der Ordnung 3, die trivial auf N operiert.

c) Folgern Sie, daß die Gruppe G einen abelschen Normalteiler der Ordnung 669 enthält.

2 . Aufgabe (6 Punkte):
Betrachten Sie den endlichen Körper $\mathbb{F}_5$ mit fünf Elementen, das Polynom $f(X) = X^3 + X + 1 \in \mathbb{F}_5[X]$ und den Quotientenring $K = \mathbb{F}_5[X]/(f(X))$. Weiter bezeichne α die Restklasse von X modulo $(f(X))$.

a) Zeigen Sie, daß K ein Körper mit 125 Elementen ist und daß $\{1, \alpha, \alpha^2\}$ eine $\mathbb{F}_5$-Basis von K ist.

b) Bestimmen Sie die Matrix $M \in GL_3(\mathbb{F}_5)$, die den Frobenius-Automorphismus $F : K \to K, x \mapsto x^5$, bezüglich der Basis $\{1, \alpha, \alpha^2\}$ darstellt.

c) Bestimmen Sie eine Basis für den Eigenraum von F zum Eigenwert 1.

3 . Aufgabe (6 Punkte):
Bestimmen Sie den Zerfällungskörper L des Polynoms

$$f(X) = (X^2 - 3)(X^3 + 5) \in \mathbb{Q}[X]$$

und die Galoisgruppe $Gal(L/\mathbb{Q})$.

4 . Aufgabe (6 Punkte):

a) Prüfen Sie, ob die alternierende Gruppe A_4 ein Element resp. eine Untergruppe der Ordnung 6 enthält.

b) Geben Sie das kleinste n an, so daß A_n ein Element resp. eine Untergruppe der Ordnung 6 enthält.

5 . Aufgabe (6 Punkte) (Sympathiepunkte)**:**
Bringen Sie Ihrer Übungsgruppe in der ersten Stunde nach Weihnachten selbstgebackene Plätzchen oder Kuchen mit!