Prof. Dr. K. Wingberg, PD Dr. A. Schmidt Dr. O. Venjakob

Torsion in $K_*(\mathbb{Z})$

Seminar

Beginn: 08.05.03 **Raum:** M HS 4 **Zeit:** Do. 11-13 Uhr

Die (höheren) algebraischen K-Gruppen $K_n(\mathbb{Z})$, $n \geq 0$, wurden bekanntlich von Quillen eingeführt, der auch gezeigt hat, dass diese Gruppen endlich erzeugt sind. Nach Bass, Milnor, Karoubi sowie Lee/Szczarba sind diese Gruppen für $n \leq 3$ seit spätestens den 70er Jahren explizit bekannt: $K_0(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, $K_1(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2$, $K_2(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2$ und $K_3(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/48$. Ferner hat Borel [1] für $n \geq 4$ bewiesen, dass

$$rk_{\mathbb{Z}} K_n(\mathbb{Z}) = \begin{cases} 1 & \text{falls } n \equiv 1 \bmod 4 \\ 0 & \text{anderenfalls} \end{cases}$$

gilt. Das Ziel dieses Seminars besteht darin, einen Überblick über erwartete und vor allem bekannte Ergebnisse über die Torsionsuntergruppe von $K_*(\mathbb{Z})$ zu gewinnen und die Beweismethoden kennenzulernen. Neben dem rein K-theoretischen Interesse an solchen Ergebnissen entsteht eine weitere Motivation dazu aus dem Zusammenhang zwischen $K_*(\mathbb{Z})$ und der Theorie zyklotomischer Körper, wie er etwa durch die Lichtenbaum- oder Vandiver-Vermutung beschrieben wird.

Die Strategie, um Aussagen über die Torsion der K-Gruppen zu beweisen, besteht in der Regel darin, die K-Gruppen mittels der Hurewicz-Abbildung mit den (Ko)Homologie-Gruppen von $GL(\mathbb{Z})$ bzw. $SL(\mathbb{Z})$ zu vergleichen. Letztere bestimmt man dann durch geeignete Beschreibungen symmetrischer Räume, etwa mittels der Reduktionstheorie von Voronoi [12].

1. Vortrag: (Venjakob) Einführung ins Thema und Vortragsvergabe, dann: Zusammenhang zwischen $K_*(\mathbb{Z})$ und der Theorie zyklotomischer Körper, insbesondere Vandiver-Vermutung sowie Lichtenbaum-Vermutung

[3], [10], [9]

2. Vortrag (90 Min.): Da Voronoi's Reduktionstheorie (quadratischer Formen) eine zentrale Rolle spielt, sollte sie gründlich diskutiert werden, evtl. unter Betonung des 4-dimensionalen Falles: [11, §1.1], [10, §1, Prop.1, Prop. 2], siehe vor allem auch [4, §2+ dortige Verweise] (hier sollte vor allem auch darauf geachtet werden, was im 3. Vortrag für das Verständnis von [4, Pro. 3.1,Lem 3.2] benötigt wird). Das Hauptergebnis von Voronoi [12] ist wohl [4, Prop. 2.1 und anschließende Dishkussion] und sollte gut verstanden werden.

3. Vortrag (90 Min.): Hauptziel ist der Beweis von Proposition 1 in [11]. Dazu ist die reduzierte Homologie des spherischen Tits Gebäudes von SL_n zu berechnen und der Steinbergmodul einzuführen. Anschließend wird G-äquivariante (Ko)homologie eingeführt, insbesondere [11, §2]. Die Referenz dafür ist [2, VII.7/8 und X(4.1)], wobei nur das notwendigste erläutert werden soll, was (später) für [11, §2] und [10, Beweis von Thm 1] benötigt wird.

4. Vortrag: Zuerst soll Theorem 1 aus [11] bewiesen werden:

$H_1(SL_4(\mathbb{Z}), St_4)$ ist ist eine endliche 2-Gruppe.

Dazu ist [11, §3] vorzurechnen, wobei die benötigten Ergebnisse aus [4, §3,§4], die auf der Reduktionstheorie aufbauen, erklärt werden sollten. Mit Hilfe von [10, Prop. 3] kann nun Theorem 1 (loc. cit.) bewiesen werden, das eine obere Schranke der Torsion in $H_k(SL_N(\mathbb{Z}), \mathbb{Z})$ angibt. Mittels der Hurewicz-Abbildung erhält man dann eine obere Schranke der Torsion in $K_n(\mathbb{Z})$, Thm 2 (loc. cit.). Als Anwendung sollten noch kurz Thm 3 und Thm 4 (nicht aus 3.3!) genannt werden (der Beweis dieser Korollare erfolgte mehr oder weniger schon in Vortrag 1). Auf die Bemerkung 3.4, dass die ermittelte Schranke noch genug Platz für die Ungültigkeit der Vandiver-Vermutung läßt, sollte nicht verzichtet werden.

Bemerkung: Vortrag 2-4 sind sehr eng miteinander verwoben und sollten daher gut aufeinander abgestimmt sein, vielleicht bietet sich auch eine andere Aufteilung an, um die Ergebnisse aus [10] und [11] abzudecken.

5. Vortrag (1-2 Sitzungen): Soulé hat die Techniken aus [11] ausgeweitet, um eine obere Schranke der Torsion in $K_m(A)$ zu bestimmen, wobei A der Ganzheitsring eines beliebigen Zahlkörpers K ist. Dieser Vortrag sollte vor allem die nötigen Verallgemeinerungen/Änderungen gegenüber dem Fall $K = \mathbb{Q}$ herausarbeiten, ohne nochmals in alle Details zu gehen: Als erstes benötigt man Minkowski's Geometrie der Zahlen [9, §1], dann werden perfekte Formen durch hermitesche Matrizen (§2) sowie Voronoi's Reduktionstheorie durch die von Ash ersetzt (§3, loc. cit.). Die Hauptergebnisse in §4 ergeben sich nun formal ganz so wie im Fall $K = \mathbb{Q}$. Erwähnenswert sind noch Soulés Kommentare in §5.

Lee-Szczarba und Soulé zeigen in [4] und Addendum, dass die Gruppen $K_4(\mathbb{Z})$ und $K_5(\mathbb{Z})$ höchstens 2 oder 3-Torsion besitzen. Allgemeiner vermuten Lee-Szczarba, dass $K_n(\mathbb{Z})$ nur für $p \leq n+1$ p-Torsion haben kann (was allerdings im Widerspruch zur Lichtenbaum-Vermutung steht). "Kürzlich" hat Rognes gezeigt, dass $K_4(\mathbb{Z})$ trivial ist. In den restlichen Vorträgen soll die Beweisidee skizziert werden, der erste erledigt den Fall ungerader Torsion, während der zweite die 2-Torsion behandelt:

6. Vortrag (1-2 Sitzungen): In [8] wird die Homologie des K-Theorie Spektrums $K(\mathbb{Z})$ in den Graden bis einschließlich 4 modulo 2-Torsion berechnet, um daraus das Verschwinden von $K_4(\mathbb{Z})$ (modulo 2-Torsion) abzuleiten. Die Berechnung in §8 (loc. cit.) benutzt die "Rang Filtrierung Spektral Sequenz", für dessen Auswertung u.a. Soulés Ergebnis aus Vortrag 3 benötigt wird. Ausgehend von §8 sollte rückwärts der Versuch unternommen werden, die benötigten Techniken aufzurollen, soweit das in 90-180 Minuten möglich ist. Dazu dürften [6] und [7] hilfreich sein.

7. Vortrag (1-2 Sitzungen): Rognes und Weibel berechnen die 2-primäre algebraische K-Theorie von Ganzheitsringen bestimmter Zahlkörper in [5]. Dazu benutzen sie Voevodsky's Beweis der Milnor Vermutung sowie die Bloch-Lichtenbaum

Specktral Sequenz von motivischer Kohomologie zu algebraischer K-Theorie. Dieser Vortrag könnte einen "Bericht" über letztere Arbeit darstellen.

Die unten aufgeführte Literatur ist weitestgehend entweder elektronisch oder als Kopiervorlage bei mir erhältlich.

References

1. Jean-Pierre Borel, *Quelques résultats d'équirépartition liés aux nombres premiers généralisés de Beurling*, Acta Arith. **38** (1980/81), no. 3, 255–272. MR **82k:**10060
2. Kenneth S. Brown, *Cohomology of groups*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 87, Springer-Verlag, New York, 1994. MR **96a:**20072
3. Masato Kurihara, *Some remarks on conjectures about cyclotomic fields and K-groups of* $\mathbf{Z}$, Compositio Math. **81** (1992), no. 2, 223–236. MR **93a:**11091
4. Ronnie Lee and R. H. Szczarba, *On the torsion in $K_4(\mathbf{Z})$ and $K_5(\mathbf{Z})$*, Duke Math. J. **45** (1978), no. 1, 101–129. MR 58 #11074a
5. J. Rognes and C. Weibel, *Two-primary algebraic K-theory of rings of integers in number fields*, J. Amer. Math. Soc. **13** (2000), no. 1, 1–54. MR **2000g:**19001
6. John Rognes, *A spectrum level rank filtration in algebraic K-theory*, Topology **31** (1992), no. 4, 813–845. MR **94d:**19007
7. ———, *Approximating $K_*(\mathbf{Z})$ through degree five*, K-Theory **7** (1993), no. 2, 175–200. MR **94i:**19001
8. ———, *$K_4(\mathbf{Z})$ is the trivial group*, Topology **39** (2000), no. 2, 267–281. MR **2000i:**19009
9. C. Soulé, *A bound for torsion in the k-theory of algebraic integers*, Preprint, November 6, 2002, K-theory Preprint Archives, http://www.math.uiuc.edu/K-theory/0603/.
10. ———, *Perfect forms and the Vandiver conjecture*, J. Reine Angew. Math. **517** (1999), 209–221. MR **2001d:**11102
11. ———, *On the* 3*-torsion in $K_4(\mathbf{Z})$*, Topology **39** (2000), no. 2, 259–265. MR **2000i:**19008
12. G. Voronoi, *Nouvelle applications des parametres continus a la theorie des formes quadrartiques i*, Crelle **133** (1907), 97–178.