RUPRECHT-KARLS-UNIVERSITÄT HEIDELBERG

MATHEMATISCHES INSTITUT

Vorlesung Differentialgeometrie II
Heidelberg, 24.10.2014

ÜBUNGSBLATT 1

Jacobifelder

Abzugeben bis Freitag, 31.10.14, 14:00 Uhr

(15 Punkte je Aufgabe)

Aufgabe 1. Sei M eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und $\gamma : \mathbb{R} \to M$ eine Geodätische.

(a) Sei J_1 das Jacobifeld entlang γ mit Anfangsbedingung $J_1(0) = \dot\gamma(0),\ \dot J_1(0) = 0$. Zeigen Sie, dass $J_1(t) = \dot\gamma(t)$ gilt und dass eine zugehörige 1-Parameter-Familie von Geodätischen durch $\gamma_{v(\tau)}(t) = \gamma(\tau + t)$ gegeben ist.

(b) Sei J_2 das Jacobifeld entlang γ mit Anfangsbedingung $J_2(0) = 0,\ \dot J_2(0) = k\dot\gamma(0),\ k \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $J_2(t) = kt\dot\gamma(t)$ gilt und dass eine zugehörige 1-Parameter-Familie von Geodätischen durch $\gamma_{v(\tau)}(t) = \gamma((1 + k\tau)t)$ gegeben ist.

(c) Sei J_3 ein Jacobifeld entlang γ, so dass $J_3(0), \dot J_3(0) \parallel \dot\gamma(0)$. Zeigen Sie, dass $J_3(t) = a\dot\gamma(t) + bt\dot\gamma(t)$ für geeignete $a, b \in \mathbb{R}$ gilt und finden Sie eine zugehörige 1-Parameter-Familie von Geodätischen.

Aufgabe 2. Sei M eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und $\gamma : \mathbb{R} \to M$ eine Geodätische.

(a) Sei J ein Jacobifeld entlang γ, so dass $J(0), \dot J(0) \perp \dot\gamma(0)$. Zeigen Sie, dass $J(t) \perp \dot\gamma(t)\ \forall t$ gilt. Wir nennen diese Jacobifelder *normal* und jene aus Aufgabe 1 *tangential*.

(b) Folgern Sie, dass sich jedes Jacobifeld J entlang γ eindeutig in ein normales und ein tangentiales Jacobifeld zerlegen lässt.

(c) Seien J_γ ein beliebiges Jacobifeld entlang γ und J_δ ein Jacobifeld entlang der Geodätischen $\delta(t) = \gamma(\lambda t),\ \lambda > 0$ mit gleichen Anfangsbedingungen, also $J_\gamma(0) = J_\delta(0), \dot J_\gamma(0) = \dot J_\delta(0)$. Zeigen Sie, dass $J_\delta(t) = J_\gamma(\lambda t)$ gilt.

Aufgabe 3. Sei $M = (\mathbb{R}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ der euklidische Raum. Seien $x \in M$ sowie $u, v, w \in \mathrm{T}_xM$ gegeben.
Bestimmen Sie explizit das Jacobifeld entlang der Geodätischen γ_u mit Anfangsbedingung $J(0) = v, \dot J(0) = w$, und finden Sie eine zugehörige 1-Parameter-Familie von Geodätischen.

Aufgabe 4. Sei N eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und $X, Y, Z \in \mathcal{X}(N)$ Vektorfelder. Zeigen Sie, dass der Ausdruck

$$\nabla^2_{X,Y} Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_{\nabla_X Y} Z$$

tensoriell ($C^\infty(N)$-linear) in X und Y ist.