

Welters infinitesimales Kriterium

Vortrag in der AG Mannheim-Heidelberg

20.Juni.06

R.Weissauer

Der Tangentialraum des Thetadivisors

Im folgenden sei (X, Θ) eine unzerlegbare hauptpolarisierte abelsche Varietät. Dann ist der Thetadivisor Θ irreduzibel (dies ist sogar äquivalent zu unzerlegbar; siehe Marini p.21). Beachte $\Theta_x = \Theta \iff x = 0$, da Θ eine Hauptpolarisierung $X \xrightarrow{\sim} \hat{X}$ definiert. Bis auf eine Translation gilt dann $\Theta = (\theta)$ für die Riemannsche Thetafunktion

$$\theta(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^g} e^{\pi i(n' \tau n + 2n' z)} .$$

Wegen $\theta(-z) = \theta(z)$ ist Θ symmetrisch.

Lemma: Für $D \in \text{Lie}(X)$ gilt

$$\boxed{D \neq 0 \implies D\theta|_{\Theta} \neq 0} .$$

Beweis: Anderenfalls wäre $\frac{D\theta(z)}{\theta(z)} = \varphi(z)$ holomorph auf \mathbb{C}^g mit

$$\varphi(z + \gamma) = \varphi(z) + D \log(f)(z, \gamma) .$$

Hierbei hängt $D \log(f(z, \gamma))$ nicht von z ab. Also ist $\varphi(z)$ affin \mathbb{C} -linear (Ableitungen sind konstant). Dann ist $\varphi(z)$ aber konstant, denn $\varphi(z)$ invariant ist unter $n \in \mathbb{Z}^g$. Ein Widerspruch zu $D \log(f(z, \gamma)) = 2i\pi m' D$ (im Fall $D \neq 0$).

Benutzte Notationen: $\theta(z + \gamma) = f(z, \gamma)\theta(z)$ mit $f(z, \gamma) = \exp(i\pi m' \tau m + 2i\pi m' z)$ für $\gamma = n + m\tau$ aus dem Periodengitter $\Gamma = \mathbb{Z}^g + \mathbb{Z}^g \tau$.

Folgerung: Der Nullstellenort¹ von θ und $D\theta$ definiert einen Divisor $D\Theta$

$$D\Theta \subsetneq \Theta \subsetneq X$$

der Dimension $g - 2$ für jedes nichtverschwindende $D \in \text{Lie}(X)$.

Beachte $(D\theta)(z + \gamma) = D(f(z, \gamma))\theta(z) + f(z, \gamma)(D\theta)(z)$. Es gilt daher sogar $D\theta|_{\Theta} \in H^0(\Theta, \mathcal{O}(\Theta))$.

Singularitäten: Nach Ein-Lazarsfeld hat Θ_{sing} Kodimension 2 in Θ . Insbesondere ist Θ normal. Beachte

$$T(\Theta)_x = \text{Kern}\left(\text{grad}(\theta)(x)\right)$$

¹Die Gleichung $D\theta = 0$ ist nicht wohldefiniert in X , aber wohldefiniert in $\Theta \subseteq X$.

für den Gradient $grad(\theta(x)) = (\partial_1\theta(x), \dots, \partial_g\theta(x))$ bezüglich der Standardbasis des \mathbb{C}^g . Also gilt $D \in T(\Theta)_x \iff D\theta(x) = \theta(x) = 0$ für $D \in Lie(X)$. Dies bleibt richtig, wenn man Θ durch ein Translat Θ_y ersetzt

Folgerung:

$$\boxed{D \in T(\Theta_y)_x \iff x \in D\Theta_y} .$$

Adjunktionsformel: $J = O(-\Theta)$ gibt $J/J^2 \cong O_\Theta(-\Theta)$, also $(J/J^2)^\vee = O_\Theta(\Theta)$ (Normalenbündel). Somit ist $\omega_\Theta = O_\Theta(\Theta)$ die dualisierende Garbe von Θ .

***Lemma:** Die natürliche Abbildung $D \mapsto D\theta|_\Theta$ induziert einen Isomorphismus

$$Lie(X) \xrightarrow{\cong} H^0(\Theta, O(\Theta)) .$$

Injektivität: $(D\theta)|_\Theta = 0 \implies D = 0$.

Surjektivität: Wegen $H^0(X, O(\Theta)) = \mathbb{C} \cdot \theta$ und $0 \rightarrow O \xrightarrow{\theta} O(\Theta) \rightarrow O_\Theta(\Theta) \rightarrow 0$ sowie $H^1(X, O(\Theta)) = 0$ ergibt sich der Isomorphismus

$$H^0(\Theta, O_\Theta(\Theta)) \cong H^1(X, O) = \mathbb{C}^g .$$

Bemerkung: Man erhält eine ‘bemerkenswerte’ Gaussabbildung²

$$\Theta_{reg} \longrightarrow P^{g-1}(\mathbb{C}) .$$

Nach dem folgenden Satz von Ein-Lazarsfeld gilt (!)

$$\boxed{\dim(\Theta_{sing}) \leq g - 3}$$

für unzerlegbares X . Insbesondere ist daher Θ als vollständiger Durchschnitt normal und Cohen-Macaulay.

Lemma: $D_1\Theta \subseteq D_2\Theta$ im schematischen Sinn impliziert $D_1 = D_2$.

Beweis: Folgt aus $\mathbb{C}D\theta_\Theta \rightarrow H^0(\Theta, \omega) \rightarrow H^0(D\Theta, \omega) \rightarrow \mathbb{C}^g \rightarrow \mathbb{C}^{(g+1)g/2} \rightarrow \dots$

²Man kann zeigen, dass die Gaussabbildung dominant ist.

Riemann-Roch

Sei C eine glatte irreduzible Kurve und sei $\Theta = W_{g-1} + \kappa$ ein geeignetes Translat, dann gilt nach Riemann

$$\{x_1, \dots, x_g\} = C \cap \Theta_x$$

für alle $x \in X = \text{Jac}(C)$ in allgemeiner Lage. Weiterhin gilt

$$x_1 + \dots + x_g = x + \text{const.} \in \text{Pic}(X).$$

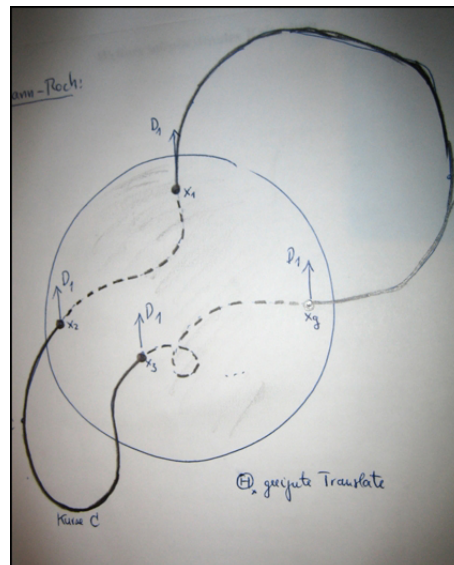
Vielfachheiten sind dabei zugelassen (Mumford Theta II, S.149). Das heisst das Linienbündel x wird representiert durch den Divisor

$$D = x_1 + \dots + x_g$$

vom Grad g auf C . Anders formuliert $\text{Tr}(C \cap \Theta_x) = x + \text{const.}$ oder

Riemann-Roch: $\alpha(C, \Theta) = \text{id}_X$.

Bemerkung: Mit Hilfe von Fay 2.10, Formel 38 oder Mumford Tata II, 3.224 und 3.226 Formel (1b) erhält man damit folgendes bemerkenswerte Bild!



Riemannsche Thetarelation

Aus der Transformationsformel folgt

$$\vartheta(z - \zeta)\vartheta(z + \zeta) \in H^0(X, O(2\Theta)) .$$

Also $\vartheta(z - \zeta)\vartheta(z + \zeta) = \sum_i c_i(\zeta)\vec{\vartheta}_i(z)$ für geeignete $\vartheta_i \in H^0(X, O(2\Theta))$. Die linke Seite ist symmetrisch in z und ζ . Bei geeigneter Wahl (Diagonalisierung) gibt es daher $N + 1$ linear unabhängige $\vartheta_i(z) \in H^0(X, O(2\Theta))$, so dass gilt

$$\boxed{\theta(z - \zeta)\theta(z + \zeta) = \sum_{i=0}^N \vartheta_i(\zeta)\vartheta_i(z) = \vec{\vartheta}(\zeta) \cdot \vec{\vartheta}(z)} .$$

Hierbei bezeichne $\vec{\vartheta}(z)$ die vektorwertige Funktion mit den Komponenten $\vartheta_i(z)$. (Die genaue Rechnung zeigt $N + 1 = 2^g$, was wir aber nicht brauchen. Ausserdem $\dim(H^0(X, O(2\Theta))) = 2^g$ mittels Riemann-Roch oder Fourierreihen).

Die Kummerabbildung

Wie bisher sei (X, Θ) unzerlegbare ppav. Mit Hilfe der \mathbb{C}^{N+1} -wertigen Funktion $\vec{\vartheta}(z)$ auf \mathbb{C}^g definiert man die Kummerabbildung

$$K : X \rightarrow P^N(\mathbb{C}) .$$

Es ist wohlbekannt, dass diese Abbildung glatt ist ausserhalb der 2-Torsionspunkte in $X[2]$ und dass auf dem Niveau der \mathbb{C} -wertigen Punkte gilt

$$K(X)(\mathbb{C}) \cong X(\mathbb{C}) / \pm .$$

Beweis: $\vec{\vartheta}(\zeta_1) = \lambda \cdot \vec{\vartheta}(\zeta_2)$ liefert $\zeta_1 = \pm\zeta_2$ mittels der Riemannschen Thetarelation. Benutze auf der linken Seite, dass Θ irreduzibel und prinzipal ist.

Das Artinschema Y : Die 2-Torsionspunkte in X sind ausgezeichnet bezüglich der Kummerabbildung. Fixiere einen, etwa $P_0 = 0$, im folgenden. Sei

$$Y = \text{Spec}(\mathbb{C}[\varepsilon]/\varepsilon^3) \hookrightarrow X$$

(abgeschlossene Immersion) Artinsch mit Träger in P_0 , d.h. in lokalen formalen Koordinaten x_i bei P_0

$$\mathbb{C}[[x_1, \dots, x_g]] \twoheadrightarrow \mathbb{C} + \varepsilon \cdot \mathbb{C} + \varepsilon^2 \cdot \mathbb{C} = \mathbb{C}[\varepsilon]/\varepsilon^3 ,$$

sagen wir via $x_i \mapsto \varepsilon \cdot D_{1i} + \varepsilon^2 \cdot D_{2i}$ für $i = 1, \dots, g$. das heisst

$$\boxed{Y = Y(D_1, D_2) \quad , \quad D_1 \neq 0} .$$

Die Immersionseigenschaft bedeutet $D_1 = (D_{11}, \dots, D_{2g}) \neq 0$ für den zugehörigen Tangentialvektor $D_1 \in Lie(X)$. Insbesondere ist dann durch Translation in X ein Jetfeld definiert mit dem Jet $u + Y$ im Punkt $u \in X(\mathbb{C})$.

Definition: $K_*(u + Y)$ definiert ein Jetfeld entlang $K(X) \setminus \{K(X[2])\}$. Die sekanten Punkte $u \notin X[2]$ sind die Punkte, wo der Jet linear im $P^N(\mathbb{C})$ ist.

Genauer: Das Translat $u + Y$ heisst sekant, falls gilt

$$\boxed{K^*(i_* O_L) \rightarrow O_{u+Y}}$$

für eine Gerade $L \subseteq P^N(\mathbb{C}) = |2\Theta|$.

Kurzschreibweise:

Umformulierung: Für nichtsinguläres u ist das Jetfeld im Punkt $K(u)$ durch die Taylorentwicklung von $\vec{\vartheta}(u + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2)$ gegeben, also durch

$$\begin{aligned} & \vec{\vartheta}(u) + (\varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2) \cdot \text{grad}(\vec{\vartheta})(u) + \frac{1}{2} \text{Hess}(\vec{\vartheta})(u)[D_1 \varepsilon + D_2 \varepsilon^2] \\ &= \vec{\vartheta}(u) + \varepsilon D'_1 \cdot \text{grad}(\vec{\vartheta})(u) + \varepsilon^2 \left(D'_2 \cdot \text{grad}(\vec{\vartheta})(u) + \frac{1}{2} \text{Hess}(\vec{\vartheta})(u)[D_1] \right) . \end{aligned}$$

Dieser Jet ist genau dann linear im Punkt $K(u)$, wenn es eine lineare Relation mit $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) \neq 0$ existiert

$$\lambda_0 \cdot \vec{\vartheta}(u) + \lambda_1 \cdot D_1 \vec{\vartheta}(u) + \lambda_2 \cdot \left(\frac{1}{2} D_1^2 + D_2 \right) \vec{\vartheta}(u) = 0 .$$

Wegen der Riemannschen Thetarelation ist dies äquivalent zu

$$[\lambda_0 + \lambda_1 D_1 + \lambda_2 \left(\frac{1}{2} D_1^2 + D_2 \right)] \cdot \theta(z + \zeta) \theta(z - \zeta) \Big|_{\zeta=u} = 0 .$$

Ausgeschrieben - nach der Substitution $z \mapsto z + u$ und $D = \lambda_1 D_1 + \lambda_2 D_2$

$$\lambda_0 \theta(z) \theta_{2u}(z) + D \theta(z) \theta_{2u}(z) - \theta(z) D \theta_{2u}(z)$$

$$+\frac{\lambda_2}{2}[D_1^2\theta(z)\theta_{2u}(z) + D_1\theta(z)D_1\theta_{2u}(z) + \theta(z)D_1^2\theta_{2u}(z)] = 0 .$$

Behauptung: $\lambda_2 \neq 0$ (für $u \notin X[2]$).

Beweis: Andernfalls wäre $D\theta \cdot \theta_{2u} = 0$ auf Θ . Daraus folgt entweder $D = 0$ oder $2u = 0$ (letzteres widerspricht der Annahme $u \notin X[2]$). Aus $D = 0$ und $\lambda_2 = 0$ folgt das Verschwinden von λ_0 , und damit aller $\lambda_i = 0$. Ein Widerspruch. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Einschränken der Relation auf $\Theta \cap \Theta_{2u}$ zeigt, dass $D_1\theta(z)D_1\theta_{2u}(z) \in (\theta, \theta_{2u})$ auf $\Theta \cap \Theta_{2u}$ im schematischen Sinn verschwindet. Es folgt

Lemma: Ist $u \notin X[2]$ sekant bezüglich $Y = Y(D_1, D_2)$ mit $D_1 \neq 0$, dann gilt schematisch

$$\boxed{\Theta \cap \Theta_{2u} \subseteq D_1\Theta \cup D_1\Theta_{2u}} .$$

Bemerkung: Umgekehrt folgt aus $\Theta \cap \Theta_{2u} \subseteq D_1\Theta \cup D_1\Theta_{2u}$ (für $D_1 \neq 0$) die Existenz eines $D_2 \in \text{Lie}(X)$ so dass $u + Y(D_1, D_2)$ sekant ist, wie man leicht zeigt.

Satz von Welters: Hat die algebraische Varietät

$$\mathcal{C} = \{2u \in X \mid \exists L \subseteq P^N \text{ mit } u + Y \subseteq K^{-1}(L)\}$$

positive Dimension, dann ist jede irreduzible Kurve $C \subseteq \mathcal{C}$ eine glatte Kurve durch den Nullpunkt P_0 (!), und es gilt $(X, \Theta) \cong (\text{Jac}(C), W_{g-1})$.

Der **Beweis des Satzes** erfolgt mit dem Kriterium von Matsusaka-Ran.

Beweisskizze: Wähle Kurve C in der Varietät \mathcal{C} und zeige für den Endomorphismus

$$\alpha(C, \Theta) = id_X .$$

Dazu zeigt man in einem ersten kohomologischen Schritt $\alpha(C, \Theta) = \kappa \cdot id_X$ für ein positives $\kappa > 0$. In einem zweiten geometrischen Schritt wird $\kappa = 1$ berechnet. Dazu genügt es $D_1\alpha(C, \Theta) = D_1$ zu zeigen. Als Beiprodukt des Beweises ergibt sich $2P_0 = 0 \in C$, denn anderenfalls würde gelten $\kappa = 0$. Aus Matsusaka-Ran folgt daher, dass (X, Θ) die Jacobische von C ist und C glatt ist. Insbesondere hat die algebraische Varietät \mathcal{C} in der Formulierung des Welterschen infinitesimalen

Kriteriums die Dimension 1, und bis auf endliche viele Punkte ist sie Vereinigung von zu C isomorphen Kurven³. Wie schliesst man die endlich vielen Punkte aus? Mit Shiota nur, wenn diese ‘dick’ genug sind (für eine natürliche Schemastruktur von C sollte man C in $K(X)_{reg}$ definieren).

Aus Shiota folgt

Theorem: HP-Hierarchie $\implies \dim(C) \geq 1$.

Pointe: Dann Shiota: Formale Lösung folgt aus infinitesimaler Lösung der Ordnung 3. Infinitesimale formale Lösung in allen Ordnungen impliziert, dass die algebraische Varietät positive Dimension hat.

Wir kommen nun zum eigentlichen Satz von Welters.

³Man kann zeigen, dass für glatte Kurven durch Null in C der Tangentialvektor in Null proportional zu D_1 sein muss. Damit kann dieses Resultat noch verbessert werden.

Der kohomologische Schritt (nach Welters)

Beachte: $\Theta_x = \Theta$ gilt genau dann, wenn $x = 0$ ist (Hauptpolarisierung). Also

$$\Theta \cap \Theta_x \subsetneq \Theta \subsetneq X$$

für $x \neq 0$ mit Chernklasse $cl(\Theta)^2$ in X .

Fix- und Kofixkomponenten: Variiert x in einer Kurve C (oder auch allgemeiner), erhält man eine Zerlegung des Divisors in Komponenten

$$\Theta \cap \Theta_x = F \oplus F'(x) \quad , \quad x \neq 0$$

mit festem Divisor F und einem beweglichen⁴ Anteil $F'(x)$ (F heisse Fixdivisor). Analog definiert $\Theta_{-x} \cap \Theta \subseteq \Theta$ einen Divisor (den Kodivisor). Wieder hat man $\Theta_{-x} \cap \Theta = F' \oplus F(x)$ für $x \neq 0$ mit einem festen Anteil (Kofixdivisor) und einem variablen Anteil $F(x)$. Im allgemeinen hat man daher eine Zerlegung in Komponenten

$$\Theta \cap \Theta_x = F \oplus (F' + x) \oplus D(x)$$

mit einem Divisor $D(x)$, so dass weder $D(x)$ noch $D(x) - x$ feste Komponenten enthält unter Benutzung folgender Konvention: Wenn F unter C translationsinvarianten Komponenten enthält - jede solche Komponente ist invariant unter Translationen aus der von C erzeugten abelschen Untervarietät von X - definieren wir F hierbei einfach so, dass wir die entsprechenden Komponenten weglassen und nur in $F' + x$ zählen.

Beispiel: In der Situation des Satzes von Welters $\Theta \cap \Theta_x \subseteq D_1\Theta \cup D_1\Theta_x$ gilt $F \supseteq (\Theta \cap \Theta_x) \cap D_1\Theta$ und $F' \supseteq (\Theta \cap \Theta_{-x}) \cap D_1\Theta$. Somit gilt dann $D(x) = \emptyset$ und (mit obiger Konvention)

$$\Theta \cap \Theta_x = F \oplus (F' + x) .$$

Annahme: Wir nehmen nun an, C sei eine Kurve in X so dass für $0 \neq x \in C$ der Divisor $\Theta \cap \Theta_x = F \oplus (F' + x)$ in den Fixdivisor und das Translat des Kofixdivisors zerfällt⁵. Dann gilt

$$\alpha(C, \Theta) \text{ ein positives Vielfaches der Identität } id_X.$$

⁴Man kann leicht zeigen, dass der bewegliche Teil immer nichtleer ist.

⁵Geht C durch Null folgt $F, F' \subseteq D\Theta$ (mengentheoretisch) für $0 \neq D \in T(C)_0$

Bemerkung: Da $\alpha(C, \Theta)$ nur von der Chernklasse $cl(C)$ von C abhängt (siehe Appendix), genügt es für den Beweis zu zeigen

$$\boxed{cl(C) = \kappa \cdot \frac{cl(\Theta)^{g-1}}{(g-1)!} \quad , \quad \kappa > 0} .$$

Beweis: Die $\Theta \cap \Theta_x$ überdecken⁶ Θ . Ditto für $\Theta_{-x} \cap \Theta \subseteq \Theta$. Also hat man (obdA sei F nicht leer) eine Surjektion

$$\begin{array}{ccc} -C \times F & \longrightarrow & X \times X \\ \downarrow & & \downarrow + \\ (-C) + F = \Theta & \longrightarrow & X \end{array}$$

und folgende induzierte Abbildung ist ein Isomorphismus

$$H^{2g-2}(\Theta, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} H^{2g-2}(C \times F, \mathbb{Q}) \cong H^2(C, \mathbb{Q}) \otimes H^{2g-4}(F, \mathbb{Q}) .$$

Hopfalgebra: Die Addition $X \times X \rightarrow X$ induziert auf der Kohomologie eine Abbildung $H^*(X) \rightarrow H^*(X) \otimes H^*(X)$ und via Poincare Dualität das $*$ -Produkt

$$H^a(X, \mathbb{Q}) \times H^b(X, \mathbb{Q}) \rightarrow H^{a+b-2g}(X, \mathbb{Q})$$

Es folgt für $cl(C) \in H^{2g-2}(X, \mathbb{Q})$ und $cl(M) \in H^4(X, \mathbb{Q})$

$$cl(C) * cl(F) = \kappa_1 \cdot cl(\Theta) \quad , \quad cl(-C) * cl(F') = \kappa_2 \cdot cl(\Theta) .$$

Hierbei ist $\kappa_i > 0$ genau dann, wenn F resp. F' nicht leer ist. Somit erhält man wegen $cl(F) + cl(F') = cl(F + x) + cl(F') = cl(\Theta)^2$ und wegen $cl(C) = cl(-C)$

$$cl(C) * cl(\Theta^2) = \kappa_3 \cdot cl(\Theta) \quad , \quad \kappa_3 > 0$$

für $\kappa_3 = \kappa_1 + \kappa_2 > 0$. Die Gleichung $x * cl(\Theta^2) \in \mathbb{Q} \cdot cl(\Theta)$ für $x \in H^{2g-2}(X, \mathbb{Q})$ hat aber nur den eindimensionalen Lösungsraum

$$\mathbb{Q} \cdot cl(\Theta^{g-1})$$

Beweisskizze: $*cl(\Theta^2)$ induziert einen Isomorphismus $H^{2g-2}(X, \mathbb{Q}) \cong H^2(X, \mathbb{Q})$ (dualer Hard Lefschetz). Der Beweis ist eine Übungsaufgabe in elementarer linearer Algebra.

⁶Andernfalls wäre $F(x)$ konstant und $\Theta_x \cap \Theta$ konstant. Dies ist nicht möglich. Man führt dies zurück auf die Tatsache, dass $Pic^0(X) \rightarrow Pic^0(\Theta)$ ein Isomorphismus ist für $g \geq 3$. Benutze $0 = H^0(X, \mathcal{L}) \rightarrow H^0(\Theta, \mathcal{L}_\Theta) \rightarrow H^1(X, \mathcal{L}\omega^{-1}) = 0$ (Kodaira vanishing) für $\mathcal{L} \in Pic^0(X)$.

Der geometrische Schritt (nach Marini)

Die Aussage

$$\boxed{0 \neq x \in C} \implies \boxed{\Theta \cap \Theta_x \subseteq D_1\Theta \cup D_1\Theta_x}$$

ist unter Translation von Θ invariant. Auch der Endomorphismus

$$\boxed{\alpha(C, \Theta) = \kappa \cdot id_X, \quad \kappa > 0}$$

ändert sich durch diesen Wechsel nicht.

Ausschluss des entarteten Falls: Betrachte $D_1 \in Lie(X)$ und C . Sei

$$D_1C \subseteq C$$

die Menge der Punkte in C , die tangential zu dem Fluss D_1 sind. Dies sind endlich viele Punkte, da andernfalls C eine elliptische Untergruppe von X wäre, und damit $Bild(\alpha(C, \Theta)) \subseteq C$ wäre (Marini Lemma 0.26 part 2)) im Widerspruch zum Ergebnis $\kappa > 0$ des kohomologischen Schritts!

Vorbereitungen: Wir wollen nun den Thetadivisor um ein $x \in \Theta_{reg} = -\Theta_{reg}$ verschieben, so dass für den verschobenen Thetadivisor Θ_x) folgende zusätzlichen Bedingungen (kurz ZsBd) erfüllt sind:

- ❶ $C \not\subseteq \Theta_x$ und die folgenden vier tangentiellen Bedingungen
- ❷ $C \cap \Theta_{sing,x} = \emptyset \iff x \notin C - \Theta_{sing}$
- ❸ $2P_0 = 0 \in \Theta_{reg,x} \iff x \in \Theta_{reg}$
- ❹ D_1 transversal zu $T_0(\Theta_x) \iff x \notin D_1\Theta$
- ❺ $D_1C \cap D_1\Theta_x = \emptyset \iff x \notin D_1C - D_1\Theta_x$

Die Ausnahmemenge zu den Bedingungen 2-5 hat Dimension $\leq g - 2$ und ist daher unproblematisch (im Fall 2 folgt dies aus dem Satz von Ein-Lazardsfeld).

Zur ersten Bedingung: Wir benutzen, dass die Differenzabbildung

$$\Delta : C \times \Theta \rightarrow X$$

surjektiv ist. [Beachte, dass für $x \in X$ der Durchschnitt $\Theta_x \cap C$ nicht leer ist, da Θ ample ist. Also $x \in C - \Theta$].

Angenommen $C \subseteq \Theta_x$ für alle $x \in \Theta_{reg}$, dann enthält

$$A = \{x \in X \mid C \subseteq \Theta_x\}$$

alle Punkte von Θ_{reg} , und hat damit die Dimension $\geq g - 1$. Dann erfüllt die Differenzabbildung

$$\Delta : C \times \Theta \rightarrow X$$

aus Dimensionsgründen die Eigenschaft

$$\Delta^{-1}(A) = C \times \Theta,$$

denn die Fasern über A haben Dimension ≥ 1 . Wegen $\dim(A) \geq g - 1$ folgt

$$\dim(A) = g - 1$$

und

$$C - \Theta = A.$$

Ein Widerspruch. Dies zeigt ZsBd 1.

Wir nennen nun den verschobenen Thetadivisor wieder Θ der Einfachheit halber.

Endlichkeit: Der Schnitt $\Theta \cap C$ ist endlich nach ZsBd 1.

Aus den zusätzlichen Bedingungen ZsBd 4,5 folgt

Behauptung: *Schneiden sich C und Θ im Punkt $2P_0 = 0$, dann schneiden sie sich transversal im Punkt $2P_0$, und dieser Punkt ist glatt in C und Θ .*

Es ist a priori nicht klar, ob dieser Fall überhaupt vorkommt. Wir werden aber in Kürze zeigen, dass $P_0 = 0$ in C liegen muss! Angenommen 0 liegt in C . Dann ist $0 \in \Theta \cap C$ und die Taylorentwicklung in Freitag's Vortrag zeigt

$$0 \neq \mathbb{C} \cdot D_1 = T(C)_0.$$

Nach ZsBd 4 gilt

$$D_1 \notin T(\Theta)_0.$$

Ausserdem ist Θ glatt im Punkt Null (ZsBd 3) wegen $0 \in \Theta_{reg}$.

Behauptung: Sei $0 \neq x \in C \cap \Theta$ ein anderer Schnittpunkt. Dann gilt

$$D_1 \in T(\Theta)_x$$

und x ist ein glatter Punkt von C und Θ .

Beweis: Wegen $0 \in \Theta$ (ZsBd 3) und $x \in \Theta$ folgt dann

$$x \in \Theta \cap \Theta_x,$$

also wegen $C \ni x \neq 0$

$$x \in \Theta \cap \Theta_x \subseteq D_1\Theta \cup D_1\Theta_x.$$

Wegen $0 \neq x \in \Theta \cap \Theta_x$ und $x \in \Theta \cap C$ gibt es dann nur folgende Alternative

1.Fall: $x \in D_1\Theta \iff (x, D_1) \in T(\Theta)_x$.

Nach ZsBd 2 ist x in Θ ein glatter Punkt! Nach ZsBd 5 schneiden sich C und Θ in x , so dass x ein glatter Punkt⁷ von C und X ist. Beachte D_1 liegt also jetzt im Tangentialraum von Θ und nicht im Tangentialraum von C , gerade anders herum als im Nullpunkt.

[2.Fall: $x \in D_1\Theta_x \iff 0 \in D_1\Theta \iff D_1 \in T(\Theta)_0$.

Ein Widerspruch zu ZsBd 4! Also kommt der 2.Fall überhaupt nicht vor.]

⁷Marini behauptet, dass aus ZsBd 5 automatisch die Transversalität des Schnitts folgt. Dies sehe ich nicht. Es scheint mir aber auch nicht nötig zu sein dies anzunehmen. Siehe dazu die Rechnungen zum Verschwinden der lokalen Beiträge von $\alpha(C, \Theta)$ im Appendix.

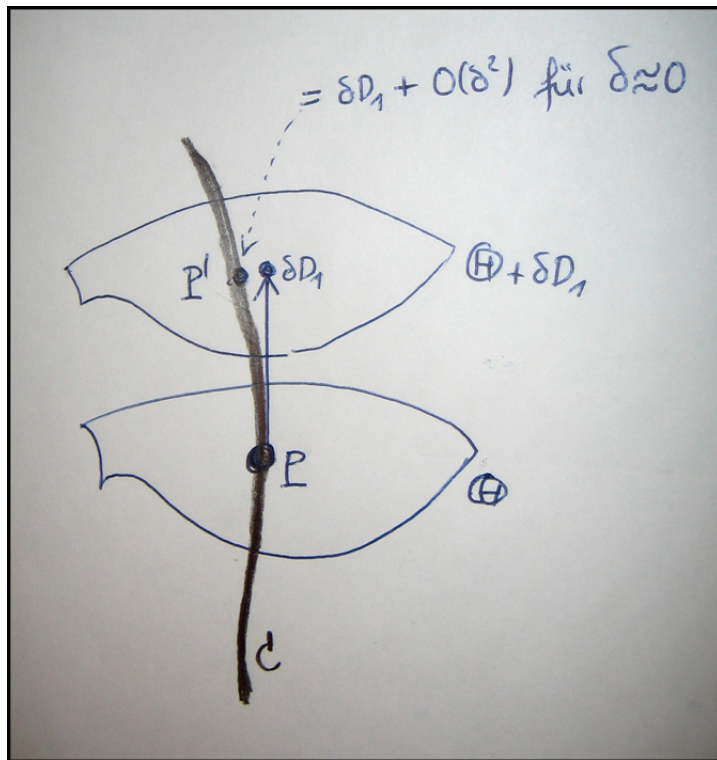


Abbildung 1: Der Nullpunkt

Die Formel für $D_1\alpha(C, \Theta)$

Für $D_1 \in Lie(X)$ gilt jetzt

$$D_1\alpha(C, \Theta) = \sum_{x \in C \cap \Theta} \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{Tr_x(C \cdot (\Theta_{\delta D_1} - \Theta))}{\delta}$$

Für alle Punkte $x \in C \cap \Theta$ für die $D_1 \in T(\Theta)_x$ liegt ist der Summand Null. Es folgt entweder

$$0 \notin C \cap \Theta \implies D_1\alpha(C, \Theta) = 0$$

(im Widerspruch zu $\alpha = \kappa \cdot id_X, \kappa \neq 0$), oder somit erzwungen

$$2P_0 = 0 \in C \cap \Theta$$

mit

$$D_1\alpha(C, \Theta) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{Tr_0(C \cdot (\Theta_{\delta D_1} - \Theta))}{\delta}.$$

Wegen der Transversalität des Schnitts $C \cap \Theta$ bei $2P_0 = 0$ und

$$D_1 \in T(C)_0$$

ist

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{Tr_0(C \cdot (\Theta_{\delta D_1} - \Theta))}{\delta} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\delta D_1 - 0}{\delta} = D_1 = D_1 id_X.$$

Wegen $D_1\alpha = Jac(\alpha)(D_1)$ folgt $2P_0 = 0 \in C \cap \Theta$ und

$$\boxed{\alpha(C, \Theta) = id_X},$$

denn $\alpha(C, \Theta) = \kappa \cdot id_X$ mit $\kappa > 0$. Also $D_1\alpha(C, \Theta) = \kappa \cdot D_1 id_X = \kappa D_1$. Da wir andererseits gezeigt haben $D_1\alpha(C, \Theta) = 1, 0$ (je nachdem ob $2P_0 \in C \cap \Theta$ oder nicht, folgt $\kappa = 1$ und $2P_0 \in C \cap \Theta$ wegen des kohomologischen Kriteriums ($\kappa > 0$)).

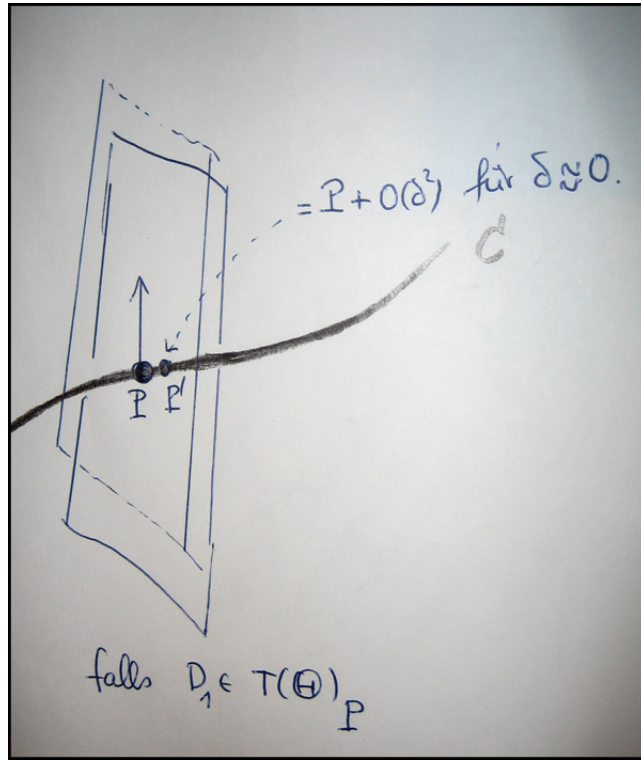


Abbildung 2: Die anderen Punkte

Appendix zu den verschwindenden lokalen Termen⁸

Man kann $\alpha(C, \Theta)$ für

$$i : C \longrightarrow X$$

auch so definieren, dass man das Linienbündel $L = L_\Theta$ des Divisors Θ betrachtet. Dann gilt

Lemma:

$$\boxed{\alpha(C, \Theta)(x) = i_*(i^*(L_x \otimes L^{-1}))}.$$

Hierbei sind $i^* : Pic^0(X) \rightarrow Pic^0(C)$ und $i_* : Alb(C) \rightarrow Alb(X)$ die kanonischen funktoriellen Abbildung.

Beachte $Pic^0(Y) = H^1(Y, \mathcal{O})/H^1(Y, \mathbb{Z})$ und $Alb(Y) = \Omega^1(Y)^*/H_1(Y, \mathbb{Z})$ für projektive glatte Varietäten. Für die Kurve ist C dabei gegebenenfalls durch die Normalisierung zu ersetzen und i durch die Zusammensetzung. Beachte dann $Alb(C) = Pic(C)$ und $Alb(X) = Pic^0(X)$, letzteres da X hauptpolarisiert ist. Die obige Formel folgt unmittelbar aus $\alpha(C, \Theta) = i_*\psi^{-1}i^*\psi_L$ aus dem Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 Alb(X) = X & \xrightarrow[\simeq]{\psi_L} & \hat{X} = Pic^0(X) \\
 \uparrow i_* & \circlearrowleft \alpha(C, \Theta) & \downarrow i^* \\
 Alb(C) & \xleftarrow[\simeq]{\psi^{-1}} & Pic^0(C)
 \end{array}$$

Die Polarisierung ψ auf $Jac(C)$ wird in kanonischer Weise vom Cupprodukt auf $H^1(C, \mathbb{Z})$ induziert.

Beweis: Der Schnittdivisor $C \cap \Theta_x$ wird durch seine Klasse $i^*(L_x)$ und die Spur durch $i_*(i^*(L_x) - deg(i^*(L_x))O(P))$. Die Zahl $d = deg(i^*(L_x))$ hängt nicht von x ab, und P ist ein fixierter Punkt Hilfspunkt auf C . Durch dieses Ansatz ist $\alpha(C, \Theta)$ auch ‘explizit’ erklärt in den Fällen, wobei C den Divisor

⁸Dieser Abschnitt ist tentativ und bedarf noch genauerer Prüfung

Θ tangentiell berührt, aber nicht in Θ enthalten ist. Beachte, dass die untere Abbildung die Klasse eines Linienbündels \mathcal{L} links abbildet auf die Linearform $\Omega^1 \ni \omega \mapsto \sum n_\nu \int_P^{P_\nu} \omega$, wenn \mathcal{L} zu $O(D)$, $D = \sum n_\nu \cdot [P_\nu]$ isomorph ist. Das Bild unter Albanese Abbildung i_* ist gerade die Spur $\sum_\nu n_\nu \cdot i(P_\nu) \in X(\mathbb{C})$.

Korollar: $\alpha(C, \Theta) = id_X \implies (X, \Theta) \cong (Jac(C), W_{g-1})$.

Beweis: Ist $\alpha = \alpha(C, \Theta) = id_X$, dann ist obiges Diagramm kommutativ! Insbesondere splittet $Jac(C) = i^*(\hat{X}) \oplus Kern(i_*)$. $i^*(\hat{X})$ und $Kern(i_*)$ sind orthogonal bezüglich ψ wegen der Definition der Abbildungen i_* und i^* in Termen von Poincare Dualität (siehe Milne, Etale cohomology S. 283, Remark 11.6). Die Kommutativität des obigen Diagramms zeigt daher, dass die Splittung mit der Polarisierung verträglich ist $(Jac(C), \psi) = (X, \psi_L) \oplus (Kern(i_*), ?)$. Daraus folgt, dass der Theta Divisor W_{g-1} von $Jac(C)$ reduzibel wäre, falls $Kern(i^*) \neq 0$. Ein Widerspruch. Also ist i^* ein Isomorphismus polarisierter abelscher Varietäten.

Lokale Beiträge: Wir betrachten nun den lokalen Fall, wo C den Divisor Θ mit höherer Multiplizität in einem Punkt P berührt. Wir nehmen an $P \in \Theta^{reg}$ und $P \in C^{reg}$. Dann ist die lokale Gleichung von Θ obdA $x_g = 0$ für holomorphe Koordinaten bei P . Die Kurve ist gegeben durch $x(t) = (x_1(t), \dots, x_g(t))$ mit $x_g(t) = c_e t^e + O(t^{e+1})$ und $c_e \neq 0$ (e ist die Berührordnung). ObdA dann durch Abändern des lokalen Parameters t von C bei P

$$x(t) = (x_1(t), \dots, x_{g-1}(t), t^e) .$$

Wir verschieben nun Θ um $\delta \mathcal{D}_1$ entlang eines Tangentialvektors $D_1 \neq 0$. Wir erhalten als Gleichung für den Schnittpunkt t auf C

$$t^e = \sum_{i=i_0}^{\infty} a_i \delta^i ,$$

für ein $i_0 \geq 2$ mit $a_{i_0} \neq 0$. Also

$$t = \zeta_e \delta^{i_0/e} \varepsilon(\delta)$$

für die e Einheitswurzeln. Dies definiert einen $F = \mathbb{C}((\delta^{1/e}))$ rationalen Divisor vom Grad e welcher der Beitrag in der Nähe von P des Divisors

$$i^*(\Theta_x) \in C^d$$

(definiert mittels $C \times_X \Theta_x$) darstellt. Die Abbildung i_* faktorisiert über

$$C^d \rightarrow C^d/S_d \rightarrow \text{Alb}(C) \rightarrow \text{Alb}(X).$$

Der lokale Beitrag bei P faktorisiert daher über

$$C^e \rightarrow C^e/S_e \rightarrow \text{Alb}(C) \rightarrow \text{Alb}(X).$$

Der $F = \mathbb{C}((\delta^{1/e}))$ wertige Punkt von C^e definiert durch

$$(z_1, \dots, z_e) = (\zeta_1 \delta^{i_0/e} \varepsilon, \dots, \zeta_e \delta^{i_0/e})$$

geht bei der ersten Abbildung auf $(\sigma_1(z), \dots, \sigma_e(z)) = (0, \dots, 0, \delta^{i_0} \varepsilon^e) \in F^e$ in lokalen Koordinaten. Es folgt für den lokalen Beitrag bei P

$$\alpha_{P, \delta D_1}(C, \Theta_{\delta D_1})(x) = O(\delta^{i_0})$$

für $i_0 \geq 2$. Somit

$$D_1 \alpha_P(C, \Theta) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\text{Tr}_x(C \cdot (\Theta_{\delta D_1} - \Theta))}{\delta} = 0,$$

falls $D_1 \in T_P(\Theta)$.

Lemma: Ist $P \in C^{\text{reg}} \cap \Theta^{\text{reg}}$ und $C \not\subseteq \Theta$. Dann verschwindet für $D_1 \in T(\Theta)_P$ der lokale Beitrag von $\alpha(C, \Theta)$ bei P

$$\boxed{D_1 \alpha_P(C, \Theta) = 0}.$$

Lemma: Ist $i : C \hookrightarrow X$ eine irreduzible projektive Kurve. Dann ist $\alpha(C, D)$ durch die Chernklasse $cl(C) \in H^{2g-2}(X, \mathbb{Q}(g-1))$ sowie die Chernklasse von Θ eindeutig bestimmt.

Beweis: Wir haben $\alpha = \alpha(C, \Theta)$ also Komposition von Homomorphismen zwischen abelschen Varietäten geschrieben. Homomorphismen sind durch ihre Kenntnis auf den Torsionspunkten eindeutig bestimmt. Insbesondere $\alpha \in \text{End}(X)$ ist durch seine Wirkung α_{tor} auf X_{tor} festgelegt. Beachte die kanonischen Isomorphismen $X_{\text{tor}} = H_1(X, \mathbb{Q})/H_1(X, \mathbb{Z})$ und $\hat{X}_{\text{tor}} = H^1(X, \mathbb{Q})/H^1(X, \mathbb{Z})$. Die waagrechte Abbildung wird von der unimodularen Polarisierungspaarung des Divisors Θ induziert, welche man auch als einen Isomorphismus $\Lambda_\Theta : H_1(X, \mathbb{Z}) \cong$

$H^1(X, \mathbb{Z})$ auffassen kann wegen $H^1(X, \mathbb{Z}) = \text{Hom}(H_1(X, \mathbb{Z}), \mathbb{Z})$. Man erhält also folgendes kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H_1(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = X_{tor} & \xrightarrow[\sim]{\Lambda_\Theta} & \hat{X}_{tor} = H^1(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \\ \uparrow H_1(i) & & \downarrow H^1(i) \\ H_1(C, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = \text{Alb}(C)_{tor} & \xleftarrow[\sim]{} & \text{Pic}^0(C)_{tor} = H^1(C, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \end{array} .$$

Der untere Isomorphismus wird durch Poincare Dualität gegeben. Im Falle der Kurve sind wir in der mittleren Dimension und haben eine unimodulare cup-Produkt Paarung $H^1(C, \mathbb{Z}) \times H^1(C, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$, welche einen kanonische Isomorphismen $H_1(C, \mathbb{Z}) = \text{Hom}(H^1(C, \mathbb{Z}), \mathbb{Z}) = H^1(C, \mathbb{Z})$ definiert. Man erhält daher durch Übergang zum l -adischen Tatemodul $T_l(X)$ folgende Push-Pull Formel für die Wirkung von α auf $T_l(X) = H_{et}^{2g-1}(X, \mathbb{Q}_l)$. Wir sind über \mathbb{C} und ignorieren daher Tate-Twists! Dann ist α die Zusammensetzung der Polarisierung und des Cup-Produkt mit der Chernklasse $cl(C) \in H_{et}^{2g-2}(X, \mathbb{Q}_l)$

$$T_l(X) \stackrel{P.D.}{=} H_{et}^{2g-1}(X, \mathbb{Q}_l) \xrightarrow[\sim]{\Lambda_\Theta} H_{et}^1(X, \mathbb{Q}_l) \xrightarrow{-\cup cl(C)} H_{et}^{2g-1}(X, \mathbb{Q}_l) .$$

Siehe Milne, Etale cohomology, prop.6.5(a) S.250 im Fall, wo C glatt in X ist. Den allgemeinen Fall erhält man, indem man C eingebettet desingularisiert in X (es genügen einfache Aufblasungen, welche C durch die Normalisierung $\tilde{C} \hookrightarrow \tilde{X}$ ersetzen mit $H_{et}^*(X, \mathbb{Q}_l) \hookrightarrow H_{et}^*(X, \mathbb{Q}_l)$). So wird die Aussage im allgemeinen Fall gezeigt.

Bemerkung: Die Wirkung auf der Kohomologie sollte sich daher als Zusammensetzung des Cupprodukt mit der Chernklasse von C mit dem dualen Lefschetz Operator von Θ

$$H^1(X, \mathbb{R}) \xrightarrow{\cup cl(C)} H^{2g-1}(X, \mathbb{R}) \xrightarrow{c(g) \cdot \Lambda_\Theta} H^1(X, \mathbb{R})$$

für eine universelle Konstante $c(g) > 0$. Sicherlich lässt sich dies einfach direkt ohne den Umweg über die etale Kohomologie zeigen mit Hilfe von Strömen mit Träger in C etc. zur Beschreibung der Abbildung $H^1(i_*)$.

Die KP-Hierarchie

Der Satz von Shiota

Wir betrachten eine beliebige nichtzerlegbare ppav (X, Θ) , deren Thetafunktion $\theta(z)$ die folgende KP-Gleichung erfüllt

$$\boxed{P_3(z) = 0, z \in \mathbb{C}^g}$$

Hierbei ist $P_3(z)$ der kleinste nichttriviale Spezialfall der Ausdrücke $P_m(z)$, die wie folgt definiert sind.

Zur Erinnerung: Im Fall einer Jacobischen $X = Jac(C)$ liefert die Sekantenbedingung die Taylorbedingungen entlang eines analytischen Kurvenstücks in C

$$P_m(z) := \left[\Delta_m D_1 - \Delta_{m-1} \Delta_2 + \sum_{i=3}^m d_i \Delta_{m-i} \right] \theta(z + \zeta) \theta(z - \zeta) \Big|_{\zeta=0} = 0$$

(Ableitungen nach ζ) für Parameterdarstellung $\sum D_i \cdot \varepsilon^i$ der Kurve C , wobei

$$\Delta_n = \sum_{i_1+2i_2+\dots+ni_n=n} \frac{D_1^{i_1} \dots D_n^{i_n}}{i_1! \dots i_n!}.$$

Beispiele: $\Delta_0 = 1$, $\Delta_1 = D_1$, $\Delta_2 = D_2 + \frac{1}{2}D_1^2$ und

$$\Delta_3 = \frac{1}{6}D_1^3 + D_1D_2 + D_3.$$

Es gilt dann im Fall $m = 3$

$$\boxed{\Delta_3 \Delta_1 - \Delta_2 \Delta_2 + d_0 = -\frac{1}{12}D_1^4 - D_2^2 + D_3 D_1 + d_0}.$$

Die KP-Gleichung für die Riemannsche Thetafunktion (das heisst der kleinste Fall $m = 3$; beachte $m = 2$ ist trivial) lautet daher (nach Reskalieren $D_i \mapsto 2D_i$ und $d_0 \mapsto -\frac{3}{8}d_0$ was die Gleichung einfacher macht)

$$\begin{aligned} P_3(z) &= D_1^4 \theta \cdot \theta - 4D_1^3 \theta \cdot D_1 \theta + d_0 \theta \cdot \theta + 3D_1^2 \theta \cdot D_1^2 \theta \\ &\quad - 3D_2 \theta \cdot D_2 \theta + 3D_2^2 \theta \cdot \theta + 3D_1 \theta \cdot D_3 \theta - 3D_1 D_3 \theta \cdot \theta = 0. \end{aligned}$$

Bemerkungen:

- Per Definition ändert sich $P_m(z)$ nicht, wenn man (D_1, \dots, D_m) durch $(-D_1, \dots, -D_m)$ ersetzt.
- Beachte

$$P_m(z) \in H^0(X, O(2\Theta))$$

wegen $\theta(z + \zeta + \gamma)\theta(z - \zeta + \gamma) = f(z, \gamma)^2\theta(z + \zeta)\theta(z - \zeta)$. Dies gilt dann auch für alle Ableitungen nach ζ (in einem beliebigen Punkt $\zeta = 2u$).

Satz von Shiota: *Ist (X, θ) unzerlegbar, dann impliziert die KP-Gleichung $P_3(z) = 0$ alle höheren KP-Gleichungen $P_m(z) = 0$ für $m \geq 3$ bei geeigneter Wahl der $d_i \in \mathbb{C}, i \geq 1$ und $D_i \in \mathbb{C}^g, i \geq 4$. Insbesondere ist daher (X, Θ) eine Jacobische.*

Kohomologischer Bootstrap

Sei

$$D_1\Theta := \{\theta = 0\} \cap \{D_1\theta = 0\}$$

im schematischen Sinn (Idealgarbe erzeugt von θ und $D_1\theta$). Beachte $D_1\theta|_{\Theta} \in H^0(\Theta, O_{\Theta}(\Theta))$ definiert das Schema $D_1\Theta$ (Cohen-Macaulay).

- Der Automorphismus $z \mapsto -z$ von X operiert auf dem Schema, und erhält übrigens den Schnitt $P_m(z)$.

Einschränkungslemma:

$$S \in \text{Kern}\left(H^0(X, O(2\Theta)) \rightarrow H^0(D_1\Theta, O_{D_1\Theta}(2\Theta))\right)$$

impliziert die Existenz von $E \in \mathbb{C}^g = \text{Lie}(X)$ und $d \in \mathbb{C}$, so dass

$$S + 2(ED_1\theta \cdot \theta - E\theta \cdot D_1\theta) + d\theta^2 = 0 \quad \in \quad H^0(X, O(2\Theta)).$$

Beweis: $0 \rightarrow O_{\Theta}(\Theta) \rightarrow O_{\Theta}(2\Theta) \rightarrow O_{D_1\Theta}(2\Theta) \rightarrow 0$ mit der ersten Abbildung $1 \mapsto D_1\theta|_{\Theta}$, und $0 \rightarrow O_X(\Theta) \rightarrow O_X(2\Theta) \rightarrow O_{\Theta}(2\Theta) \rightarrow 0$ liefern $\text{Kern}(\text{res}_{\Theta}) = \mathbb{C} \cdot \theta$ und $\text{Kern}(\text{res}_{D_1\Theta}) = D_1\theta \cdot H^1(\Theta, \omega) = D_1\theta \cdot \{E\theta\}_{E \in \text{Lie}(X)}$. \square

Das Einschränkungsgargument: Beachte $P = \Delta_m D_1 - \Delta_{m-1} \Delta_2 + \sum_{i=3}^m d_i \Delta_{m-i} = D_m D_1 + d_m + S(D_{m-1}, \dots, D_1, d_{m-1}, \dots, d_3)$. Also gilt

$$P_m(z) = S + 2(D_m D_1 \theta \cdot \theta - D_m \theta \cdot D_1 \theta) + d_m \theta^2$$

für ein $S = S(D_{m-1}, \dots, D_1, d_{m-1}, \dots, d_3) \theta(z+\zeta) \theta(z-\zeta)|_{\zeta=0} \in H^0(X, O(2\Theta))$, welches nur die Operatoren D_1, \dots, D_{m-1} und die konstanten d_3, \dots, d_{m-1} involviert. Aus dem Einschränkungsglemma folgt die Äquivalenz folgender Aussagen

- $P_m(z) = 0$ auf X (für geeignetes D_m und d_m)
- $P_m(z) = 0$ auf $D_1 \Theta$
- $S(D_{m-1}, \dots, D_1 d_{m-1}, \dots, d_3)(z) = 0$ auf $D_1 \Theta$

Für den Beweis des Satzes von Shiota genügt es daher, wenn $P_3(z) = \dots = P_{m-1}(z) = 0$ impliziert, dass der Schnitt S oder äquivalent $P_m(z)$ nach Einschränkung auf $D_1 \Theta$ verschwindet! Dann kann man nämlich wegen dem Einschränkungsglemma D_m und d_m finden so dass $P_m(z)$ auf X identisch verschwindet.

Lemma(Arbarello-deConcini): $P_m(z) + \Delta_1 P_{m-1}(z) + \dots + \Delta_m P_0(z)$ ist gleich

$$\begin{aligned} & \left(\Delta_1 \Delta_m \theta \cdot \theta - \Delta_m \theta \cdot \Delta_1 \theta \right) - \frac{1}{2} \left(D_1^2 \Delta_{m-1} \theta \cdot \theta + 2D_1 \Delta_{m-1} \theta \cdot D_1 \theta - \Delta_{m-1} \theta \cdot D_1^2 \theta \right) \\ & - \left(D_2 \Delta_{m-1} \theta \cdot \theta + \Delta_{m-1} \theta \cdot D_2 \theta \right) + \sum_{i=3}^m c_i \Delta_{m-i} \theta \cdot \theta. \end{aligned}$$

Beweis: Eine Potenzreihenidentität, die für alle Funktionen gilt.

Einschränken auf den Thetadivisor Θ : Auf Θ sind alle durch θ teilbare Terme Null. Das heisst auf Θ gilt

$$(*)_m \left[\sum \Delta_\nu P_{m-\nu}(z) = -D_1 \theta \cdot \left(\Delta_m \theta + D_1 \Delta_{m-1} \theta \right) - \Delta_{m-1} \theta \cdot \left(-\frac{1}{2} D_1^2 \theta + D_2 \theta \right) \right].$$

Durch Wegstreichen aller Terme im Ideal $(\theta, D_1 \theta)$ erhält man

Korollar: Die Einschränkung⁹ von $P_m(z) + \Delta_1 P_{m-1}(z) + \dots + \Delta_m P_0(z)$ auf das Schema $D_1\Theta$ ist

$$\Delta_{m-1}\theta \cdot \left(\frac{1}{2}D_1^2 - D_2\right)\theta \Big|_{D_1\Theta}.$$

Im Fall $P_i = 0$ für alle $i < m$ ist diese Einschränkung gleich $P_m|_{D_1\Theta}$. Das heisst in diesem Fall ist das Verschwinden von $P_m(z)$ auf $D_1\Theta$ äquivalent zu

$$\Delta_{m-1}\theta \cdot \left(\frac{1}{2}D_1^2 - D_2\right)\theta \Big|_{D_1\Theta} \equiv_{D_1\Theta} 0.$$

Beweisidee: Will man daher aus $P_3(z) = 0$ die Existenz der KP-Hierarchie von Gleichungen $P_m(z) = 0$ ableiten, genügt es mittels Induktion nach m aus den Gleichungen $P_3(z) = \dots = P_{m-1}(z) = 0$ die Kongruenz

$$\Delta_{m-1}\theta \cdot \left(\frac{1}{2}D_1^2 - D_2\right)\theta \Big|_{D_1\Theta} \equiv 0$$

auf $D_1\Theta$ zu zeigen. Mit Hilfe des kohomologischen Bootstraps folgt daraus dann sofort die Existenz von D_m und d_m , so dass $P_m(z) = 0$ gilt. Der Induktionsanfang ist natürlich die KP-Gleichung $P_3(z) = 0$.

Die KP-Gleichung(Der Spezialfall $m = 3$): Aus der KP-Gleichung $P_3(z) = 0$ folgt unter Berücksichtigung von $\Delta_2 = \frac{1}{2}D_1^2 + D_2$

$$\left(\frac{1}{2}D_1^2 + D_2\right)\theta \cdot \left(\frac{1}{2}D_1^2 - D_2\right)\theta \Big|_{D_1\Theta} = 0.$$

Infinitesimale Zerlegung: Das heisst, dass $D_1\Theta$ wiederum in zwei Teile zerfällt, die Nullstellenorte¹⁰ von $\left(\frac{1}{2}D_1^2 \pm D_2\right)\theta$ auf $D_1\Theta$.

⁹Diese Bildung ist nicht translationsinvariant, und lebt a priori erst einmal auf \mathbb{C}^g und nicht auf X . Im Fall $P_3(z) = \dots = P_{m-1}(z) = 0$ - was wir im folgenden per Induktion annehmen wollen - ist dann aber $\Delta_{m-1}\theta \cdot \left(\frac{1}{2}D_1^2 - D_2\right)\theta|_{D_1\Theta} \in H^0(D_1\Theta, \omega^2)$.

¹⁰Beachte $D_1^2\theta|_{D_1\Theta} \in H^0(D_1\Theta, \omega)$ und $D_2\theta \in H^0(D_1\Theta, \omega)$.

Eine allgemeine Bemerkung

Das Schema $D_1\Theta$ ist Cohen-Macaulay und hat die dualisierende Garbe $\omega_{D_1\Theta} = \omega^2$ für $\omega = \omega_\Theta = O(\Theta)$. Man hat folgende exakte Sequenz

$$0 \rightarrow H^0(\Theta, O) \xrightarrow{m} H^0(\Theta, \omega) \rightarrow H^0(D_1\Theta, \omega) \xrightarrow{\delta} H^1(\Theta, O) \rightarrow H^1(\Theta, \omega) .$$

Der Abbildung links bildet 1 auf $D_1\theta$ ab. Der Raum

$$H^0(\Theta, \omega) \cong Lie(X)$$

wird erzeugt von den Ableitungen $E\theta$ für $E \in Lie(X)$, ist also ungerade. Beachte, dass die erste Abbildung der Sequenz $0 \rightarrow O_\Theta \xrightarrow{m} \omega \rightarrow \omega|_{D_1\Theta} \rightarrow 0$ Multiplikation mit $D_1\theta$ ist, also ungerade. Somit ist die Randabbildung δ ungerade!. Die Abbildung $x \mapsto -x$ operiert wie -1 auf diesem Raum. Andererseits liegen auch alle $ED_1\theta$ in $H^1(D_1\Theta, \omega)$. Diese Elemente sind aber gerade! Es gilt also

$$\begin{aligned} H^0(D_1\Theta, \omega)_- &= \langle E\theta, E \in Lie(X) \rangle . \\ H^0(D_1\Theta, \omega)_+ &\hookrightarrow H^1(\Theta, O) \cong Lie(X) . \end{aligned}$$

Die Elemente

$$ED_1\theta \in H^0(D_1\Theta, \omega)_+$$

für $E \in Lie(X)$ liegen in $H^0(D_1\Theta, \omega)_+$.

Man hat die nicht ausgeartete Dualitätspaarung $H^i(\Theta, O) \times H^{g-1-i}(\Theta, \omega) \rightarrow H^{g-1}(\Theta, \omega) \cong \mathbb{C}$. Man zeigt leicht $\delta : H^i(\Theta, \omega) \cong H^{i+1}(X, O)$ und $res : H^i(X, O) \cong H^i(\Theta, O)$ für alle $0 \leq i \leq g-1$ mittels Kodaira vanishing. Der Raum ist daher genau dann gerade, wenn i ungerade ist.

KP-Bootstrap: Aus der KP-Gleichung $P_3(z) = 0$ folgt in $H^0(D_1\Theta, \omega^2)$ die Identität

$$(D_1^2\theta)^2 \equiv_{D_1\Theta} (D_2\theta)^2 .$$

Gilt umgekehrt diese Identität (für ein $D_1 \neq 0$), dann folgt mittels kohomologischem Bootstrap die KP-Gleichung $P_3(z) = 0$ für geeignetes d und D_3 . Frage: Kann für eine nicht Jacobische gelten $(D_1^2\theta)^2 \in \langle D_i\theta \cdot D_j\theta \rangle$? Man kann so etwas auch liften. Gibt es eine höhere KP in diesem Fall? Ein guter Test wäre der Fall einer Gleichung $(D_1^2\theta - D_2\theta)(D_1^2\theta - D_4\theta) = 0$ in $H^0(D_1\Theta, \omega^2)$, welche man durch Polarisierung der KP-Gleichung erhält. In diesem Fall könnte es eine Hierarchie geben, wiederum durch Polarisierung. Beachte

$$0 \rightarrow H^0(\Theta, \omega) \xrightarrow{m} H^0(\Theta, \omega^2) \rightarrow H^0(D_1\Theta, \omega^2) \xrightarrow{\delta} H^1(\Theta, \omega) \cong \mathbb{C}^{g(g+1)/2} .$$

Der multiplizitätenfreie Fall

Wir wollen nun den Satz von Shiota beweisen (nach Arbarello, deConcini und Marini). In diesem Abschnitt nehmen wir an, dass der Divisor

$$D_1\Theta = a_1K_1 + \dots + a_rK_r$$

von Θ mit den irreduziblen Komponenten K_i multiplizitätenfrei ist, d.h. $a_1 = \dots = a_r = 1$. Dann ist jede Komponente ein Teiler entweder von $(\frac{1}{2}D_1^2 + D_2)\theta$ oder von $(\frac{1}{2}D_1^2 - D_2)\theta$. Dies gruppiert die Komponenten. ObdA

$$K_1, \dots, K_s$$

worauf $(\frac{1}{2}D_1^2 - D_2)\theta$ nicht verschwindet und

$$K_{s+1}, \dots, K_r .$$

Der Automorphismus $x \mapsto -x$ erhält $D_1\Theta$ und auch $P_m(z)$ ist invariant. Es entspricht der Vertauschung $(D_1, \dots, D_m) \mapsto (-D_1, \dots, -D_m)$. Insbesondere gilt aber

$$(-id_X)^*\left(\frac{1}{2}D_1^2 + D_2\right) = \left(\frac{1}{2}D_1^2 - D_2\right)$$

Also gilt $r \geq 2s$ und obdA

$$K_i = (-id_X)^*(K_{i+s}) .$$

Beachte $P_m(z)$ ändert sich nicht bei $(D_1, \dots, D_m) \mapsto (-D_1, \dots, -D_m)$ (entspricht $\zeta \mapsto -\zeta$). Man kann daher die Gleichung auf jeder Komponente lösen, obdA durch Übergang zum Negativen, denn

$$P_m(z) \equiv_{D_1\Theta} \Delta_{m-1}\theta \cdot \left(\frac{1}{2}D_1^2 - D_2\right)\theta \Big|_{D_1\Theta} \equiv_{D_1\Theta} (-id_X)^*\Delta_{m-1}\theta \cdot \left(\frac{1}{2}D_1^2 + D_2\right)\theta \Big|_{D_1\Theta} .$$

Mehrfache Komponenten von $\mathcal{D}_1 = D_1\Theta$

Θ ist normal und regulär in Kodimension 1 (Lazarsfeld). $D_1\Theta$ ist ein Cartier Divisor in Θ (Krullsituation). Seien K_i die irreduziblen Komponenten dieses Divisors. Wir fixieren eine solche irreduzible Komponente $K \subseteq \Theta$. Im generischen Punkt η von K wird K durch eine lokale Gleichung $h = 0$ gegeben (obdA in X bei η durch die Gleichungen $h = 0, \theta = 0$), d.h. h erzeugt das Primideal des diskreten Bewertungsrings

$$O_{\Theta, \eta} = O_{X, \eta}/(\theta) \quad , \quad O_K = O_{X, \eta}/I$$

für $I = (h^a, \theta)$. Beachte $O_{X, \eta}$ regulärer lokaler Ring der Dimension 2. Sei dann obdA

1. $D_1\theta = h^a + g_1\theta$ (a Multiplizität der Komponente $h = 0$ von $D_1\Theta$ in Θ)
2. $D_2\theta = \varepsilon_2 h^b + g_2\theta$ für $\varepsilon_i \in O_{X, \eta}^*$
3. $D_3\theta = \varepsilon_3 h^c + g_3\theta$

Annahme: Die Multiplizität a ist immer ≥ 1 . Der einfache Fall $a = 1$ wurde bereits erledigt. Nehmen wir daher im folgenden grundsätzlich an $a \geq 2$. Wir betrachten die Ideale $I = (h^a, \theta)$ und $J = (\theta^2, h^\alpha\theta, h^\beta)$ in $O_{X, \eta}$ für feste Zahlen α, β .

Kompatibilität: $D_2D_1\theta = ah^{a-1}D_2(h) + \varepsilon_2g_1h^b \pmod I$ und $D_1D_2\theta = \varepsilon_2bh^{b-1}D_1(h) + D_1(\varepsilon_2)h^b \pmod I$. Also

$$\boxed{ah^{a-1}D_2(h) + \varepsilon_2g_1h^b \equiv \varepsilon_2bh^{b-1}D_1(h) + D_1(\varepsilon_2)h^b \pmod I = (h^a, \theta)} .$$

Beachte $D_1(\varepsilon_2) \in (h, \theta)$, falls $h|D_1(h)$.

Kompatibilitäts-Korollar: Wegen $a \geq 1$ gibt es im Fall $b > 0$ nur die beiden Möglichkeiten

- $b \geq a$
- oder $h|D_1h$

Analog gilt im Fall $c > 0$ gibt es nur die beiden Möglichkeiten

- $c \geq a$
- oder $h \nmid D_1 h$

und

$$\boxed{ah^{a-1}D_3(h) + \varepsilon_3 g_1 h^c \equiv \varepsilon_3 c h^{c-1} D_1(h) + D_1(\varepsilon_3) h^c \pmod{(h^a, \theta)}} .$$

Lemma A: Gilt $h \nmid D_1(h)$, dann gilt $a = 1$ oder

$$a = 2, c = 0, b \geq a .$$

Beweis: ObdA $a \geq 2$.

Die Bedingung $b \geq a$: $P_3 \equiv 0 \pmod{I_{2a} = (\theta, h^{2a})}$ schliesst den Fall $b = 0$ für $a \geq 2$ aus (siehe Appendix I). Also gilt entweder $b \geq a$ nach voriger Bemerkung, wegen der Annahme $h \nmid D_1(h)$.

Die Bedingung $c = 0$: Wäre $c > 0$, dann folgt für $h \nmid D_1 h$ analog wie für b die Ungleichung $c \geq a$, also $a \leq \min(b, c)$. Somit liefert $P_3 \pmod{I}$ die Bedingung

$$a = 4 .$$

Der minimale Term von P_3 modulo I^2 mit dem Koeffizienten ist der Term $a(a-1)(a-2)h^{a-3}D_1(h)^3$ (siehe Appendix). Dies liefert im Fall $h \nmid D_1(h)$ einen Widerspruch. Also gilt $c = 0$ im Fall $h \nmid D_1(h)$. Nochmalige Inspektion der Gleichung $P_3 = 0$ modulo I liefert dann die Aussage $2a - 2 = a + c = a$ im Fall $h \nmid D_1(h)$. Das heisst also $a = 2$. Damit ist **Lemma A** bewiesen.

Das Verschwindungskriterium: Wir betrachten nun die Einschränkung von $P_m(z)$ auf Θ . Unter der Annahme $P_3(z) = \dots = P_{m-1}(z) = 0$ gilt auf Θ

$$-D_1\theta \cdot \left(\Delta_{m-1}\theta + D_1\Delta_{m-2}\theta \right) - \Delta_{m-2}\theta \cdot \left(-\frac{1}{2}D_1^2\theta + D_2\theta \right) = 0 .$$

Auf Θ gilt ausserdem im Fall $h \notin D_1(h), b \geq a = 2$:

1. $-D_1\theta = -h^a = -h^2$
2. $D_2\theta - \frac{1}{2}D_1^2\theta = \varepsilon_2 h^b - \frac{1}{2}a h^{a-1} D_1(h) = -h D_1(h) + O(h^2)$
3. $\Delta_{m-2}\theta = \alpha_{m-2} \cdot h$ (nach Induktionsvoraussetzung), somit
4. $D_1\Delta_{m-2}\theta = \alpha_{m-2} \cdot D_1(h) + O(h)$

Induktionsschluss: Wegen $h \notin D_1(h)$ folgt aus diesen Gleichungen auf Θ die Beziehung

$$-h^2 \cdot \left(\Delta_{m-1}\theta + \alpha_{m-2} D_1(h) \right) + O(h^3) = -\alpha_{m-2} h^2 D_1(h).$$

Also

$$-h^2 \Delta_{m-1}\theta = O(h^3),$$

das heisst es folgt der Induktionsschluss

$$\Delta_{m-1}\theta = \alpha_{m-1} \cdot h.$$

Insbesondere gilt $\Delta_{m-1}\theta \cdot (\frac{1}{2}D_1^2\theta - D_2\theta) = O(h^2)$. Das heisst: Aus $P_3(z) = \dots = P_{m-1}(z) = 0$ folgt

$$P_m(z)|_{D_1\Theta} = 0.$$

Aus dem Einschränkunglemma folgt $P_m(z) = 0$ auf X für geeignetes D_m, d_m .

Zusammenfassung: Damit ist jetzt Shiotas Satz bewiesen für alle einfachen Komponenten und alle mehrfachen Komponenten, für die gilt $h \notin D_1 h$.

Zur Erinnerung: (h^a, θ) ist in einem generischen Punkt von K das definierende Ideal der Komponente (mit Multiplizität).

Der Fall $h|D_1h$

Wir nehmen jetzt an $h|D_1h$ und $a \geq 2$.

Lemma B: *Gilt $a \geq 2$ und $h|D_1h$, dann gilt auch $h|D_2h$.*

Beweis: Schritt 1. Aus der D_1D_2 Kompatibilitätsbedingung folgt $ah^{a-1}D_2(h) \equiv O(h^b) \pmod{I}$. Also entweder $h|D_2(h)$ oder $a - 1 \geq b$. Daher obdA

$$a \geq b + 1 .$$

Schritt 2. Es gilt $2b = a + c$ und $\varepsilon_3 \equiv \varepsilon_2^2 \pmod{(\theta, h)}$. Beweis: Aus $P_3 \equiv 0 \pmod{I^2}$ folgt wegen $a \geq b + 1$ die Beziehung $\varepsilon_3 h^{a+c} - \varepsilon_2^2 h^{2b} \equiv 0 \pmod{h^{2a}}$. Also $2b = a + c$ und $\varepsilon_3 \equiv \varepsilon_2^2 \pmod{(\theta, h)}$.

Schritt 3. Es gilt $0 \leq c = a - 2\lambda < b = a - \lambda < a$ nach Schritt 1 und 2.

Schritt 4. Beachte $D_2(h^a, \theta) \subseteq (h^{2a-1}, h^{a-1}\theta, \theta^2) \subseteq (h^{2b}, \theta)$ wegen $a \geq b + 1$. Damit berechnet man leicht $D_2P_3 \equiv 0$ modulo (h^{2b}, θ) (siehe Appendix II) und erhält

$$(b-c)\varepsilon_2\varepsilon_3h^{b+c-1}D_1(h) + (\varepsilon_3c - \varepsilon_2^2b)h^{2b-1}D_2(h) + \varepsilon_3h^{c+b}D_1(\varepsilon_2) - \varepsilon_2D_1(\varepsilon_3)h^{b+c} \equiv 0$$

modulo (h^{2b}, θ) . Beachte $D_1(\varepsilon) \in (h, \theta)$ für Einheiten ε . Man erhält somit die Kongruenz (*)

$$\left(\frac{c}{\varepsilon_2} - \frac{b\varepsilon_2}{\varepsilon_3}\right)h^{b-c-1}D_2(h) + (b-c)\frac{D_1(h)}{h} + \frac{D_1(\varepsilon_2)}{\varepsilon_2} - \frac{D_1(\varepsilon_3)}{\varepsilon_3} \equiv 0$$

modulo (θ, h^λ) .

Schritt 5. D_2D_1 -Kompatibilität liefert

$$\frac{a}{\varepsilon_2}h^{a-b-1}D_2(h) + \left(g_1 - b\frac{D_1(h)}{h}\right) \equiv \frac{D_1(\varepsilon_2)}{\varepsilon_2}$$

modulo (h^λ, θ) .

Schritt 6. D_3D_1 -Kompatibilität liefert

$$\frac{a}{\varepsilon_3}h^{a-c-1}D_3(h) + \left(g_1 - c\frac{D_1(h)}{h}\right) \equiv \frac{D_1(\varepsilon_3)}{\varepsilon_3}$$

modulo $(h^{2\lambda}, \theta)$.

Schritt 7. Aus den letzten beiden Schritten folgt die Kongruenz (**)

$$\frac{a}{\varepsilon_2} h^{\lambda-1} D_2(h) + (c-b) \frac{D_1(h)}{h} \equiv \frac{D_1(\varepsilon_2)}{\varepsilon_2} - \frac{D_1(\varepsilon_3)}{\varepsilon_3}$$

modulo (h^λ, θ) . Beachte $h^{a-c} \in (h^\lambda, \theta)$.

Schritt 8. Kombiniert man die Kongruenzen (*) und (**) aus Schritt 4 und Schritt 7, erhält man die Kongruenz

$$D_2(h) h^{\lambda-1} \left(\frac{a}{\varepsilon_2} - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3} b + \frac{c}{\varepsilon_2} \right) \equiv 0$$

modulo (θ, h^λ) . Es folgt wegen $a - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3} b + c \equiv a - b + c = b$ modulo (θ, h) (benutze Schritt 2) somit

$$h | D_2(h).$$

Damit ist **Lemma B** bewiesen. Wir können daher $h | D_1(h)$ und $h | D_2(h)$ annehmen.

Folgerung: *Dann ist entweder $b \geq a$ und damit $\langle D_1, D_2 \rangle (h^a, \theta) \subseteq (h^a, \theta)$ (dieser verbleibende Fall ist sehr einfach). Oder es gilt $b < a$ und damit wie beim Beweis von Lemma B Schritt 2 oder 3 auch $c < b < a$. Insbesondere gilt dann wegen $a \neq b$ also $\dim \langle D_1, D_2 \rangle \geq 2$.*

Appendix I: Die KP-Terme modulo I^2

Zur Erinnerung: $I = (h^a, \theta)$ und $I_\beta = (h^\beta, \theta)$ für $\beta \leq 2a$ und $J = (\theta^2, h^\alpha\theta, h^\beta)$, wobei wir annehmen $\alpha \leq a$ und $\beta \leq a + \alpha$. Für $\alpha = a$ und $\beta = 2a$ erhält man $J = (\theta, h^a)^2 = I^2$.

Der Fall $h|D_1(h)$: Wir nehmen an $h|D_1(h)$ und $\alpha \leq a$ und $\beta \leq a + \alpha$. Dann gilt $\theta \cdot I \subseteq J$ und $h^a \cdot I \subseteq J$. Also

$$I^2 \subseteq J.$$

Aus $D_1^n \theta \in I$ folgt daher dann $D_1^4 \theta \cdot \theta, D_1^3 \theta \cdot D_1 \theta, D_1^2 \theta D_1^2 \theta, \theta^2 \in J$.

Der allgemeine Fall: Macht man keine Annahmen, so sind die ersten vier Terme der KP-Gleichung modulo $I = (h^a, \theta) = (D_1 \theta, \theta)$ kongruent zu

$$D_1^2 \theta = D_1(h^a + g_1 \theta) \equiv ah^{a-1} D_1(h) \pmod{I}.$$

Oder modulo $I_\beta = (h^\beta, \theta)$ für $\beta \leq 2a$ erhält man $\theta^2, D_1^4 \theta \cdot \theta \in I_\beta$ sowie

$$(D_1^2 \theta)^2 \equiv a^2 h^{2a-2} D_1(h)^2 + 2ag_1 D_1(h) h^{2a-1} \pmod{I_\beta}.$$

$$-4/3 D_1^3 \theta \cdot D_1 \theta \equiv -4/3 a(a-1) h^{2a-2} D_1(h)^2 - 4/3 h^{2a-1} a (D_1^2(h) + g_1 D_1(h)) \pmod{I_\beta}.$$

Für die letzten vier Beiträge der KP-Gleichung gilt ohne irgendwelche Annahmen

1. $-(D_2 \theta)^2 \equiv -\varepsilon_2 \cdot (\varepsilon_2 h^{2b} + 2g_2 h^b \theta) \pmod{J}$
2. $D_2^2 \theta \cdot \theta \equiv \varepsilon_2 \theta \cdot \left(D_2(h) b h^{b-1} + g_2 h^b + \frac{D_2(\varepsilon_2)}{\varepsilon_2} h^b \right) \pmod{J}$
3. $D_1 \theta \cdot D_3 \theta - D_1 D_3 \theta \cdot \theta \equiv \varepsilon_3 h^{a+c} + \theta \cdot (\varepsilon_3 g_1 h^c - D_1(\varepsilon_3) h^c - \varepsilon_3 c h^{c-1} D_1(h)) \pmod{J}$

KP-Gleichung modulo I_β : Modulo θ , genauer modulo $(J, \theta) = (h^\beta, \theta) = I_\beta$ gibt die KP-Gleichung die Aussage, dass für $\beta \leq 2a$ der folgende Ausdruck in I_β liegt

$$P_3 \equiv -4/3 a(a-1) h^{2a-2} (D_1 h)^2 + a^2 h^{2a-2} (D_1(h))^2 + h^{2a-1} \left(2ag_1 D_1(h) - 4a/3 (D_1^2(h) + g_1 D_1(h)) \right) - \varepsilon_2^2 h^{2b} + \varepsilon_3 h^{a+c} \equiv 0 \pmod{I_\beta}.$$

Eine mühsame Rechnung zeigt, dass $P_3(z)$ kongruent ist modulo $(h^{2a}, h^a\theta, \theta^2) = (h^a, \theta)^2$ zu $A + B \cdot \theta$ für A gleich

$$\boxed{-3\varepsilon_2^2 h^{2b} + 3\varepsilon_3 h^{a+c} + (4a - a^2) h^{2a-2} h^{2a-2} D_1(h)^2 + 2g_1 a h^{2a-1} D_1(h) - 4a h^{2a-1} D_1^2(h)}$$

und B gleich

$$\begin{aligned} a(a-1)(a-2)h^{a-3}D_1(h)^3 + 3a(a-1)h^{a-2}D_1(h)D_1^2(h) - 4a(a-1)g_1h^{a-2}D_1(h)^2 \\ + ah^{a-1}D_1^3(h) - 4g_1^2ah^{a-1}D_1(h) - 4ag_1h^{a-1}D_1^2(h) \\ + 3\varepsilon_2bh^{b-1}D_2(h) + (3 - 6\varepsilon_2)g_2h^b + 3D_2(\varepsilon_2)h^b \\ - 3\varepsilon_3ch^{c-1}D_1(h) + 3h^c(\varepsilon_3g_1 - D_1(\varepsilon_3)). \end{aligned}$$

Appendix II ($D_2P_3 = 0$)

Wir nehmen nun an $h|D_1(h)$ und somit $2b = a + c$, sowie $c < b < a$ (siehe dazu Schritt 3 und beachte $\lambda \geq 1$).

Leitet man die KP -Gleichung $P_3(z) = 0$ nach D_2 ab, erhält man die Identität $D_2P_3(z) = 0$ oder $-2D_2^2\theta \cdot D_2\theta + D_2^3\theta \cdot \theta + D_2^2\theta \cdot D_2\theta + D_1D_2\theta \cdot D_3\theta + D_1\theta \cdot D_3D_2\theta - D_1D_2D_3\theta \cdot \theta - D_1D_3\theta \cdot D_2\theta \equiv -D_2^2\theta \cdot D_2\theta + D_2^3\theta \cdot \theta + D_1D_2\theta \cdot D_3\theta + D_1\theta \cdot D_2D_3\theta - D_1D_2D_3\theta \cdot \theta - D_1D_3\theta \cdot D_2\theta \equiv -\frac{1}{3}D_2(D_1^4\theta \cdot \theta + \dots + d_0\theta^2 + 3D_1^2\theta D_1^2\theta) \subseteq D_2(I \cdot I) \subseteq (\theta, h^{a+b})$. Liest man dies modulo (θ, h^{2b}) erhält man

$$\begin{aligned} -c\varepsilon_2\varepsilon_3 \cdot h^{c+b-1}D_1(h) - \varepsilon_2D_1(\varepsilon_3)h^{b+c} \\ -\varepsilon_2^2b \cdot h^{2b-1}D_2(h) \\ +\varepsilon_2\varepsilon_3b \cdot h^{b+c-1}D_1(h) + \varepsilon_3 \cdot h^{c+b}D_1(\varepsilon_2) \\ +\varepsilon_3c \cdot h^{a+c-1}D_2(h) \equiv 0 \pmod{(\theta, h^{2b})}. \end{aligned}$$

Beiträge liefern nur der letzte Terme, der erste Term, dritte Term und vierte Term. Beachte $\varepsilon_3 \cdot h^{c+b}D_1(\varepsilon_2) \equiv 0(h^{c+b+1}, \theta)$ wegen $D_1(h) \in (h, \theta)$. Zusammengefasst gibt dies wegen $2b = a + c$

$$\boxed{(b-c)\varepsilon_2\varepsilon_3 \cdot h^{c+b-1}D_1(h) + (\varepsilon_3c - \varepsilon_2^2b) \cdot h^{2b-1}D_2(h) + O(h^{c+b+1}) \equiv 0 \pmod{(\theta, h^{2b})}.$$