

Einführung in die Iwasawa-Theorie

Seminar

Ort: M HS 4**Zeit:** Do 14.00-16.00 Uhr**Beginn:** 21.10.2004

Inhalt: Die Iwasawatheorie ist ein relativ junges und sehr aktives Gebiet der algebraischen Zahlentheorie und befasst sich (klassisch) mit sogenannten \mathbb{Z}_p -Erweiterungen. Dies sind Galoiserweiterungen K_∞ eines algebraischen Zahlkörpers K deren Galoisgruppe Γ isomorph zu \mathbb{Z}_p ist.

Das fundamentale Beispiel ist der Körper $K = \mathbb{Q}(\zeta)$, den man durch Adjunktion einer primitiven p -ten Einheitswurzel ζ enthält. Versuche die Fermatsche Vermutung zum Exponenten p direkt zu zeigen, scheitern daran, dass die Idealklassengruppe von K (genauer der p -Torsionsanteil) für ungerade p im allgemeinen zu groß ist. Dies ist einer der Gründe für ein Studium dieses $\text{Gal}(K/\mathbb{Q})$ -Moduls. Die entscheidende Idee Iwasawas war es nun gleich einen ganzen Turm von Körpererweiterungen K_n/K zu betrachten, nämlich alle Körpererweiterungen $K_n = K(\zeta_{p^n})$ wobei ζ_{p^n} eine primitive p^n -te Einheitswurzel ist. Das Kompositum K_∞ all dieser Körper hat eine zu \mathbb{Z}_p isomorphe Galoisgruppe Γ und der projektive Limes $I = \varprojlim I_n$ hat die Struktur eines $\mathbb{Z}_p[\Gamma]$ -Moduls. (Dabei ist I_n der p -Torsionsanteil der Idealklassengruppe von K_n .)

Die Iwasawa-Algebra $\Lambda = \mathbb{Z}_p[[\Gamma]]$ ist eine Vervollständigung dieses Gruppenrings und im ersten Teil des Seminars werden diese Begriffe bereitgestellt. Dann sollen die Moduln über Λ und Iwasawa-Moduln studiert werden. Dieser algebraischen Seite der Iwasawa-Theorie steht die analytische Seite gegenüber, nämlich die Konstruktion einer p -adischen L -Funktion (Kubota-Leopoldt). Diese beiden Aspekte der Iwasawa-Theorie sind über die sogenannte Hauptvermutung miteinander verbunden, die Galoisdarstellungen und p -adische L -Funktionen miteinander in Beziehung setzt.

Literatur:

- G. TAMME, *\mathbb{Z}_ℓ -Erweiterungen*, Vorlesungsmanuskript Regensburg, 1977/78. (Kann bei den Organisatoren ausgeliehen werden.)
- J. NEUKIRCH, A. SCHMIDT, AND K. WINGBERG, *Cohomology of number fields*, vol. 323 of Grundlehren der mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], Springer-Verlag, Berlin, 2000.
- L. C. WASHINGTON, *Introduction to cyclotomic fields*, vol. 83 of Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, second ed., 1997.

Vorkenntnisse: Das Seminar wendet sich an Studenten im Hauptstudium. Kenntnisse der Algebra, insbesondere Galoistheorie, Kreisteilungskörper und lokale Körper.

Anmeldung: *ab sofort* bei S. Wortmann (wortmann@mathi.uni-heidelberg.de, Zi.108, INF 288) oder bei K. Wingberg.