

Zetafunktionen und L-Reihen von Zahlkörpern

Programm des Seminars im SS 2005

1. RIEMANNSCHE ZETA FUNKTION UND DIRICHLETSCHES L-REIHEN

- definiere $\zeta(s)$ und $L(\chi, s)$ durch Reihendarstellungen in $\text{Re}(s) > 1$
- Eulersche Produktdarstellungen, [S](VI, 3.1)
- meromorphe Fortsetzung von ζ nach $\text{Re}(s) > 0$, [S](VI, 3.2)
- im weiteren benötigte Konvergenzsätze über Dirichlet-Reihen (man orientiere sich an [S](VI, 2.1, 2.2, 2.4), beweise aber gleich die etwas allgemeineren Resultate [L](VIII, Th.2 & Th.3))
- holomorphe Fortsetzung von $L(s, \chi)$, $\chi \neq 1$ nach $\text{Re}(s) > 0$, [S](VI, 3.3)
- (• Dauer: ca. $1\frac{1}{2}$ Sitzungen)

2. DER DIRICHLETSCHES PRIMZAHLSATZ

- Definition und Produktdarstellung der Zetafunktionen ζ_m , [S](VI, 3.4)
- das zentrale Resultat " $L(\chi, 1) \neq 0$ für $\chi \neq 1$ ", [S](VI, 3.4); dafür benötigt man die Proposition in [S](VI, 2.3) über Singularitäten von Dirichlet-Reihen
- Definition und Motivation des Begriffs der Dirichlet-Dichte von Mengen von Primzahlen, [S](VI, 4.1)
- Beweis des Dirichletschen Primzahlsatzes, [S](VI, 4.2, 4.3)
- (• Dauer: ca. $1\frac{1}{2}$ Sitzungen)

3. EXKURS ÜBER FUNKTIONALGLEICHUNGEN UND SPEZIELLE WERTE VON ZETA FUNKTIONEN

(Dies sollte ein frei gestalteter Übersichtsvortrag sein, dessen Inhalt noch genauer abgesprochen werden soll. Mögliche Themen sind etwa:

- Übersicht über verschiedene Typen von Zetafunktionen und L-Reihen
- analytische Fortsetzung und Funktionalgleichungen: Bedeutung und Skizze verschiedener Beweisansätze
- Werte von L-Reihen an ganzzahligen Stellen)
- (• Dauer: ca. 1 Sitzung)

4. DEDEKINDSCHE ZETA FUNKTIONEN UND VERALLGEMEINERTE DIRICHLET-L-REIHEN

- Definition der Dedekindschen Zetafunktion eines Zahlkörpers (Produkt- und Reihendarstellung), [L](VIII,S.160)
- Definition und elementare Eigenschaften der verallgemeinerten Idealklassengruppen (Strahlklassengruppen) $I(\mathfrak{c})/P_{\mathfrak{c}}$, [L](VI,1), $\mathbb{Q}(\zeta_n)$ als Beispiel
- Def. der partiellen Zetafunktionen $\zeta_k(s, [\mathfrak{f}])$ und der L-Reihen zu $L(s, \chi)$ zu Charakteren von $I(\mathfrak{c})/P_{\mathfrak{c}}$, [L](VIII,S.160-163)
- analytische Fortsetzung nach links von $\text{Re}(s) = 1$, Polstellenverhalten dort, unter Annahme von [L],(VI,Th.3)
- man hebe die sog. "analytische Klassenzahlformel" hervor:

$$\text{res}_{s=1} \zeta_k(s) = \frac{2^r (2\pi)^s R_k}{\#\mu_k \sqrt{d_k}} \cdot \#Cl_k$$

- (• Dauer: ca. 1 Sitzung)

5. IDEALE MIT BESCHRÄNKTER NORM IN EINER GEGEBENEN KLASSE

- Beweis einer asymptotischen Formel für die Anzahl der Ideale mit Norm $\leq N$ in einer (verallgemeinerten) Idealklasse mittels Minkowski-Theorie, [L](VI,2+3), [H](§8)
- Dauer: ca. 1 Sitzung

6. FUNDAMENTALE DICHTIGKEITSERGEBNISSE

- Definition der Dirichlet-Dichte einer Menge von Primidealen eines Zahlkörpers, [L](S.167)
- Bestimmung der Dirichlet-Dichte der vollzerlegten Stellen in einer Galoiserweiterung von Zahlkörpern, vgl. [H](§8,S.121)
- analytischer Beweis der 2. fundamentalen Ungleichung der Klassenkörpertheorie, sowie (simultan) Beweis von $L_c(1, \chi) \neq 0$ für solche χ , die auf den relativen Idealnormen $\mathcal{N}(c)$ einer Galoiserweiterung $K|k$ trivial sind, [L](S.164-165)
- Bestimmung der Dirichlet-Dichte der Primideale in einer gegebenen Klasse von $I(c)/\mathcal{N}(c)P_c$, vgl. [L](VIII, Kor. zu Th.3)
- Dauer: ca. 1 Sitzung

7. DIE ARTIN-REZIPROZITÄT FÜR KREISTEILUNGSERWEITERUNGEN

- zur Illustration der bisherigen Resultate leite man den Dirichletschen Primzahlsatz erneut her, vgl. [L],(Bsp. auf S.150-151)
- Def. des Artin-Symbols, elementare Eigenschaften, Nachweis der Surjektivität in abelschen Erweiterungen, Aussage des Artinschen Reziprozitätsgesetzes, [L](X,S.197-199)
- Beweis des Reziprozitätsgesetzes für Kreisteilungserweiterungen, [L](X,S.200)
- Beweisidee von Artins Beweis des Reziprozitätsgesetzes im allgemeinen Fall, vgl.[L](X,S.200ff.)
- Dauer: ca. 1 Sitzung

8. DER DICHTIGKEITSSATZ VON ĆEBOTAREV

- Formulierung des Dichtigkeitssatzes, vgl. [L](S.169)
- Beweisschritt 1: für Kreisteilungserweiterungen ist der Satz richtig, nach dem Artinschen Reziprozitätsgesetz und den Resultaten von Vortrag 6
- Beweisschritt 2: Beweis für abelsche Erweiterungen mittels Reduktion auf den zyklotomischen Fall, vgl. [FJ],(5.5 G) und [SL]
- Beweisschritt 3: Reduktion des allgemeinen Falls auf zyklische Erweiterungen, vgl. [FJ](5.5 H) und [SL]
- Dauer: ca. 1 Sitzung

9. KOROLLARE AUS DEM DICHTIGKEITSSATZ

- Satz von Frobenius, vgl. [SL]
- ein Normalitätskriterium für Erweiterungen von Zahlkörpern mittels Zerlegungsverhalten von Primstellen, vgl. [N](VII,13.8)
- Satz von Bauer: ein Zahlkörper ist eindeutig bestimmt durch die Menge der in ihm vollzerlegten Primzahlen, vgl. [N](VII,13.9&13.10)
- die absolute Galoisgruppe eines Zahlkörpers ist von Zerlegungsgruppen erzeugt; als Anwendung zeige man folgendes "Lokal-Global-Prinzip": ist k Zahlkörper mit $\mu_n \subset k^\times$, so ist der kan. Homomorphismus

$$k^\times / (k^\times)^n \longrightarrow \prod_{\mathfrak{p} \in \mathbb{P}(k)} k_{\mathfrak{p}}^\times / (k_{\mathfrak{p}}^\times)^n$$

injektiv, vgl. [NSW](9.1.3(i))

(• Dauer: ca. 1 Sitzung)

Literatur:

[FJ] Fried, M.; Jarden, M., Field Arithmetic, Springer, Heidelberg 1986

[H] Hasse, H., Vorlesungen über Klassenkörpertheorie, Physica-Verlag, Würzburg 1967

[L] Lang, S., Algebraic Number Theory, Addison-Wesley, Reading Mass. 1970

[N] Neukirch, J., Algebraische Zahlentheorie, Springer, Heidelberg 1992

[NSW] Neukirch, J.; Schmidt, A.; Wingberg, K., Cohomology of Number Fields, Springer, Heidelberg 2000

[S] Serre, J.-P., A Course in Arithmetic, Springer, Heidelberg 1973

[SL] Stevenhagen, P.; Lenstra, H.W., Chebotarëv and his density theorem. Math. Intell. 18, No.2, 26-37 (1996).