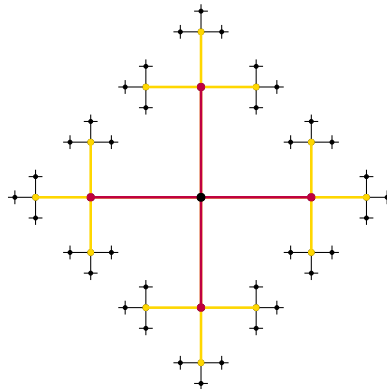




UNIVERSITÄT  
HEIDELBERG  
ZUKUNFT  
SEIT 1386

Prof. P. Schwer  
Dr. A. Randecker  
10. Januar 2024

## SEMINAR GRUPPEN, GRUPPENOPERATIONEN UND BÄUME



In diesem Seminar geht es darum, Gruppen zu studieren, indem wir ihre Operationen auf metrischen Räumen betrachten. Insbesondere interessieren wir uns für die Operationen von Gruppen auf Graphen, speziell auf Bäumen.

Weitere Informationen und die Vortragsbeschreibungen finden Sie auf [https://www.mathi.uni-heidelberg.de/~arandecker/Seminar\\_GGT\\_SS24](https://www.mathi.uni-heidelberg.de/~arandecker/Seminar_GGT_SS24).

*Vorbesprechung:*

**Wir treffen uns am Mittwoch, 31. Januar, um 13:00 Uhr (s. t.) im Seminarraum 8, um die Themen zu vergeben und den Ablauf des Seminars zu besprechen.**

Bitte melden Sie sich rechtzeitig bei uns, wenn Sie einen Vortrag übernehmen möchten, aber nicht an der Vorbesprechung teilnehmen können.

*Termine der Vorträge:*

Das Seminar findet an drei Freitagen ganztags statt. Die genauen Termine sind

- 19. April, 11:00 Uhr bis 17:00 Uhr
- 17. Mai, 11:00 Uhr bis 17:00 Uhr
- 7. Juni, 11:00 Uhr bis 17:00 Uhr

Teilnahme an allen drei Tagen wird vorausgesetzt.

*Zielgruppe und Vorkenntnisse:*

Das Seminar kann als “Seminar im Bachelor” oder “Seminar im Master” in den Studiengängen der Mathematik angerechnet werden. Die Vorlesung “Algebra I” wird vorausgesetzt.

*Anmeldung:*

Wenn Sie einen Vortrag übernehmen möchten, tragen Sie sich bitte bis 30. Januar im MÜSLI ein und nehmen an der Vorbesprechung teil. Bei Fragen können Sie sich gerne an Anja Randecker ([randecker@mathi.uni-heidelberg.de](mailto:randecker@mathi.uni-heidelberg.de)) wenden.

# Vortragsthemen

## (1) Gruppenpräsentationen, Cayleygraphen und Präsentationskomplexe (Bachelor)

Im ersten Vortrag geht es darum, wie Gruppen durch Erzeuger und Relationen erzeugt sind. Außerdem lernen wir zwei Typen von metrischen Räumen kennen, auf denen Gruppen natürlicherweise operieren.

*Literatur:* [Löh17, Abschnitte 2.2 und 3.2]

## (2) Bäume und Charakterisierung von freien Gruppen (Bachelor)

Freie Gruppen werden eindeutig durch ihre Wirkung auf Bäumen charakterisiert. Als Anwendung erhalten wir den Satz von Nielsen–Schreier.

*Literatur:* [Ser03, I.3 ohne 3.3], [Mei08, 3.4] und Referenzen darin; alternativ auch [Löh17, Abschnitt 4.2]

## (3) Ping-Pong-Lemma und freie Untergruppen (Bachelor)

Eine Methode, um zu zeigen, dass eine Gruppe frei ist, ist das Ping-Pong-Lemma. Wir wollen das Ping-Pong-Lemma beweisen und anwenden.

*Literatur:* [Löh17, Abschnitte 4.3 und 4.4]

## (4) Geometrie im Großen und Quasi-Isometrien (Bachelor)

Da Cayleygraphen vom Erzeugendensystem abhängen, führen wir hier eine Äquivalenzrelation ein, unter der metrische Räume „gleich aussehen“, wenn wir sie „aus der Ferne“ betrachten.

*Literatur:* [Löh17, Abschnitte 5.1 und 5.2]

## (5) Der Satz von Švarc–Milnor (Bachelor)

Hier beweisen wir, dass unter bestimmten Bedingungen eine Gruppe, die auf einem metrischen Raum operiert, zu diesem quasi-isometrisch ist.

*Literatur:* [Löh17, Abschnitte 5.3 und 5.4]

## (6) Invarianten unter Quasi-Isometrie (Bachelor)

Nicht alle, aber überraschend viele interessante Eigenschaften von Gruppen bleiben unter Quasi-Isometrie erhalten. Wir wollen das Konzept der QI-Invarianz und Beispiele dafür kennenlernen.

*Literatur:* [Löh17, Abschnitt 5.6]

## (7) Enden von Gruppen (Bachelor)

In diesem Vortrag geht es um eine weitere Quasi-Isometrie-Invariante, nämlich Enden von Gruppen. Die Hauptaussage dieses Vortrags ist der Satz von Freudenthal–Hopf.

*Literatur:* [CM17, Office Hour Ten] und nach Bedarf [Löh17, Kapitel 8].

## (8) Amalgamierte Produkte und Eigenschaft (FA) (Bachelor)

Dieser Vortrag führt den Begriff des amalgamierten Produkts von Gruppen ein und stellt den Zusammenhang zwischen Amalgamen und Gruppenwirkungen auf Bäumen mittels Serres Eigenschaft (FA) vor.

*Literatur:* [Ser03, §6] bzw. [Ser03, Kapitel I] und [CM17, Office Hour Three] nach Bedarf.

### (9) Mittelbare Gruppen (Master)

Hier wollen wir einen wichtigen Begriff mit analytischem Geschmack einführen, und zwar die Mittelbarkeit von Gruppen. Interessante Beispiele zum Thema sind unter anderem freie Gruppen und die ganzzahlige Heisenberg-Gruppe. Ziel ist es, den Zusammenhang zwischen der Mittelbarkeit und dem Banach–Tarski–Paradoxon vorzustellen.

*Literatur:* [Löh17, Kapitel 9].

### (10) Asymptotische Dimension (Master)

Das Thema dieses Vortrags gehört zur „Geometrie im Großen“. Der Begriff der asymptotischen Dimension bzw. die Wohldefiniertheit (durch Quasi-Isometrien) sollen erklärt sowie verschiedene Beispiele gegeben werden.

*Literatur:* [CM17, Office Hour Eleven].

### (11) Die Maschine von E. Rips (Master)

In diesem Vortrag sollen die Erfindungen von Eliyahu Rips zu sogenannten Bandkomplexen vorgestellt werden mit dem Ziel, Gruppenwirkungen auf  $\mathbb{R}$ -Bäumen besser zu verstehen. Wichtige Objekte dabei sind unter anderem Graphen von Räumen oder Gruppen.

*Literatur:* Die Notizen [Wil03] von Henry Wilton.

### (12) Gruppenwachstum (Master)

Hier wird das Wachstum von Gruppen vorgestellt und erklärt, warum dies eine Quasi-Isometrie-Invariante ist. Hauptbeispiele zum Thema sind Gruppen mit polynomiell oder exponentiellem Wachstum.

*Literatur:* [Löh17, Kapitel 6].

## Literatur

[CM17] Matt Clay and Dan Margalit (eds.), *Office hours with a geometric group theorist*, Princeton University Press, 2017.

[Löh17] Clara Löh, *Geometric group theory. An introduction*, Universitext, Springer, 2017.

[Mei08] John Meier, *Groups, graphs and trees. An introduction to the geometry of infinite groups.*, London Mathematical Society Student Texts, vol. 73, Cambridge University Press, 2008.

[Ser03] Jean-Pierre Serre, *Trees*, Springer Monographs in Mathematics, Springer, 2003, Translated from the French original by John Stillwell, Corrected 2nd printing of the 1980 English translation.

[Wil03] Henry Wilton, *Rips theory*, April 2003.

# Ablauf des Seminars

## *Ablauf eines Seminartags*

An jedem Seminartag gibt es bis zu vier Vorträge, jeweils von 55 Minuten Länge. Dazu kommen jeweils fünf Minuten Fragen und fünf Minuten Feedback für die Vortragende oder den Vortragenden.

Gegen 13:30 Uhr machen wir eine Mittagspause von einer knappen Stunde.

## *Vorbesprechung zum Vortrag*

Spätestens zwei Wochen vor Ihrem Vortrag treffen Sie sich mit einer der Seminar-Betreuerinnen, um den Aufbau Ihres Vortrags zu besprechen. Bei Fragen können Sie sich natürlich schon vor dieser Besprechung melden.

## *Rücktritt*

Sollten Sie weniger als 14 Tage vor Ihrem Vortragstermin vom Vortrag zurücktreten, gilt das Seminar als nicht bestanden.

Sollten Sie aus anderen Gründen (insbesondere Krankheit) verhindert sein, melden Sie sich bitte so bald wie möglich bei uns, damit wir eine Lösung finden können.

## *Wichtigste Regel für die Konzeption eines Vortrags*

Ein Vortrag muss auf das Publikum ausgerichtet sein! Obwohl das so einleuchtend ist, ist es nicht einfach und wird sogar häufig vergessen. Halten Sie es sich daher bei der Vorbereitung regelmäßig vor Augen: Sie werden den Vortrag für die anderen Teilnehmenden des Seminars halten (und explizit nicht für die Betreuenden) und für diese soll er interessant und lehrreich sein.

## *Von der Vorlage zum Vortrag*

Machen Sie sich klar, dass verschiedene Medien wie Text und Vortrag unterschiedlich „funktionieren“. Es ist nicht das Ziel, alle bereitgestellten Unterlagen wörtlich in den Vortrag einzubauen. Nehmen Sie sich daher Zeit für die Bearbeitung des Materials und machen Sie sich klar, was die Zuhörenden schon wissen, was für sie interessant ist, was Verbindungen zu vorigen Vorträgen oder Vorlesungen schafft und so weiter.