Übungen zur Algebra I
- 1. Blatt -

Prof. Dr. K. Wingberg
J. Bartels

WS 2008/2009
abzugeben bis Dienstag, den 14. Oktober 2008 um 9:15 Uhr
in den Kästen neben dem Seifertraum

http://www.mathi.uni-heidelberg.de/~bartels/LA

Name: /name/

Matrikelnummer: /nr/

Übungsleiter: /uebleiter/

2. Name: /namezwei/

2. Matrikelnummer: /nrzwei/

Man achte auf eine saubere Darstellung und eine ordentliche Schrift. Bitte keine maschinell erstellten Lösungen abgeben.

$Aufgabe$	1	2	3	4	$\sum$
$Punkte$					

---

1 . Aufgabe (6 Punkte):
Gegeben sei eine Gerade mit den Punkten 0 und 1. Konstruieren Sie daraus die komplexe Zahl

$$-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\sqrt{5}-\sqrt{\frac{5}{8}+\frac{1}{8}\sqrt{5}}.i.$$

Dokumentieren Sie Ihre Vorgehensweise.

2 . Aufgabe (6 Punkte):
Gegeben sei der $\mathbb{Q}$-Vektorraum

$$K=\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3})=\{a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}+d\sqrt{6}|a,b,c,d\in\mathbb{Q}\}\subset\mathbb{C}.$$

Zeigen Sie:

a) Jedes Element $\alpha \in K\setminus\{0\}$ definiert einen Isomorphismus $K\to K, x\mapsto \alpha x$, den man auch mit α bezeichnen kann.

b) Berechnen Sie die Eigenwerte und das Minimalpolynom von $\sqrt{2}$ und $\sqrt{2}+\sqrt{3}$.

3 . Aufgabe (6 Punkte):
Es sei das Polynom $P(X) = X^3 + X + 1$ gegeben. Es sei $K := \mathbb{Q}[X]/(P)$ der Restklassenring modulo P.

a) Zeigen Sie, daß jedes $\alpha \in K \setminus \{0\}$ invertierbar ist, indem Sie zeigen, daß das Polynom P irreduzibel ist.

b) Was ist das Inverse von $X \ mod \ P$ und $X^2 + X \ mod \ P$?

4 . Aufgabe (6 Punkte):
Für eine natürliche Zahl $n \geq 2$ betrachte man das regelmäßige $n-$Eck Γ im $\mathbb{R}^2$ mit den Ecken A_k, dessen Koordinaten durch

$$(x, y) = (cos(2\pi k/n), sin(2\pi k/n)),\ 1 \leq k \leq n$$

gegeben sind. $\mathcal{O}$ sei der Ursprung des Koordinatensystems. D_n sei die Gruppe der Drehungen und Spiegelungen der Ebene, welche die Ecken A_k ineinander überführen.

a) Zeigen Sie, daß D_n die zyklische Gruppe der Ordnung n enthält, welche von der Rotation r um $\mathcal{O}$ um den Winkel $2\pi/n$ erzeugt wird und daß sie die Spiegelung s an der $x-$Achse enthält.

b) Es sei $g \in D_n$ gegeben. Zeigen Sie, daß $g(\mathcal{O}) = \mathcal{O}$ und $det(g) \in \{\pm 1\}$ gilt. Wenn $det(g) = 1$ ist und eine Ecke A_k von g festgelassen wird, dann gilt $g = id$.

c) Zeigen Sie, daß D_n von r und s erzeugt wird.