Übungen zur Algebra I
- Zusätzliches Weihnachtsblatt -

Prof. Dr. K. Wingberg
J. Bartels

WS 2008/2009
abzugeben bis Mittwoch, den 7. Januar 2009 um 9:15 Uhr

http://www.mathi.uni-heidelberg.de/~bartels/Vorlesung

N.B.: Dieser Zettel dient allein der Pflege Ihres Punktekontos: es handelt sich um zusätzliche Punkte außerhalb der Reihe - es entsteht Ihnen also kein Nachteil, wenn Sie diesen Zettel nicht bearbeiten.

Name:	/name/	Matrikelnummer:	/nr/
Übungsleiter:	/uebleiter/		
2. Name:	/namezwei/	2. Matrikelnummer:	/nrzwei/

Man achte auf eine saubere Darstellung und eine ordentliche Schrift. Bitte keine maschinell erstellten Lösungen abgeben.

Aufgabe	1	2	3	4	$\sum$
Punkte					

---

1 . Aufgabe (6 Punkte):
Es sei E der Zerfällungskörper von $X^7 - 6$ über $\mathbb{Q}$. Zeigen Sie

a) $[E : \mathbb{Q}] = 42$ und $\zeta_7 + \sqrt[7]{6}$ ist ein primitives Element dieses Körpers.

b) Es gibt genau einen Zwischenkörper F von $E/\mathbb{Q}$ mit $[E : F] = 7$, nämlich $\mathbb{Q}(\zeta_7)$.

c) Die Galoisgruppe G von $E/\mathbb{Q}$ besitzt Elemente σ, τ mit

$$ord(\sigma) = 7, ord(\tau) = 6, \tau\sigma\tau^{-1} = \sigma^3$$

und entspricht einem semidirekten Produkt (s. 8. Blatt, 3. Aufgabe).

d) Man verschaffe sich eine Übersicht über alle Zwischenkörper von $E/\mathbb{Q}$.

Nota bene: Zur Bestimmung der Galoisgruppe mittels Reduktion, s. den Artikel von Lenstra und Stevenhagen: http://www.math.leidenuniv.nl/~hwl/papers/cheb.pdf (allgemeinverständlich)

2 . Aufgabe (6 Punkte):
Es sei $L = \mathbb{Q}(\zeta)$, wobei $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{17}} \in \mathbb{C}$ ist. Zeigen Sie:

a) $G = Gal(L/\mathbb{Q})$ ist zyklisch vom Grad 16: $\{e\} \leq H_1 \leq H_2 \leq H_3 \leq H_4 = G$, wobei $\sharp H_i = 2^i$ gilt.

b) Wenn $H_i \leq G$ eine Untergruppe ist, gilt: $\sum_{\sigma \in H} \zeta^\sigma \in Fix(H_i) \setminus Fix(H_{i+1})$ und $\sum_{\sigma \in H_i} \zeta^\sigma$ ist Nullstelle eines Polynoms zweiten Grades mit Koeffizienten in $Fix(H_{i+1})$ für $1 \leq i \leq 3$.

c) Die iterierten quadratischen Erweiterungen liefern eine explizite Konstruktion des regulären Siebzehnecks. Führen Sie die Konstruktion durch.

Nota bene: Unter $Fix(H_i)$ versteht man L^{H_i}. Ein Teil der Punkte wird für saubere, schöne und übersichtliche Darstellung der Konstruktion vergeben!

3 . Aufgabe (6 Punkte):
Es sei F ein Körper der Kardinalität q. Wenn $d \geq 1$ ist, bezeichne I_d die Menge der normierten irreduziblen Polynome vom Grad d aus $F[X]$ und N_d ihre Anzahl.

a) Es sei $n \geq 1$. Zeigen Sie, daß der Grad eines irreduziblen Teilers von $X^{q^n} - X$ die Zahl n teilt und daß umgekehrt jedes Element aus I_d ein Teiler von $X^{q^n} - X$ ist, wenn $d|n$ gilt.

b) Zeigen Sie die Gleichheit
$$q^n = \sum_{d|n} dN_d.$$

c) Zeigen Sie, daß für $n \in \mathbb{N}$
$$N_n \geq \frac{1}{n} q^n \frac{q-2}{q-1} \text{ gilt.}$$

d) Es sei $\mu : \mathbb{N} \setminus \{0\} \to \{-1, 0, 1\}$ durch $\mu(n) = (-1)^r$ gegeben, wenn n das Produkt von r verschiedenen Primzahlen ist und im sonstigen Fall durch $\mu(n) = 0$ definiert. Zeigen Sie: Wenn f und g zwei Funktionen von $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ nach $\mathbb{C}$ sind, dann gilt $f(n) = \sum_{d|n} g(d)$ genau dann für jedes n, wenn $g(n) = \sum_{d|n} \mu(n/d) f(d)$ für jedes n gilt. Insbesondere gilt
$$N_n = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \mu(n/d) q^d$$
.

4 . Aufgabe (6 Punkte):
Ziel dieser Aufgabe ist es, sich ein Bild davon zu machen, wie oft die symmetrische Gruppe S_n als Galoisgruppe vorkommt. Es sei p eine Primzahl.

a) Zeigen Sie: Es gibt mindestens

- $\frac{p^n}{3n}$ Polynome $n^{\underline{ten}}$ Grades in $\mathbb{F}_p[X]$, welche normiert und irreduzibel sind.
- $\frac{p^n}{3(n-1)}$ normierte Polynome $n^{\underline{ten}}$ Grades in $\mathbb{F}_p[X]$, welche einen irreduziblen Teiler vom Grad $n-1$ haben.
- $\frac{p^n}{9.(n-2)}$ normierte Polynome $n^{\underline{ten}}$ Grads in $\mathbb{F}_p[X]$, welche einen irreduziblen Teiler vom Grad 2 haben und deren restliche irreduziblen Teiler allesamt ungeraden Grades sind.

b) Es sei $k = max\{3n, 3(n-1), 9(n-2)\}$, $\epsilon > 0$ und $m \in \mathbb{N}$ so gewählt, daß $(1-\frac{1}{k})^m < \epsilon$ gilt. Es sei $P := p_1 \cdots p_m$ das Produkt der ersten m Primzahlen. Zeigen Sie, daß es in $\mathbb{Z}/P\mathbb{Z}[X]$ höchstens

$$(1-\frac{1}{k})^m P^n$$

verschiedene normierte Polynome $n^{\underline{ten}}$ Grades gibt, die weder modulo p_1, noch modulo $p_2, ..., p_m$ irreduzibel sind.
Folgern Sie, daß mindestens $(1-3\epsilon)P^n$ normierte Polynome f in $\mathbb{Z}/P\mathbb{Z}[X]$ vom Grad n gibt, die die folgende Eigenschaft haben:
Es gibt ein $p_i \in \{p_1, ..., p_m\}$, so daß

- f modulo p_i normiert und irreduzibel ist.
- f modulo p_i einen irreduziblen Teiler vom Grad $n-1$ hat.
- f modulo p_i einen irreduziblen Teiler vom Grad 2 hat und dessen restliche irreduziblen Teiler ungeraden Grades sind.

c) Zeigen Sie, daß die Galoisgruppe eines normierten Polynoms $f \in \mathbb{Z}[X]$ vom Grad n, dessen Rest modulo P die in Teil b) erwähnte Eigenschaft hat, die symmetrische Gruppe S_n ist.

d) Es sei $N \in \mathbb{N}$ derart, daß $2N+1 \geq P$. Man betrachte nun die Menge der Polynome

$$f(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + ... + a_0 \in \mathbb{Z}[X],$$

für deren Koeffizientenbeträge $|a_i| \leq N$ gilt. Zeigen Sie, daß es in den höchstens $3\epsilon P^n$ Restklassen modulo P, in denen alle Polynome obiger Form liegen, deren Galoisgruppe nicht die symmetrische Gruppe S_n ist; höchstens $3\epsilon(4N+1)^n$ Polynome der obigen Menge gibt.
Folgern Sie, daß für die Polynome $f \in \mathbb{Z}[X]$ vom Grad n folgendes gilt:
Zu $\epsilon > 0$ gibt es ein N_0 derart, daß für jedes $N > N_0$ gilt:

$$\frac{\sharp\{\text{ normierte Polynome mit Koeffizientenbetrag } \leq N \text{ und Galoisgruppe } \neq S_n\}}{\sharp\{\text{ alle normierten Polynome mit Koeffizientenbetrag } \leq N\}} < 3\epsilon 2^n.$$

Mit anderen Worten: Der Anteil der Polynome mit Galoisgruppe S_n ist mindestens $1-3\epsilon 2^n$, wenn N groß genug gewählt ist.

5 . Aufgabe (6 Punkte) (Sympathiepunkte)**:**
Bringen Sie Ihrer Übungsgruppe in der letzten Stunde vor Weihnachten selbstgebackene Plätzchen oder Kuchen mit!

$$\begin{gathered}
\spadesuit \\
\pm \\
\gg\ll \\
\gg \heartsuit \ll \\
\Uparrow\gg\gg\ll\ll\Uparrow \\
>\gg\gg \diamondsuit \ll\ll< \\
\gg\gg\ll\ll \\
\gg\gg \circ \ll\ll \\
\gg \nabla \gg\ll \phi \ll \\
\gg\gg\gg \infty \ll\ll\ll\ll \\
\Uparrow\gg \oplus \gg\gg\ll\ll\curvearrowleft\ll\Uparrow \\
>\gg\gg\gg\gg \Theta \ll\ll\ll\ll< \\
\gg \odot \gg\gg\ll\ll \int \ll \\
\gg\gg\gg\gg\bowtie\ll\ll\ll\ll \\
\gg\gg \cup \gg\gg\ll\ll \delta \ll \\
\Uparrow\gg\gg\gg\gg\gg \otimes \ll\ll\ll\ll\ll\Uparrow \\
>\gg\gg \cap \gg\gg\gg\ll\ll \copyright\ ® \ll\ll< \\
\| \\
\Longleftrightarrow
\end{gathered}$$

Ein angenehmes und ruhiges Weihnachtsfest und Gottes Segen auch im kommenden Jahr!