Vorlesung über Liealgebren

Rainer Weissauer

WS 2012/13

Jordan Zerlegung

Ist F ein algebraisch abgeschlossener Körper, dann kann jeder Endomorphismus $X \in End_F(V)$ eines endlich dimensionalen F-Vektorraums V durch Konjugation in Jordan-Normalform gebracht werden. Eine Matrix X heisst *nilpotent*, wenn eine Potenz X^n der Matrix Null ist. Nilpotenz, Diagonalisierbarkeit und Vertauschbarkeit von Endomorphismen (Matrizen) sind Eigenschaften, die unter Konjugation invariant sind.

Die Existenz der Jordan Zerlegung zeigt man wie folgt: Das charakteristische Polynom $\chi_t(X) = det(t \cdot id - X) = \prod_\lambda p_\lambda(t)$ von X zerlegt man in teilerfremde Faktoren $p_\lambda(t) = (t-\lambda)^{r_\lambda}$. Für geeignete Polynome $a_\lambda(t), b_\lambda(t)$ gilt $a_\lambda(t)p_\lambda(t) + b_\lambda(t)\prod_{\mu\neq\lambda} p_\nu(t) = 1$ (Euklidscher Algorithmus). Für $P_\lambda(t) := b_\lambda(t)\prod_{\mu\neq\lambda} p_\nu(t)$ sind die $P_\lambda(X) \in End_F(V)$ Projektoren

$$P_\nu(X)P_\mu(X) = \delta_{\nu\mu} \cdot P_\nu(X) \quad , \quad \sum_\lambda P_\lambda(X) \ = \ id_V$$

und für die Räume V_λ gilt

$$V_\lambda = P_\lambda(X)(V) \ .$$

Dies zeigt die Existenz von Polynomen $P(t), Q(t)$ im Polynomring $F[t]$ mit verschwindendem konstanten Koeffizienten und der Eigenschaft

$$\boxed{X_s \ = \ Q(X) \quad , \quad X_n \ = \ P(X)} \ .$$

[Beweis: Ersetzen von X durch $XP_\lambda(X)$ reduziert auf den Fall $V = V_\lambda$. Ist dann obdA $V = V_\lambda$, ersetzt man X, X_s durch $X - \lambda \cdot id, X_s - \lambda \cdot id$ und kann obdA $\lambda = 0$ annehmen. Dann ist $X_s = 0$ und $X_n = X$. Um zu zeigen, dass $X = X_n$ nilpotent ist, benutzt man Eigenwerttheorie: Zerfällt das charakteristisches Polynom einer Matrix X in Linearfaktoren, kann X durch Konjugation in eine obere Dreiecksmatrix übergeführt werden und auf der Diagonalen stehen Eigenwerte. In unserem Fall $X = X_n$ sind alle Eigenwerte Null, und damit ist X konjugiert zu einer strikten oberen Dreiecksmatrix. Jede strikte obere Dreiecksmatrix ist nilpotent. Daher ist $X = X_n$ nilpotent.]

Dies zeigt die *Existenz* von Endomorphismen X_s (diagonalisierbar auf V) und X_n (nilpotent auf V) mit der Eigenschaft

$$\boxed{X \ = \ X_s \ + \ X_n \quad , \quad X_s X_n \ = \ X_n X_s} \ .$$

Eine Zerlegung $X = S + N, SN = NS$, S diagonalisierbar, N nilpotent legt bereits S und N *eindeutig* fest: $S = X_s$ und $N = X_n$. [Beweis: V zerfällt in die Eigenräume V_λ von S. Da X und N mit S vertauschen, respektieren sie die Zerlegung $V = \bigoplus_\lambda V_\lambda$. Wir können daher annehmen $V = V_\lambda$. Wegen $S = \lambda \cdot id_V$ ist dann S bereits durch den Eigenwert λ von X festgelegt, und dies legt ebenfalls $N = X - S$ eindeutig fest.]

Kommutatoren

Offensichtlich ist X genau dann auf V diagonalisierbar, wenn gilt $X = X_s$. Zwei (oder auch mehrere) Endomorphismen $X = X_s, Y = Y_s$ können simultan diagonalisiert werden, wenn sie miteinander vertauschen, d.h. wenn ihre *Kommutatoren*

$$XY - YX$$

verschwinden. Dies führt auf den Begriff der Liealgebren (siehe nächster Abschnitt). Für eine einzelne Matrix $X \in End_F(V)$ definiert $L = F \cdot X$ trivialerweise eine solche Liealgebra. Miteinander vertauschende Matrizen definieren eine abelsche Liealgebra.

Der Kommutator $XY - YX$ ist *antisymmetrisch* in den Endomorphismen X und Y und erfüllt die *Jacobi Identität*, d.h. die Summe der drei iterierten Kommutatoren

$$\begin{aligned} X(YZ - ZY) - (YZ - ZY)X \\ +Y(ZX - XZ) - (ZX - XZ)Y \\ +Z(XY - YX) - (XY - YX)Z \end{aligned}$$

ist für alle Endomorphismen X, Y, Z gleich Null, denn jeder der Terme XYZ, YZX und ZXY kommt mit jeweils unterschiedlichem Vorzeichen zweimal vor. Setzt man $[X, Y] := XY - YX$, definieren daher die Endomorphismen $End_F(V)$ eines Vektorraums V mit der durch den Kommutator definierten Lieklammer eine Liealgebra (siehe Beispiel 3 des nächsten Paragraphen).

Der Begriff der Liealgebra abstrahiert daher auf axiomatische Weise die Eigenschaften des Kommutators. Die abstrakte Lieklammer $[.,.]$ einer Liealgebra L ist a priori nicht durch einen Kommutator definiert. Es legt jedoch nahe eine F-lineare Einbettung

$$\phi : L \hookrightarrow End_F(V)$$

einer gegebenen Liealgebra $(L, [.,.])$ zu suchen, welche die Lieklammer auf L in den Kommutator auf $End_F(V)$ überführt, um L letztlich doch durch Kommutoren zu beschreiben. Dies führt dann auf recht naheliegende Weise zu dem Begriff der (treuen) Darstellungen einer Liealgebra, und es ist daher nicht alzu überraschend, dass das Studium der Liealgebren daher eng verbunden ist mit dem Studium der Darstellungen der Liealgebren.

Eine weitere Eigenschaft des Kommutators ist die *Derivationseigenschaft*

$$X(YZ) - (YZ)X = (XY - YX)Z + Y(XZ - ZX)\ .$$

Dies zeigt $D(YZ) = D(Y)Z + YD(Z)$ für die durch $D(Y) = XY - YX$ definierte F-lineare Abbildung D.

Liealgebren

Grundlegende Begriffe

Sei F ein Körper der Charakteristik $\neq 2$. Ein F-Vektorraum L zusammen mit einer F-bilinaren Abbildung

$$[.,.] : L \times L \to L$$

heisst *Liealgebra* (über F), wenn für alle $X, Y, Z \in L$ gilt

$$[X, Y] + [Y, X] \ = \ 0$$
$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] \ = \ 0\ .$$

Die erste Bedingung liefert $[X, X] = 0$. Die zweite Bedingung nennt man die *Jacobi Identität*. Man bezeichnet $[X, Y]$ als die *Lieklammer*.

Ideale. Ein *Ideal* I in einer Liealgebra L ist ein F-Untervektorraum mit der Eigenschaft $[L, I] \subseteq I$. Insbesondere ist dann I eine Lie-Unteralgebra von L. Der Quotient L/I wird eine Liealgebra mit der induzierten Lieklammer, wegen $[X + I, Y + I] \subseteq [X, Y] + [X, I] + [I, Y] + [I, I] \subseteq [X, Y] + I$. Eine Liealgebra L heisst *einfach*, wenn 0 und L die einzigen Ideale sind.

Liealgebren Homomorphismen. Eine F-lineare Abbildung $\phi : L \to L'$ zwischen Liealgebren über F heisst Liealgebren Homomorphismus, falls

$$\phi([X, Y]_L) = [\phi(X), \phi(Y)]_{L'} \quad , \quad \forall\ X, Y \in L\ .$$

Der Kern von $\phi : L \to L'$ ist dann ein Ideal in L.

Beispiel 1. Ein beliebiger F-Vektorraum L versehen mit der trivialen Lieklammer erfüllt die Axiome einer Liealgebra. Liealgebren L, deren Lieklammer trivial ist, nennt man *abelsch*.

Beispiel 2. Sei V ein F-Vektorraum und

$$\bullet : V \times V \to V$$

eine F-bilineare Abbildung. Dann definieren die F-Derivationen

$$Der_F(V, \bullet) \ = \ \{D \in End_F(V) \mid D(v \bullet w) = D(v) \bullet w + v \bullet D(w)\ ;\ v, w \in V\}$$

eine Liealgebra über F mit dem Kommutator

$$[D_1, D_2] \ := \ D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1$$

als Lieklammer. Wir überlassen es dem Leser zu zeigen, dass der Kommutator zweier F-Derivationen wieder eine F-Derivation ist. Offensichtlich ist der Kommutator alternierend. Die Jacobi Identität für den Kommutator verifiziert man durch eine kurze explizite Rechnung (Übungsaufgabe).

Beispiel 3. Im Fall der trivialen Bilinearform $\bullet = 0$ liefert dies dann $Der_F(V, 0) = End_F(V)$. Der *Kommutator* $[X, Y] = XY - YX$ macht somit $L = End_F(V)$ zu einer Liealgebra über F. Wir nennen diese Liealgebra kurz $gl(V)$

$$\boxed{gl(V) \ := \ (End_F(V), Kommutator)}\ .$$

Ist V endlich dimensional, dann definieren die Endomorphismen mit Spur Null wegen $Tr_V(XY-YX)=0$ ein Ideal

$$sl(V) \ \subseteq \ gl(V) \ .$$

Beispiel 4. Ist $V = C^\infty(M)$ für eine C^∞-Mannigfaltigkeit M und ist $F=\mathbb{R}$, dann kann $Der_F(V)$ mit dem $\mathbb{R}$-Vektorraum der C^∞-Vektorfelder auf M identifiziert werden. In lokalen Koordinaten haben diese Vektorfelder die Gestalt $X = \sum_{i=1}^{dim(M)} a_i(x)\partial_i$ (Differentialoperatoren der Ordnung 1) für C^∞-Koeffizientenfunktionen $a_i(x)$. Die so definierte Liealgebra der Vektorfelder ist unendlich dimensional, falls $dim(M)\neq 0$.

Leibnitzformel. *Ist D in $Der_F(V,\bullet)$, dann gilt für beliebige $\alpha,\beta\in F$*

$$(D-\alpha-\beta)^n(v\bullet w) \ = \ \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (D-\alpha)^i v \bullet (D-\beta)^{n-i} w \ .$$

Dies zeigt man leicht durch Induktion nach n.

Jordan-Zerlegung von Derivationen. Sei V endlich dimensional und sei F algebraisch abgeschlossen. Dann besitzt jedes $D\in End_F(V)$ eine Jordan Zerlegung

$$D \ = \ D_s + D_n \ ,$$

wobei D_s resp. D_n einen halbeinfachen resp. nilpotenten Endomorphismus von V definiert.

Behauptung. *Ist $D \in Der_F(V,\bullet) \subseteq End_F(V)$, dann sind die Jordan Komponenten D_s, D_n von D wieder in $Der_F(V,\bullet)$.*

Beweis. V zerfällt in verallgemeinerte Eigenräume V_α auf denen eine geeignete Potenz von $(D-\alpha)$ trivial operiert

$$V \ = \ \bigoplus_{\alpha\in F} V_\alpha \ .$$

Die Verhalbeinfachung D_s von D ist gegeben durch

$$D_s \ = \ \bigoplus_\alpha \alpha\cdot id_{V_\alpha} \ .$$

Aus der Leibnitzformel folgt, dass eine genügend hohe Potenz von $(D-\alpha-\beta)$ trivial auf $v_\alpha\bullet v_\beta$ ist, für $v_\alpha\in V_\alpha$ und $v_\beta\in V_\beta$. Somit gilt

$$\boxed{V_\alpha\bullet V_\beta \ \subseteq \ V_{\alpha+\beta}} \ .$$

Dies zeigt, dass D_s eine F-Derivation ist. Dazu genügt wegen Distibutivität der Fall $v=v_\alpha\in V_\alpha$ und $w=v_\beta\in V_\beta$: Wegen $v_\alpha\bullet v_\beta\in V_{\alpha+\beta}$ gilt $D_s(v_\alpha\bullet v_\beta) = (\alpha+\beta)\cdot(v_\alpha\bullet v_\beta)$ und dies ist gleich $(\alpha\cdot v_\alpha)\bullet v_\beta + v_\alpha\bullet(\beta\cdot v_\beta) = D_s(v_\alpha)\bullet v_\beta + v_\alpha\bullet D_s(v_\beta)$. Also ist $D_s\in Der_F(V,\bullet)$ und damit ist auch $D_n = D - D_s \in Der_F(V,\bullet)$.

Darstellungen

Für eine Liealgebra L (über F) nennt man ein Paar (V, ϕ) eine Darstellung, wenn $\phi : L \to End_F(V)$ eine F-lineare Abbildung ist mit der Eigenschaft

$$\boxed{\phi([X,Y]) = \phi(X) \circ \phi(Y) - \phi(Y) \circ \phi(X)}$$

für alle $X, Y \in L$. Anders formuliert:

$$\phi : L \to gl(V)$$

ist ein Liealgebren Homomorphismus. Der Kern $Kern(\phi)$ einer Darstellung ist daher ein Ideal in L. Die Darstellung heisst *treu*, falls $Kern(\phi) = 0$. Eine Darstellung (V, ϕ) von L induziert eine treue Darstellung $(V, \overline{\phi})$ der Quotienten Liealgebra $\overline{L} = L/Kern(\phi)$.

Es bezeichne $Rep_F(L)$ die Kategorie der endlich dimensionalen Darstellungen von L.

Beispiel 1. Die *adjungierte* Darstellung ad oder ad_L

$$ad : L \to End_F(L)$$

ist definiert durch $ad(X) = [X, -]$, d.h. $ad(X)(Y) = [X, Y]$. Die Jacobi Identität impliziert nämlich

$$ad([X,Y]) = ad(X) \circ ad(Y) - ad(Y) \circ ad(X)$$

oder $[[X,Y],Z] = [X,[Y,Z]] - [Y,[X,Z]]$ für $X, Y \in L$. Der Kern der adjungierten Darstellung ist das *Zentrum* $Z(L)$ der Liealgebra

$$Z(L) \ = \ \{X \in L \mid [X,Y] = 0 \ , \ \forall\, Y \in L\} \ .$$

Dieses Ideal (aufgefasst als Liealgebra) ist eine abelsche Liealgebra.

Beispiel 2. Die *trivialen* Darstellungen (V, ϕ) der Dimension $dim(V)$, wobei ϕ durch die Nullabbildung gegeben ist.

Darstellungskategorie $Rep_F(L)$. Eine Darstellung (V, ϕ) nennt man auch einen L-Modul und schreibt nur kurz $X \cdot v$ oder Xv anstelle von $\phi(X)(v)$, so dass gilt

$$\boxed{[X,Y]v = X(Yv) - Y(Xv)} \ .$$

Die (endlich dimensionalen) Darstellungen von L definieren eine Kategorie $Rep_F(L)$, deren Morphismen F-lineare Abbildungen $f : (V, \phi) \to (V', \phi')$ sind mit der Eigenschaft $f(\phi(X)(v)) = \phi'(X)(f(v))$ oder kurz

$$f(Xv) \ = \ Xf(v) \ .$$

Dann sind $Kern(f), Bild(f)$ und $Kokern(f)$ wieder L-Moduln. $Rep_F(L)$ wird auf diese Weise zu einer *abelschen Kategorie*.

Tensorprodukte. Die Kategorie $Rep_F(L)$ ist eine Tensorkategorie, d.h. für Darstellungen (V, ϕ) und (V', ϕ') ist auch $V \otimes_F V'$ eine Darstellung vermöge $X \cdot (v \otimes_F v') \ = \ \phi(X)(v) \otimes_F v' + v \otimes_F \phi'(X)(v')$ oder kurz

$X(v \otimes_F v') = Xv \otimes_F v' + v \otimes_F Xv'$. Man prüft sofort $[X,Y](v \otimes_F v') = X(Y(v \otimes_F v')) - Y(X(v \otimes_F v'))$.

Rigidität. Die Darstellungskategorie $Rep_F(L)$ ist *rigid*, d.h. jeder Modul (V, ϕ) besitzt ein Dual $(V^\vee, \phi^\vee)$. Hierbei ist $V^\vee$ der duale Vektoraum $V^\vee = Hom_F(V, F)$ mit der Operation $(\phi^\vee(X)f)(v) := -f(\phi(X)v)$ für $v \in V$ unf $f \in V^\vee$. In Kurzschreibweise $Xf = -X'f$, wobei X' die Transponierte von X ist. Beachte $-[X,Y]' = -(XY - YX)' = -Y'X' + X'Y' = [-X', -Y']$ (Darstellungseigenschaft). Für Vektorräume gilt

$$Hom_F(V, V') \cong V^\vee \otimes_F V' \ .$$

Sind (V, ϕ) und (V', ϕ') Darstellungen von L, dann ist auch $(V^\vee \otimes_F V, \phi^\vee \otimes \phi')$ eine Darstellung von L. Dies macht $Hom_F(V, V')$ zu einem L-Modul. Explizit operiert dabei $X \in L$ auf $f \in Hom_F(V, V')$ via

$$f(v) \mapsto (Xf)(v) = \phi'(X)f(v) - f(\phi(X)v) \ .$$

Man prüft sofort, daß dies eine Darstellung von L definiert.

Irreduzible Darstellungen. Eine Darstellung (V, ϕ) von L nennt man *irreduzibel*, wenn V keinen L-Untermodul ausser $V' = 0$ oder $V' = V$ enthält. Ist V irreduzibel und

$$f : V \to V$$

eine L-lineare Abbildung, dann ist $Kern(f)$ als L-Untermodul von V entweder gleich Null oder gleich V. Also ist entweder $f = 0$ oder f ist injektiv. Das selbe Argument zeigt $Bild(f) = V$ oder $f = 0$. Daher ist f im Fall $f \neq 0$ automatisch eine bijektive Abbildung. Andererseits bilden die L-linearen Abbildungen $f : V \to V$ eine F-Algebra: Summen und Kompositionen L-linearer Abbildungen sind wieder L-linear. Obiges Argument zeigt aber, daß diese Algebra ein Körper ist: Aus $f \neq 0$ folgt die Invertierbarkeit. Ist V endlich dimensional, so ist dieser Körper ein endlich dimensionaler Erweiterungskörper von F. Es folgt

Schur's Lemma. *Ist F algebraisch abgeschlossen und ist (V, ϕ) eine endlich dimensionale irreduzible Darstellung von L, dann sind die skalaren Vielfachen von id_V die einzigen L-linearen Endomorphismen $f : V \to V$.*

Invarianten. Sei L eine Liealgebra und (V, ϕ) ein L-Modul, dann definiert

$$V^L = \{v \in V \mid \phi(X)(v) = 0\} = \{v \in V \mid Xv = 0\}$$

den maximalen trivialen L-Untermodul von V.

Ist I ein *Ideal* in L, ist V^I ein L-Modul [wegen $[I, X] \subseteq I$ für $X \in L$ gilt $\phi(I)(\phi(X)v) = \phi(X)(\phi(I)v) + \phi([I,X])v = 0$ für $v \in V^I$, also $\phi(X)V^I \subseteq V^I$]. Dann gilt trivialerweise

$$\boxed{V^L \ = \ (V^I)^{L/I}} \ .$$

Der durch Invariantenbildung $V \to V^L$ definierte Funktor in die Kategorie der F-Vektorräume

$$Rep_F(L) \longrightarrow Vec_F$$

ist linksexakt, d.h. er bildet kurze exakte Sequenzen $0 \to V' \to V \to V'' \to 0$ auf linksexakte Sequenzen $0 \to V' \to V \to V''$ ab.

Beispiel 3. Seien (V, ϕ) und (V', ϕ') Darstellungen von L. Für den L-Modul $Hom_F(V, V')$ gilt

$$Hom_F(V, V')^L \;=\; \{L\text{-lineare Abbildungen } f : V \to V'\} \, .$$

In der Tat ist $f \in Hom_F(V, V')^L$ äquivalent zu $\phi'(X)f(v) - f(\phi(X)v) = 0$ resp. $\phi'(X)f(v) = f(\phi(X)v)$ für alle $v \in V$.

Zerfällungskriterium. Man nennt die Liealgebra L *reduktiv*, wenn jede endlich dimensionale Darstellung von L zu einer direkten Summe von irreduziblen Darstellungen isomorph ist. Um Reduktivität zu zeigen, genügt für exakte Sequenzen von L-Moduln

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & V' \arrow[r] & V \arrow[r, "p"] & V'' \arrow[l, bend right, dotted, "s"'] \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

mit irreduziblem V'' die Existenz von L-linearen *Splittungen* $s : V'' \to V$ mit der Eigenschaft $p \circ s = id_{V''}$; denn dann ist $V \cong V' \oplus s(V'')$ (benutze dann Induktion nach $dim(V)$). Indem man die exakte Sequenz mit $(V'')^\vee$ tensoriert, und V' durch $(V'')^\vee \otimes_F V'$ ersetzt und V durch das Urbild $\tilde{V}$ von $F \cdot id_{V''} \in Hom_F(V'', V'') = (V'')^\vee \otimes_F V''$, kann man obdA sich auf den Fall beschränken, wo $V'' \cong F$ ein eindimensionaler trivialer Modul ist. Per Induktion nach $dim(V)$ kann man neben $V'' = F$ ausserdem annehmen V' sei irreduzibel. Zerfallen alle solchen exakten Sequenzen, ist L reduktiv.

Normalisator. Für eine Lie-Unteralgebra K von L ist

$$N_L(K) \;=\; \{X \in L \mid [K, X] \subseteq K\}$$

eine Lieunteralgebra von L, denn $X, Y \in N_L(K)$ und die Jacobi Identität implizieren $[K, [X, Y]] \subseteq [X, [K, Y]] + [Y, [K, X]] \subseteq [X, K] + [Y, K] \subseteq K + K \subseteq K$. Also $[X, Y] \in N_L(K)$. Offensichtlich ist per Definition K ein Ideal in seinem Normalisator $N_L(K)$. Bezüglich der exakten Sequenz von K-Moduln

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow L \xrightarrow{\pi} L/K \longrightarrow 0$$

gilt nach Definition des Normalisators

$$\boxed{\pi(N_L(K)) \;=\; (L/K)^K} \, .$$

Bemerkung. Im folgenden fixieren wir F und erwähnen F häufig nicht.

Universell Einhüllende Algebra .

Sei L eine Liealgebra. Die universell einhüllende Algebra $U(L)$ von L ist der Quotient $T(L)/I$ der Tensoralgebra

$$T(L) = F \oplus L \oplus L^{\otimes 2} \oplus L^{\otimes 3} \oplus \cdots$$

nach dem von den Relationen $X \otimes Y - Y \otimes X - [X,Y]$ für $X, Y \in L$ erzeugten Ideal I. Für $T^{\leq n}(L) = \bigoplus_{i=0}^{n} L^{\otimes i}$ gilt $T^{\leq n}(L) \otimes T^{\leq m}(L) \subseteq T^{\leq n+m}(L)$. Für das Bild $U^{\leq n}(L)$ von $T^{\leq n}(L)$ im Quotientenring $U(L) = T(L)/I$ gilt analog

$$U^{\leq n}(L) \otimes U^{\leq m}(L) \subseteq U^{\leq n+m}(L) \ .$$

Offensichtlich hat man F-lineare Abbildungen

$$L \hookrightarrow T^{\leq 1}(L) \hookrightarrow U^{\leq 1}(L) \hookrightarrow U(L)$$

und $U(L)$ wird als F-Algebra von $F \cdot 1$ und dem Bild von L erzeugt.

Satz. *Der graduierte Ring*

$$Gr(U(L)) = \bigoplus_{i=0}^{\infty} Gr^i(U(L)) \quad \textit{mit} \quad Gr^i(U(L)) := U^{\leq i}(L)/U^{\leq i-1}(L)$$

ist isomorph zur symmetrischen F-Algebra $S^\bullet(L)$ von L über F

$$\boxed{Gr(U(L)) \ \cong \ S^\bullet(L)} \ .$$

Beweis. Dies zeigt man man induktiv nach dem Grad. Das Argument beruht darauf, dass der graduierte Ring $Gr(U_t(L))$ des Rings $U_t(L) = T(L)/I_t(L)$ nach dem Ideal $I_t(L)$, erzeugt von den Relationen $XY - YX = t \cdot [X,Y]$, nicht von der Wahl von $t \in F$ abhängt. Setzt man $t = 0$, dann definiert $U_0(L)$ die symmetrische Algebra. □

Ist (V, ϕ) ein L-Modul, dann definiert ϕ einen Einsetzungshomomorphismus $T(L) \to End_F(V)$, welcher auf $T^1(L) = L$ mit ϕ übereinstimmt. Dieser Ringhomomorphismus, denn wir auch ϕ nennen wollen, bildet die Elemente aus I auf Null ab wegen $\phi(X)\phi(Y) - \phi(Y)\phi(X) = \phi([X,Y])$, definiert als einen F-linearen Ringhomomorphismus

$$\phi : U(L) \to End_F(V) \ .$$

Der F-Vektorraum V wird auf diese Weise zu einem $U(L)$-Modul unter dem Ring bzw. der F-Algebra $U(L)$. Umgekehrt definiert für einen F-Vektorraum V ein F-Homomorphismus $\phi : U(L) \to End_F(V)$ einen L-Modul vermöge der Komposition $L \to U(L) \to End_F(V)$. Man sieht sofort

Lemma. *Darstellungen (V, ϕ) der Liealgebra L entsprechen eineindeutig $U(L)$-Moduln (V, ϕ) der universell einhüllenden Algebra $U(L)$.*

Darstellungen der Liealgebra $sl(2,F)$

Die Liealgebra $sl(2,F) = F\cdot h + F\cdot x + F\cdot y$ hat als F-Basis die Elemente

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

und

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Man zeigt leicht

$$\boxed{[h,x] = 2x \quad , \quad [h,y] = -2y \quad , \quad [x,y] = h} .$$

Sei F ein Körper der Charakteritik Null und algebraisch abgeschlossen. Für einen endlich dimensionalen $sl(2,F)$-Modul V und $\lambda \in F$ sei

$$V_\lambda = \{v \in V \mid hv = \lambda\cdot v\} .$$

Offensichtlich gilt (*)

$$xV_\lambda \subseteq V_{\lambda+2} \quad , \quad yV_\lambda \subseteq V_{\lambda-2} .$$

Der Endomorphismus h besitzt mindestens einen Eigenvektor v auf V. Wegen (*) und *Dimensionsgründen* gilt obdA $yv = 0$. Sei λ der Eigenwert von v, d.h. $0 \neq v \in V_\lambda$ mit $yv = 0$. Betrachte den F-Unterraum W aufgespannt von $v, xv, x^2v, \cdots, x^nv$ mit $n \geq 0$ minimal so daß $x^nv \neq 0$ und $x^{n+1}v = 0$. Dies liefert den *Gewichtsstrang*

$$0 \xleftarrow{y} F\cdot v \xrightarrow{x} F\cdot xv \xrightarrow{x} F\cdot x^2v \xrightarrow{x} \cdots F\cdot x^nv \xrightarrow{x} 0$$

mit den h-Eigenwerten $\lambda, \lambda+2, ..., \lambda+2n$. Wegen $yx^\nu v = (yx^\nu - x^\nu y)v = ad(y)(x^\nu)v = \sum_{i=0}^{\nu-1} x^i ad(y)(x)x^{\nu-i-1}v = \sum_{i=0}^{\nu-1} x^i h x^{\nu-i-1}v = c(\nu)\cdot x^{\nu-1}v$ mit $c(\nu) = -\sum_{i=0}^{\nu-1}(\lambda+2\nu-2i-2) = -\nu(\lambda+\nu-1) \in F$ ist W ein $sl(2,F)$-Untermodul von V. Andererseits ist $(\lambda+2n)x^nv = hx^nv = (xy-yx)x^nv = xyx^nv = -n(\lambda+n-1)x^nv$ und daher $\lambda = -n$. Ist $w \in W$ ein Eigenvektor von h zum Eigenwert $\lambda+2\nu$ für $0 \leq \nu \leq n$ mit $yw = 0$, dann folgt $\nu = 0$ wegen

$$\boxed{yx^\nu v = c(\nu)\cdot x^{\nu-1}v \quad , \quad c(\nu) = \nu(n+1-\nu)} .$$

Somit ist $W = W(n)$ irreduzibel von der Dimension $dim(W(n)) = n+1$ und als Darstellung von $sl(2,F)$ eindeutig bestimmt durch die Invariante $n \in \mathbb{N}$. Ist V selbst irreduzibel, folgt $V \cong W(n) \cong Sym^n(W(1))$. Dies zeigt

Proposition 3. *Sei F algebraisch abgeschlossen von der Charakteristik Null. Dann ist jede irreduzible Darstellung (V,ϕ) von $sl(2,F)$ isomorph zu einer der (nicht zueinander isomorphen) Darstellungen $W(n)$ für $n = 0,1,2,...$ Es gilt $(V,\phi) = \bigoplus_\lambda V_\lambda$ mit* **ganzahligen** *$\phi(h)$-Eigenwerten*

$$\boxed{\lambda \in \{-n, -n+2, \cdots, n-2, n\}} .$$

Beispiele. $W(2)$ ist isomorph zur Darstellung ad mit *Gewichtsstrang*

$$0 \xleftarrow{y} F\cdot y \xrightarrow{x} F\cdot h \xrightarrow{x} F\cdot x \xrightarrow{x} 0$$

und den h-Eigenwerten $-2,0,2$. Im Fall der zweidimensionalen Darstellung $(F^2, id) \cong W(1)$ mit den Basisvektoren e_1, e_2 hat der *Gewichtsstrang*

$$0 \xleftarrow{y} F\cdot e_2 \xrightarrow{x} F\cdot e_1 \xrightarrow{x} 0$$

die h-Eigenwerte $-1,1$. Für die triviale Darstellung $F = W(0)$ ist der *Gewichtsstrang*

$$0 \xleftarrow{y} F\cdot 1 \xrightarrow{x} 0$$

mit h-Eigenwert 0.

Korollar 6. *Sei F algebraisch abgeschlossen von der Charakteristik Null. Dann ist jede endlich dimensionale Darstellung V von $sl(2,F)$ isomorph zu einer direkten Summe von $\dim(V_0)+\dim(V_1)$ irreduziblen Darstellungen $W(n)$ für $n = 0,1,2,...$*

Beweis. Wegen des Zerfällungskriteriums genügt es die Aussage zu beweisen im Fall, wo V eine Darstellung ist mit irreduziblem L-Untermodul $V' \cong W$ und einer trivialen Darstellung als Kokern $V/V' \cong F$

$$0 \to W(n) \to V \to F \to 0\ .$$

Die Elemente von $sl(2,F)$ vertauschen auf V mit dem Operator (**)

$$\boxed{\Omega \ = \ 4yx + (h+id_V)^2 = 4xy + (h-id_V)^2}\ .$$

(Der Operator $\frac{1}{2}\Omega - \frac{1}{2}$ ist der Casimir Operator). Daher operiert Ω auf $W(n)$ mit einem skalaren Vielfachen der Identität. Wegen $\Omega v = (h-id_V)^2 v$ folgt

$$\boxed{\Omega|_{W(n)} = (n+1)^2 \cdot id_{W(n)}}\ .$$

Ist $n>0$, wird die Splittung definiert durch den $\Omega = 1$ Eigenraum auf V, denn

$$\Omega = \begin{pmatrix} (n+1)^2\cdot id_{V'} & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ist diagonalisierbar auf V. Im Fall $n=0$, $dim(V)=2$ ist (V,ϕ) die triviale Darstellung und die Existenz einer Splittung ist evident. [$sl(2,F)$ ist eine einfache Liealgebra und $Kern(\phi)$ ist ein Ideal. Also ist die Darstellung (V,ϕ) treu oder trivial. Aus $Bild(\phi) \subseteq sl(V)$ und

$$0 \to F \to V \to F \to 0$$

folgt aber $\dim(Bild(\phi)) \le 2$. Also kann ϕ nicht treu sein.]

Korollar 7. *Sei F algebraisch abgeschlossen von der Charakteristik Null. Für jede endlich dimensionale Darstellung (V,ϕ) von $L = sl(2,F)$*

$$\phi:\ sl(2,F) \longrightarrow End_F(V)$$

ist $\phi(h)$ ein halbeinfacher Endomorphismus von V.

Nilpotente Matrizen

Alle Liealgebren in diesem Abschnitt seien endlich dimensional über F.

Eigenwert Lemma. *Sei $\phi : L \to End(V)$ eine Darstellung $V \neq 0$ derart, daß alle Matrizen $\phi(X), X \in L$ nilpotent auf V operieren. Dann gilt*

$$\boxed{V^L \neq 0}\ .$$

Beweis (durch Induktion nach $dim(L)$). Für $dim(L) \leq 1$ wird L erzeugt von einem Element X und man schliesst mit dem Jordan-Normalformensatz für $\phi(X)$ (unabhängig vom Grundkörper F). Sei also $dim(L) > 1$.

Schritt 1. Man kann obdA annehmen, daß ϕ injektiv ist, denn anderenfalls ersetzt man L durch $\tilde{L} = L/Kern(\phi)$ mit $dim(\tilde{L}) < dim(L)$ und benutzt Induktion. Also ist ϕ obdA eine *treue* Darstellung

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, hook, "\phi"] \arrow[d, "{[X,-]}"'] & End(V) \arrow[d, "\rho_{\phi(X)}-\lambda_{\phi(X)}"] \\ L \arrow[r, hook, "\phi"] & End(V) \end{tikzcd}$$

Nach Annahme gilt $\phi(X)^m$ für ein m (abhängig von $X \in L$). Somit impliziert $\rho^m_{\phi(X)} = 0$ und $\lambda^m_{\phi(X)} = 0$ dann $(\rho_{\phi(X)} - \lambda_{\phi(X)})^{2m} = 0$ (Binomial Formel), da $\rho_{\phi(X)}$ und $\lambda_{\phi(X)}$ kommutieren! Aus der Treuheit der Darstellung ϕ folgt dann $(adX)^{2m} = 0$ auf L.

Schritt 2. Sei $K \neq L$ eine maximale echte Lie-Unteralgebra von L. Da jeder eindimensionale Unterraum von L eine Lie-Unteralgebra ist, folgt $dim(K) > 0$, falls $dim(L) > 1$. Da nach Schritt 1 alle $X \in L$ ad-nilpotent sind, operieren alle $X \in K \subseteq L$ mit nilpotenten Matrizen auf den K-Moduln K, L und L/K. Wegen $dim(K) < dim(L)$ folgt aus der Induktionsannahme angewendet auf den K-Modul $V = L/K$ daher $(L/K)^K \neq 0$. Somit ist der Normalisator $N_L(K)$ echt grösser als K. Aus der Maximalität von K folgt daher $N_L(K) = L$. Also ist K ein Ideal in L.

Schritt 3. Es folgt $V^L = (V^K)^{L/K} \neq 0$, denn nach Induktionsannahme ist $V^K \neq 0$ wegen $dim(K) < dim(L)$ und dann erneut nach Induktion $(V^K)^{L/K} \neq 0$ wegen $dim(L/K) < dim(L)$.

Absteigende Zentralreihe. Für $I, J \subseteq L$ sei $[I, J]$ der von allen $[X, Y]; X \in I, Y \in J$ erzeugte F-Vektorraum. Sind I, J Ideale in L, dann ist auch $[I, J]$ ein Ideal in L (Jacobi Identität). Dies definiert rekursiv *Ideale*

$$L^i = [L, L^{i-1}]$$

von L. Beachte: L^i ist der F-Vektorraum aufgespannt von allen (i-1)-fachen Kommutatoren vom Elementen in L.

Nilpotente Liealgebren .

Eine Liealgebra L heisst *nilpotent*, wenn ihre absteigende Zentralreihe L^i (für $i = 1, 2, \cdots$) mit Null abbricht, d.h. wenn

$$L^n = 0$$

gilt für ein geeignetes n.

Lemma. *Ist $L \neq 0$ eine nilpotente Lielgebra, dann ist das Zentrum $Z(L)$ nicht trivial.*

Beweis. Sei $L^n = 0$ und obdA $L^{n-1} \neq 0$, dann gilt $0 \neq L^{n-1} \subseteq Z(L)$.

Bemerkung. Das Zentrum $Z(L)$ ist ein Ideal in L und $L_{ad} = Z/Z(L)$ ist nilpotent, wenn die Liealgebra L nilpotent ist. Damit ist auch das Zentrum von L_{ad} nicht trivial usw.

Beispiel 1. Jede abelsche Liealgebra L ist nilpotent, da $L^1 = [L, L] = 0$.

Beispiel 2. Die *Heisenberg* Liealgebra $S = F \cdot s + F \cdot X + F \cdot Y$ mit dem Zentrum $F \cdot s$ und $[X, Y] = s$ ist nilpotent, denn $S^1 = [S, S] = Z(S)$ und $S^2 = 0$.

Engel's Theorem. *L ist nilpotent als Liealgebra genau dann wenn für alle $X \in L$ die Endomorphismen $ad(X)$ auf L nilpotent operieren.*

Beweis. Aus $L^{n+1} = 0$ folgt $ad(X_1) \circ \cdots ad(X_n) = 0$ für alle $X_1, .., X_n$ in L, also $(adX)^n = 0$ für alle $X \in L$. Zum Beweis der Umkehrung benutzen wir Induktion nach $dim(L)$: Sind alle $ad(X), X \in L$ nilpotent, dann gilt dies auch für die adjungierte Liealgebra $L_{ad} = L/Z(L)$. Wegen dem Eigenwertlemma ist

$$Z(L) = L^L$$

nicht trivial. Daher gilt $dim(L_{ad}) < dim(L)$, und somit ist L_{ad} nach Induktion eine nilpotente Liealgebra. Das bedeutet $(L_{ad})^n = 0$ für geignetes n. Daraus folgt

$$L^n \subseteq Z(L) = Kern(L \to L_{ad}) \ .$$

und damit $L^{n+1} = [L, L^n] \subseteq [L, Z(L)] = 0$. Also ist L eine nilpotente Liealgebra. $\square$

Auflösbare Liealgebren

Der Kommutator $[L, L]$ ist ein Ideal in L und der Quotient $L/[L, L]$ ist eine abelsche Liealgebra. Iteriert man die Kommutatorbildung

$$L^{(i)} = [L^{(i-1)}, L^{(i-1)}] \ ,$$

erhält man eine absteigende Folge von *Idealen* in L. Die Liealgebra L heisst *auflösbar*, wenn $L^{(n)} = 0$ gilt für ein n. Durch Induktion nach i zeigt man $L^{(i)} \subseteq L^i$. Somit ist jede nilpotente Liealgebra auflösbar. Eine einfache auflösbare Liealgebra ist abelsch und isomorph zu F.

Aus der Definition folgt sofort, daß wie im nilpotenten Fall Lie-Unteralgebren und Lie-Quotientenalgebren von auflösbaren Liealgebren auflösbar sind. Anders als im nilpotenten Fall gilt hier aber auch die

Umkehrung: *Ist I ein auflösbares Ideal in L mit auflösbarem Quotient L/I, dann ist L auflösbar*. [Beweis: Aus $(L/I)^{(n)} = 0$ folgt $L^{(n)} \subseteq I$ und aus $I^{(m)} = 0$ folgt dann $L^{(m+n)} = 0$].

Radikal. Sind I, J Ideale in L, dann sind offensichtlich auch $I + J$ und $I \cap J$ Ideale in L. Sind I und J auflösbar, dann ist auch $I + J$ auflösbar, denn I ist auflösbar ebenso wie der Quotient $(I + J)/I \cong J/(J \cap I)$ als Quotient des auflösbaren J. Somit existiert ein *maximal auflösbares Ideal* in L (wir nehmen an $dim(L) < \infty$), das sogenannte *Radikal* $Rad(L)$ der Liealgebra.

Killingform. Sei (V, ϕ) eine Darstellung von L. Dann definiert

$$\boxed{K_\phi(X, Y) \ = \ Tr_V(\phi(X) \circ \phi(Y))}$$

eine *symmetrische* Bilinearform auf L mit der *Assoziativitäts*-Eigenschaft

$$K_\phi([X, Y], Z) \ = \ K_\phi(X, [Y, Z]) \ .$$

Wegen $\phi([X, Y]) = \phi(X)\phi(Y) - \phi(Y)\phi(X)$ reduziert sich dies sofort auf die Matrixidentität $Tr((AB - BA)C) = Tr(A(BC - CB))$ respektive $Tr(BAC) = Tr(ACB)$. Für exakte Sequenzen $0 \to V' \to V \to V'' \to 0$ von Darstellungen gilt

$$K_\phi(X, Y) = K_{\phi'}(X, Y) + K_{\phi''}(X, Y) \ .$$

Für triviale Darstellungen (V, ϕ) ist $K_\phi = 0$. Ist $\phi = ad$ die adjungierte Darstellung, nennt man

$$K(X, Y) := K_{ad}(X, Y)$$

die *Killingform* auf L. Für nilpotente Liealgebren L ist die Killingform trivial wegen $K(X, X) = Tr_L(ad(X)^2) = 0$, da $ad(X)$ nilpotent ist.

Ist I ein *Ideal* in L, dann ist die Killingform von I die *Einschränkung* der Killingform von $L \times L$ auf $I \times I$, denn die Einschränkung der adjungierten

Darstellung von L auf I enthält die adjungierte Darstellung von I als Unterdarstellung mit trivialem Quotient (Idealeigenschaft !).

Killingradikal. Das Radikal der Killingform K

$$Rad_K(L) \ = \ \{X \in L \mid K(X,Y) = 0 \ , \ \forall Y \in L\}$$

definiert wegen der Assoziativität ein Ideal in L, das *Killingradikal* $Rad_K(L)$. Wir behaupten:

$$\boxed{Rad_K(L) = 0 \implies Rad(L) = 0} \ .$$

Beweis: Angenommen das Ideal $R = Rad(L)$ von L wäre nicht Null. Wegen $R^{(n)} = 0$ und obdA $R^{(n-1)} \neq 0$ für geeignetes n ist dann $I = R^{(n-1)}$ ein nicht triviales *abelsches* Ideal in L. Für $X \in L$ und $Y \in I$ gilt dann $ad(X) \circ ad(Y) \circ ad(X) \circ ad(Y) = 0$. Beachte $ad(X) \circ ad(Y)(L) \subseteq ad(X)I \subseteq I$ und $(ad(X) \circ ad(Y))I \subseteq ad(X)([I,I]) = ad(X)(0) = 0$. Also ist $ad(X) \circ ad(Y)$ ein nilpotenter Endomorphismus von L und es folgt $K(X,Y) = Tr_L(adX \circ adY) = 0$, da die Spur nilpotenter Endomorphismus verschwindet. Also $0 \neq I \subseteq Rad_K(L)$, ein Widerspruch!

Für Grundkörper der Charakteritik > 0 ist die Umkehrung

$$\boxed{Rad(L) = 0 \implies Rad_K(L) = 0}$$

im allgemeinen *falsch*. Betrachte $L = sl(3, \mathbb{F}_3)$ modulo Zentrum. Sie gilt aber für Grundkörper der *Charakteristik Null*. Durch Koeffizientenerweiterung kann man dann zum Beweis obdA annehmen F sei ausserdem algebraisch abgeschlossen und beweisen dann sogar schärfer im Fall der Charakterik Null

$$\boxed{Rad_K(L) \ \subseteq \ Rad(L)} \ .$$

Indem man L durch die Liealgebra $I = Rad_K(L)$ ersetzt wird die Killingform Null auf I. Zum Beweis genügt daher

Cartan's Kriterium. *Liealgebren über einem Grundkörper F der Charakteristik Null mit verschwindender Killingform sind auflösbar.*

In der Tat liefert das nächste Lemma für $V = L$ und $A = L_{ad} = ad(L)$ und $M = N_{gl(V)}(L_{ad})$ sowie $X \in [L_{ad}, L_{ad}]$ und $Y \in M$ wegen

$$Tr_L(X \circ Y) = Tr_L([ad(L), ad(L)] \circ Y) = Tr_L(ad(L) \circ [ad(L), Y])$$
$$= Tr_L(ad(L) \circ ad(L)) = K(ad(L), ad(L) = 0$$

die Aussage: X ist nilpotent. Wegen Engel's Theorem ist daher $[L_{ad}, L_{ad}]$ nilpotent. Damit ist L_{ad} auflösbar, ebenso wie dann auch L.

Lemma. *Sei V ein Vektorraum über einem algebraisch abgeschlossenen Körper F der Charakteristik Null mit $dim(V) < \infty$, A ein Untervektorraum von $End(V)$ sowie $M = \{X \in End(V) \mid ad(X)(A) \subseteq A\}$. Gilt $Tr_V(X \circ Y) = 0$ für $X \in M$ und alle $Y \in M$, so ist X nilpotent auf V.*

Beweis. Aus $X \in M$ konstruiert man auf folgende merkwürdige Weise neue Elemente in M. Wir wählen dazu eine Basis von V, in der X Jordan Normalform besitzt und schreiben $X = X_s + X_n$ (diagonal plus nilpotent) und X_s und X_n kommutieren. Wir müssen zeigen, die Diagonalmatrix $X_s = diag(s_1, ..., s_m)$ verschwindet. Es gilt (siehe Appendix)

$$ad(X)_s \ = \ ad(X_s) \ .$$

Es gibt daher ein Polynom Q ohne konstanten Koeffizienten mit der Eigenschaft $ad(X_s) = ad(X)_s = Q(ad(X))$. Es folgt wegen $Q(ad(X))(A) \subseteq A$

$$ad(X_s) = ad(diag(s_1, ..., s_m)) \ \in \ M \ .$$

Betrachte den Teilkörper $\mathbb{Q}(s_1, ..., s_m) \subseteq F$. Sei

$$f = \mathbb{Q}(s_1, .., s_m) \to \mathbb{Q}$$

eine beliebige $\mathbb{Q}$-lineare Abbildung. Wähle ein Polynom P (Lagrange) ohne konstanten Term mit $P(s_i - s_j) = f(s_i) - f(s_j)$ für alle $1 \leq i, j \leq m = dim(V)$. Dies ist möglich, da aus $s_i - s_j = s_k - s_l$ folgt $f(s_i) - f(s_j) = f(s_k) - f(s_l)$ ($\mathbb{Q}$-Linearität von f). Dann gilt auf $End(V)$

$$ad(diag(f(s_1), ..., f(s_m)) \ = \ P\big(ad(diag(s_1, ..., s_m))\big) \ = \ P(ad(X_s)) \ ,$$

wie man leicht verifiziert! Es folgt daher

$$Y = diag(f(s_1), ..., f(s_m)) \ \in \ M \ .$$

Aus den Annahmen folgt $\sum_{i=1}^m s_i f(s_i) = Tr_V(X_s \circ Y) = Tr_V(X \circ Y) = 0$. Anwenden von f liefert daher in $\mathbb{Q}$ die Schlüsselaussage:

$$\sum_{i=1}^m f(s_i)^2 \ = \ 0 \ ,$$

wegen $f(s_i) \in \mathbb{Q}$ also $f(s_i) = 0$ für alle i (und alle f). Dies zeigt $s_i = 0$ für alle i, also $X_s = 0$. Daher ist $X = X_n$ nilpotent.

Appendix. Sei X ein Endomorphismus eines endlich dimensionalen Vektorraums V über F und sei F algebraisch abgeschlossen. Dann besitzt X eine eindeutig bestimmte Zerlegung $X = X_s + X_n$ mit halbeinfachem X_s und nilpotentem X_n derart daß X_s und X_n miteinander kommutieren (Existenz folgt aus dem Jordan Normalformensatz; Eindeutigkeit benutzt, daß X_s und X_n sich als Polynome in X schreiben lassen). Es gilt

$$[ad(X_s), ad(X_n)] = ad([X_s, X_n]) = ad(0) = 0 \ .$$

Aus $(X_n)^k = 0$ folgt wie bereits gezeigt $ad(X_n)^{2k} = 0$. Also ist $ad(X_n)$ nilpotent. X_s ist halbeinfach und daher gilt $X_s = diag(s_1, ..., s_m)$ bei geeigneter Basiswahl von V. Somit ist

$$ad(X_s) = diag(s_1 - s_1, s_1 - s_2, .., s_i - s_j, ..., s_m - s_m)$$

auch diagonal (halbeinfach) auf $End(V)$. Es folgt

$$\boxed{ad(X)_s = ad(X_s) \quad , \quad ad(X)_n = ad(X_n)} \ .$$

Klassifikation der halbeinfachen Liealgebren

Das Beispiel $sl(n, F)$

Satz. *Sei F ein (alg. abg.) Körper mit $char(F) = 0$ und $V = F^n$. Dann ist $L = sl(V)$ eine einfache Liealgebra und die Lieunteralgebra H der Diagonalmatrizen in L (bezüglich einer Basis $e_1, .., e_n$ von V) ist eine maximale Unter-Liealgebra bestehend nur aus ad-halbeinfachen Elementen (d.h. maximal torisch) in L.*

Beweis. Sei X diagonalisierbar und vertausche mit H. Dann respektiert H die H-Eigenräume $F \cdot e_i$ von V. Das heisst X ist diagonal: $X \in H$. $L = sl(V)$ zerfällt in Eigenräume $L = H \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} L_\alpha$ für $\Phi = \{e_i^* - e_j^* \mid 1 \leq i, j \leq n;\ i \neq j\} \subset Hom_F(H, F)$. Es gilt $\#\Phi = n^2 - n$. Es bezeichne X_α die Elementarmatrix mit dem einzigen nicht verschwindenden Eintrag gleich 1 an der Stelle ij. Ein Ideal I von L zerfällt in H-Eigenräume. Ist $I \neq 0$, dann existiert also eine Elementarmatrix X_α in I. Durch eine Matrixrechnung zeigt man nun leicht $[X_\alpha, X_\beta] \neq 0$ für all $\alpha, \beta \in \Phi$ mit $\alpha + \beta \in \Phi$. Daraus folgert man dann ohne Mühe $I = L$.

Die sogenannten positiven Wurzeln $e_i^* - e_j^*$ mit $i < j$ definieren $\Phi^+ \subset \Phi$ und die Wurzeln $\alpha_1 = e_1^* - e_2^*, ..., \alpha_{n-1} = e_{n-1}^* - e_n^*$ definieren das System Δ der einfachen positiven Wurzeln; d.h. jede andere positive Wurzel $\alpha \in \Phi^+$ ist eine nicht negativ ganzzahlige Linearkombination der einfachen Wurzeln. Die Killingform auf $diag(x_1, ..., x_n) \in H$ ist durch ein skalares Vielfaches des Standardskalarproduktes gegeben (wie wir gleich zeigen). Es folgt $(\alpha_i, \alpha_j) = const. \cdot \delta_{i,j-1}$ für $i < j$. Dies zeigt später, daß $L = sl(n, F)$ das Dynkin Diagramm A_{n-1} mit $n - 1$ Ecken liefert

$$\bullet \!-\!\!-\!\!-\! \bullet \!-\!\!-\!\!-\! \cdots \!-\!\!-\!\!-\! \bullet \!-\!\!-\!\!-\! \bullet$$

Zur Killingform. Eine assoziative Bilinearform B auf einer Liealgebra L definiert eine L-lineare Abbildung

$$f_B : (L, ad) \to (L, ad)^\vee \ .$$

Ist L einfach, ist die Killingform K assoziativ und nichtausgeartet auf L und die zugeordnete L-lineare Abbildung f_K ein Isomorphismus. Damit ist $f_K^{-1} \circ f_B$ ein Automorphismus von (L, ad). Für einfaches L ist die adjungierte Darstellung (L, ad) irreduzibel. Nach dem Lemma von Schur gilt $f_K^{-1} \circ f_B = \lambda \cdot id$ für einen Skalar $\lambda \in F$. Also gilt

$$B(X, Y) = \lambda \cdot K(X, Y) \quad , \quad \lambda \in F \ .$$

Aus $B \neq 0$ ist $\lambda \neq 0$. Für die Standarddarstellung von $L = sl(V)$ auf $V = F^n$ ist $B(X, Y) = K_\phi(X, Y) = Tr_V(X \circ Y)$ eine nichttriviale assoziative Bilinearform auf L, also proportional zur Killingform. Beachte

$$B(X, X) \ = \ \sum_{i=1}^n x_i^2 \quad , \quad X = diag(x_1, ..., x_n) \ \in H \ .$$

Halbeinfache Liealgebren

Für eine Liealgebra L ist $Rad(L)$ definiert als das (eindeutig bestimmte) maximale auflösbare Ideal in L. Man nennt eine Liealgebra L *halbeinfach* im Fall $Rad(L) = 0$. Zur Beschreibung der halbeinfachen Liealgebren nehmen wir an

$$\boxed{char(F) = 0} .$$

Zerlegungssatz. *Für endlich dimensionale Liealgebren L über einem Körper der Charakteritik Null gilt*

$$Rad_K(L) = 0 \Longleftrightarrow Rad(L) = 0 .$$

Weiterhin ist in diesem halbeinfachen Fall dann L eine direkte Summe

$$L = \bigoplus_\nu L_\nu$$

von einfachen (nichtabelschen) Liealgebren L_ν.

Beweis. Sei I ein Ideal in L. Dann ist das Orthokomplement $I^\perp$ wieder ein Ideal wegen der Assoziativität der Killingform und es gilt $dim(I) + dim(I^\perp) = dim(L)$ wegen $Rad_K(L) = 0$. Das Ideal $I \cap I^\perp$ ist ein isotroper Teilraum von L. Wegen Cartan's Kriterium ist die Liealgebra I auflösbar, d.h. es folgt $I \cap I^\perp \subseteq Rad(L)$. Nach Annahme gilt $Rad(L) = Rad_K(L) = 0$. Daher folgt

$$L = I \oplus I^\perp .$$

Wegen $[I, I^\perp] \subseteq I \cap I^\perp$ (Idealeigenschaft) ist $[I, I^\perp] = 0$. L zerfällt also als Liealgebra in die direkte Summe der beiden Ideale I und $I^\perp$. Man schliesst dann weiter per Induktion, bis obdA I einfach wird.

Derivationen von L. $Der_F(V, \bullet)$ für $(V, \bullet) = (L, [.,.])$ definiert die Liealgebra $Der(L)$ der *Derivationen von* L. Die Endomorphismen D von L mit der Eigenschaft $D([X, Y]) = [D(X), Y] + [X, D(Y)]$ für alle $X, Y \in L$ sind die Elemente von $Der(L)$. Beispiel: $D = ad(Z) \in Der(L)$ für alle $Z \in L$ und diese sogenannten *inneren* Derivationen von L definieren das Ideal $ad(L)$ in $Der(L)$, denn für $[D, ad(Z)] = D \circ ad(Z) - ad(Z) \circ D$ gilt

$$[D, ad(Z)](X) = D([Z, X]) - [Z, D(X)] = [D(Z), X] = ad(D(Z))(X) .$$

Satz. *Ist L halbeinfach über einem Körper der Charakteritik Null, dann gilt*

$$\boxed{ad(L) \ = \ Der(L)} .$$

Beweis. Da L halbeinfach ist, gilt $Z(L) = 0$ und damit $L = ad(L)$. Die Einschränkung der Killingform der Liealgebra $Der(L)$ auf die Liealgebra $ad(L)$ ist die Killingform von $ad(L)$ und ist damit nicht ausgeartet auf $ad(L)$. Somit ist $I = ad(L)^\perp$ ein Ideal in $Der(L)$ mit $dim(I) +$

$dim(ad(L)) = dim(Der(L))$. Der Durchschnitt $I \cap ad(L) = 0$, denn in $Rad(ad(L)) = Red(L) = 0$ enthalten nach Cartan's Kriterium. Also ist $Der(L) = ad(L) \oplus I$ eine direkte Summe von Liealgebren, d.h. es gilt $[D, ad(Z)] = 0$ für $D \in I$ und $Z \in L$. Angewendet auf $X \in L$ folgt daraus $ad(D(Z))(X) = 0$ für alle $X, Z \in L$ und damit $D(Z) = 0$ für alle Z, also $D = 0$. Also $I = 0$ und damit $Der(L) = ad(L)$.

Korollar 1. *Ist L halbeinfach über einem Körper der Charakteritik Null, dann gibt es für $X \in L$ eine Zerlegung $X = X_s + X_n$ mit der Eigenschaft $X_s, X_n \in L$ und X_s ist ad-halbeinfach und X_n ist ad-nilpotent.*

Beweis. Benutze $L = ad(L) = Der_F(L, \bullet)$ und die Jordan-Zerlegung der F-Derivationen von $(V, \bullet)$ im Fall der Lieklammer $v \bullet w = [v, w]$.

Torische Unteralgebren. Sei L eine halbeinfache Liealgebra über einem algebraisch abgeschlossen Körper F der Charakteristik Null. Eine Lie Unteralgebra H von L heisst *torisch*, wenn sie nur aus *ad-halbeinfachen Elementen* besteht.

Ist $L \neq 0$, gibt es nach Engel's Theorem nicht ad-nilpotente Elemente X in L. Also $X = X_s + X_n$ in L mit $X_s \neq 0$. Auf Grund des letzten Korollars gilt $X_s \in L$. Somit existieren unter obigen Annahmen an F und L *nichttriviale torische* (eindimensionale) Unteralgebren! Wir können nun obdA annehmen, daß H maximal torisch in L ist.

Proposition 1. *Ist L halbeinfach über einem algebraisch abgeschlossenen Körper der Charakteritik Null, dann ist jede (maximale) torische Lie Unteralgebra H von L abelsch.*

Beweis. Wir zeigen, dass $ad_H(X) = ad_L(X)|_H : H \to H$ die Nullabildung ist für $X \in H$. Da $X = X_s$ halbeinfach ist, genügt dazu dass alle Eigenwerte von $ad_L(X)$ auf H Null sind. Angenommen dies wäre nicht der Fall! Dann gäbe es einen Eigenvektor $0 \neq Y \in H$ und ein $0 \neq \lambda \in F$ mit der Eigenschaft

$$ad_L(X)(Y) = [X, Y] = \lambda \cdot Y \ .$$

Es folgt

$$ad_L(Y)(X) = [Y, X] = -\lambda \cdot Y$$

und somit

$$ad_L(Y)^2(X) = 0 \ .$$

Wegen $Y \in H$ ist auch $ad_L(Y)$ ein halbeinfacher Endomorphismus von L und damit auch von H. Der Vektor $X \in H$ kann daher in Eigenvektoren X_α von $ad_H(Y)$ zerlegt werden: $X = \sum_\alpha X_\alpha$. Aus $ad_H(Y)^2(X) = 0$ folgt, dass $X = X_0$ im Eigenraum des Nulleigenwerts $\alpha = 0$ liegen muss. Dies zeigt dann aber

$$-\lambda \ = \ \alpha \ = \ 0$$

im Widerspruch zu $\lambda \neq 0$.

Korollar 2 (Wurzelzerlegung). *Ist L halbeinfach über einem algebraisch abgeschlossenen Körper der Charakteritik Null und ist H eine (maximale) torische Lie Unteralgebra von L, dann gilt*

$$\boxed{L \ = \ Zentr_L(H) \ \oplus \ \bigoplus_{\alpha\in\Phi} L_\alpha} \ .$$

Hierbei sind die L_α die nichttrivialen simultane Eigenräume von H auf L. Die dabei auftretende endlichen Menge Φ von nichttrivalen F-linearen Abbildungen $\alpha : H \to F$ nennt man die Menge der Wurzeln von L und es gilt

$$L_0 \ = \ Zentr_L(H) \ = \ \{X \in L \mid [X,H] = 0\} \ .$$

Hierbei ist für gegebenes $\alpha \in H^\vee = Hom_F(H,F)$ der Eigenraum $L_\alpha \subseteq L$ gegeben durch den Vektorraum aller $Y \in L$ mit

$$[X,Y] = \alpha(X)\cdot Y \quad , \quad X \in H \ .$$

Sei K die Killingform von L. Offensichtlich gilt

- $[L_\alpha, L_\beta] \subseteq L_{\alpha+\beta}$.
- Für $\alpha \neq 0$ besteht L_α aus ad-nilpotenten Elementen X.
- $\alpha+\beta \neq 0 \Longrightarrow L_\alpha \perp L_\beta$ bezüglich der Killingform K.
- Die Einschränkung der Killingform K ist nicht ausgeartet auf L_0.
- $H \subseteq L_0$ und $H^\perp = (H^\perp \cap L_0) \oplus \bigoplus_{\alpha\in\Phi} L_\alpha$.

Die erste Eigenschaft folgt unmittelbar aus der Jacobi Identität, die zweite aus der ersten wegen $ad(X)^n(L_\beta) \subseteq L_{n\alpha+\beta}$. Die vierte Eigenschaft folgt aus der dritten. Diese folgt aus $\alpha(X)\cdot K(X_\alpha, X_\beta) = K([X,X_\alpha], X_\beta) = -K(X_\alpha, [X, X_\beta]) = -\beta(X)\cdot K(X_\alpha, X_\beta)$ für $X \in H, X_\alpha \in L_\alpha$ und $X_\beta \in L_\beta$. In der Tat folgt $(\alpha+\beta)(X)\cdot K(X_\alpha, X_\beta) = 0$ und damit $K(X_\alpha, X_\beta) = 0$ im Fall $\alpha+\beta \neq 0$ durch geeignete Wahl von $X \in H$. Die letzte Eigenschaft folgt aus der letzten Proposition und $L_0 \perp L_\alpha$ für $\alpha \in \Phi$.

Maximale torische Unteralgebren. Sei nun H eine *maximale* torische Unteralgebra von der halbeinfachen Algebra L. Dann ist jedes ad-halbeinfache Element von L_0 wegen der Maximalität von H bereits in H, denn Summen von kommutierenden halbeinfachen Matrizen sind wieder halbeinfach.

Per Definition gilt $X \in L_0 \Leftrightarrow ad(X)(H) = 0$. Damit gilt für $X \in L_0$ auch $ad(X)_s(H) = 0$, denn $ad(X)_s$ ist ein Polynom in $ad(X)$ ohne konstanten Koeffizienten. Damit liegt $ad(X)_s = ad(X_s)$ in L_0 und es folgt

$$X \in L_0 \Longrightarrow X_s, X_n \in L_0$$

sowie dann wegen der Maximalität (!) von H im Sinne einer Vektorraumsumme

$$L_0 = H \oplus (L_0)_n \ .$$

Da H ein Ideal von L_0 ist, ist daher L_0/H wegen Engel's Theorem nilpotent. Da H im Zentrum von L_0 liegt, ist dann sogar L_0 nilpotent.

Proposition 2. *Ist H eine maximale torische Lie Unteralgebra einer halbeinfachen Liealgebra L über einem algebraisch abgeschlossenen Körper F der Charakteristik Null, dann gilt*

$$\boxed{L_0 = H}\ .$$

Insbesondere ist die Einschränkung von K auf H nicht ausgeartet.

Beweis. Es gilt $ad(X)ad(h) = ad(h)ad(X) + ad([X,h]) = ad(h)ad(X)$ für $X \in (L_0)_n$ und $h \in H$ wegen $[X,h] = 0$. Für $X \in (L_0)_n$ ist $ad(X) := ad_L(X)$ nilpotent auf L. Da $ad_L(h)$ mit $ad_L(X)$ kommutiert, ist dann auch $ad_L(X)ad_L(h)$ nilpotent auf L und damit gilt $K(X,h) = Tr_L(ad_L(X)ad_L(h)) = 0$. Somit ist X orthogonal zu H und (X ist sowieso orthogonal zu den L_α für $\alpha \neq 0$). Es folgt $(L_0)_n \subseteq L_0 \cap H^\perp$ für den Annulator $H^\perp$ von H bezüglich der Killingform K von L. Aus $\dim(H) = \dim(L) - \dim(H^\perp) = \dim(L_0) - \dim(L_0 \cap H^\perp)$ und $\dim((L_0)_n) = \dim(L_0) - \dim(H)$ folgt $\dim((L_0)_n) = \dim(L_0 \cap H^\perp)$, also

$$L_0 \cap H^\perp = (L_0)_n\ .$$

Andererseits gilt $[L_0, L_0] \perp H$ wegen der Assoziativität der Killingform K und somit $[L_0, L_0] \subseteq H^\perp \cap L_0 = (L_0)_n$. Es folgt $[(L_0)_n, (L_0)_n] \subseteq (L_0)_n$ und damit im Sinne einer *direkten Summe von Liealgebren*

$$L_0 = H \oplus (L_0)_n\ .$$

Wäre die nilpotente Liealgebra $(L_0)_n \neq 0$, wäre ihr Zentrum nichttrivial und es gäbe ein $0 \neq Z \in Z(L_0) \cap (L_0)_n$. D.h. $ad_L(Z)$ wäre nilpotent und kommutiert mit allen $ad_L(Y), Y \in L_0$; somit wäre auch $ad_L(Z)ad_L(Y)$ nilpotent auf L. Also $K(Z,Y) = Tr_L(ad_L(Z)ad_L(Y)) = 0$ für alle $Y \in L_0$ und damit alle $Y \in L$. Somit wäre $0 \neq Z \in L_0$ im Radikal $Rad(L) = 0$ der Killingform K. Ein Widerspruch! Dies zeigt $(L_0)_n = 0$ und $H = L_0$.

Korollar 3. *Der Dualraum $H^\vee = Hom_F(H,F)$ wird über F von den Linearformen $\alpha \in \Phi$ aufgespannt.*

Beweis. Wäre die Aussage falsch, existiert ein $0 \neq h \in H$ mit $\alpha(h) = 0$ für alle $\alpha \in \Phi$. Damit gilt $[h, L_\alpha] = 0$ für alle α inklusive $\alpha = 0$, d.h. $h \in Z(L)$. Da L halbeinfach ist, gilt $Z(L) = 0$. Widerspruch!

Die Vektoren H_α. Für $X \in L_\alpha$ und $Y \in L_{-\alpha}$ gilt $[X,Y] \in L_0 = H$. Für alle $h \in H$ gilt dann $K(h,[X,Y]) = K([h,X],Y) = \alpha(h)K(X,Y)$. Da K nicht ausgeartet ist auf H, existiert zu $\alpha \in \Phi$ ein eindeutig bestimmtes duales Element $H_\alpha \in H$ mit der Eigenschaft

$$\boxed{K(h,H_\alpha) = \alpha(h)} \quad , \quad \forall h \in H\ .$$

Es folgt daher für die $\alpha \in \Phi$

$$[X,Y] \ = \ K(X,Y) \cdot H_\alpha \quad , \quad \forall\, X \in L_\alpha, Y \in L_{-\alpha}\ .$$

Korollar 4. *Für $\alpha \in \Phi$ ist $[L_\alpha, L_{-\alpha}] = F \cdot H_\alpha$ und es gilt*

$$\boxed{\alpha(H_\alpha) = K(H_\alpha, H_\alpha) \neq 0}\ .$$

Beweis. Für den ersten Teil ist $[L_\alpha, L_{-\alpha}] \neq 0$ bzw. $K(L_\alpha, L_{-\alpha}) \neq 0$ zu zeigen. Letzteres folgt aus $L_\alpha \nsubseteq Rad_K(L) = 0$ und $L_\alpha \perp L_\beta$ für $\beta \neq -\alpha$.

Für den zweiten Teil. Nach Definition von H_α gilt $K(H_\alpha, H_\alpha) = \alpha(H_\alpha)$. Aus $\alpha(H_\alpha) = 0$ folgt $[H_\alpha, X] = [H_\alpha, Y] = 0$ für $X \in L_{-\alpha}$ und $Y \in L_\alpha$. Wegen Teil 1 kann man $X = X_\alpha, Y = Y_{-\alpha}$ wählen mit $[X_\alpha, Y_{-\alpha}] = K(X_\alpha, Y_{-\alpha}) \cdot H_\alpha = H_\alpha$, d.h. $K(X_\alpha, Y_{-\alpha}) = 1$. Dann ist

$$S = F \cdot H_\alpha + F \cdot X_\alpha + F \cdot Y_{-\alpha}$$

eine dreidimensionale *Heisenberg* Liealgebra über F. Das Element $s = ad_L(H_\alpha)$ operiert halbeinfach auf L. Somit zerfällt L in endlich dimensionale s-Eigenräume W. Da X und Y mit s kommutieren, erhalten $ad(X_\alpha)$ und $ad(Y_{-\alpha})$ den jeweiligen s-Eigenraum W. Operiert s auf W mit dem Eigenwert $\lambda \in F$, dann gilt

$$\lambda \cdot dim(W) = Tr_W(s) = Tr_W([ad(X_\alpha), ad(Y_{-\alpha})]) = 0\ .$$

Wegen $char(F) = 0$ folgt $\lambda = 0$. Somit operiert $ad_L(s)$ auf W und damit auf L trivial. Es folgt $s \in Z(L) = 0$. Dieser Widerspruch zeigt $\alpha(H_\alpha) \neq 0$!

Die Liealgebra $sl(2, F)$. Beachte $sl(2, F) = F \cdot h + F \cdot x + F \cdot y$ mit

$$\boxed{[h, x] = 2x \quad , \quad [h, y] = -2y \quad , \quad [x, y] = h}\ .$$

Herbei ist $h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ und $x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ resp. $y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Die $sl(2, F)$-Einbettungen. Aus dem letzten Korollar bzw. seinem Beweis erhält man für jede *Wurzeln* $\alpha \in \Phi$ und $L_\alpha = FX_\alpha, L_{-\alpha} = FY_{-\alpha}$ mit $K(X_\alpha, Y_{-\alpha}) = 1$ einen *Liealgebren Homomorphismus*

$$\boxed{\phi_\alpha :\ sl(2, F)\ \hookrightarrow\ L}$$

definiert durch:

$$x \mapsto X_\alpha \quad , \quad y \mapsto \frac{2}{K(H_\alpha, H_\alpha)} Y_{-\alpha} \quad , \quad h \mapsto H_\alpha^\vee := \frac{2}{K(H_\alpha, H_\alpha)} H_\alpha\ .$$

ϕ_α ist wohldefiniert wegen $K(H_\alpha, H_\alpha) \neq 0$ (letzter Korollar) und man prüft sofort die relevanten Kommutatorrelationen einer Darstellung. Vermöge der ϕ_α definiert die halbeinfache Liealgebra L endlich dimensionale Darstellungen (L, ϕ_α) der Liealgebra $sl(2, F)$. Beachte

$$Bild(\phi_\alpha)\ \subseteq\ L_{-\alpha} \oplus L_0 \oplus L_\alpha\ .$$

Die halbeinfache Liealgebra L als $sl(2,F)$-Modul

Für $\alpha \in \Phi$ ist die durch $ad \circ \phi_\alpha$ definierte Darstellung von $sl(2,F)$ auf L wegen $[L_\alpha, L_\beta] \subseteq L_{\alpha+\beta}$ eine direkte Summe von Teildarstellungen

$$V \;=\; \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} L_{\beta+n\alpha} \;\;\subseteq L$$

für $\beta \in \Phi$ oder $\beta = 0$. Es gilt $L_{\beta+n\alpha} \subseteq V_\lambda$ für

$$\boxed{\lambda \;=\; (\beta+n\alpha)(H_\alpha^\vee) \;=\; \beta(H_\alpha^\vee) + 2n = \tfrac{2(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)} + 2n}$$

denn $\phi_\alpha(h) = H_\alpha^\vee$ operiert mit dem Eigenwert $(\beta+n\alpha)(\phi_\alpha(h))$, und es gilt $\alpha(H_\alpha^\vee) = \frac{2}{K(H_\alpha,H_\alpha)}\alpha(H_\alpha) = 2$. Im Fall $\beta = 0$ ist

$$V = \cdots \oplus L_{-2\alpha} \oplus L_{-\alpha} \oplus L_0 \oplus L_\alpha \oplus L_{2\alpha} \oplus \cdots$$

Die Klassifikation der (irreduziblen) Darstellungen von $sl(2,F)$ zeigt, dass

$$\phi_\alpha(sl(2,F)) \;\text{ in }\;\; L_{-\alpha} \oplus L_0 \oplus L_\alpha \;\subseteq\; V$$

eine dreidimensionale irreduzible Darstellung isomorph zu $W(2)$ in V aufspannt. Weiterhin definiert $Kern(\alpha : H \to F) \subseteq H = L_0$ eine triviale Unterdarstellung von V. Da $sl(2,F)$ reduktiv ist (siehe Abschnitt über Darstellungen der $sl(2,F)$, folgt

$$V = Kern(\alpha : H \to F) \oplus Bild(\phi_\alpha) \oplus V'$$

für eine Darstellung $V' \subseteq \cdots \oplus L_{-2\alpha} \oplus L_{-\alpha} \oplus 0 \oplus L_\alpha \oplus L_{2\alpha} \oplus \cdots$ mit geraden h-Eigenwerten. Damit ist wegen $V'_\lambda = 0, \lambda = 0$ jeder *Gewichtsstrang* (siehe dazu die Klassifikation der Darstellungen der $sl(2,F)$) in V' unterbrochen, Es folgt $V' = 0$. Also $V = Bild(\phi_\alpha) \oplus Kern(\alpha : H \to F)$ und damit

Korollar 5. *Für alle* $\alpha \in \Phi$, $n \in \mathbb{N}$ *gilt*

- *Primitivität:* $\alpha, n\alpha \in \Phi \Longrightarrow n = \pm 1$*, sowie*
- *Multiplizität 1:* $L_\alpha = F \cdot X_\alpha$*, das heisst* $dim(L_\alpha) = 1$.

Im Fall $\beta \in \Phi$ und obdA $\beta \neq \alpha, -\alpha$ gilt für jeden Eigenwert λ von $(ad_L \circ \phi_\alpha)(h)$ auf V für den Eigenraum $\dim(V_\lambda) \leq 1$ wegen $\dim(L_{\beta+n\alpha}) \leq 1$. Da die Eigenwerte λ von h grundsätzlich ganzzahlig sind, folgt

- $n_{\alpha\beta} := \beta(H_\alpha^\vee) \in \mathbb{Z}$.
- V ist **irreduzibel** als $sl(2,F)$-Modul, [da entweder V_0 oder V_1 Null und somit $dim(V_0) + dim(V_1) = 1$ ist].
- $[L_\alpha, L_\beta] = L_{\alpha+\beta}$. [Benutze $dim(L_{\alpha+\beta}) \leq 1$ und V irreduzibel].
- $\alpha, \beta \in \Phi \Longrightarrow \beta - \beta(H_\alpha^\vee) \cdot \alpha \in \Phi$. [Wegen $L_\beta = V_{\beta(H_\alpha^\vee)} \neq 0$ folgt auch $L_{\beta-\beta(H_\alpha^\vee)\cdot\alpha} = V_{\beta(H_\alpha^\vee)-\beta(H_\alpha^\vee)\cdot\alpha(H_\alpha^\vee)} = V_{-\beta(H_\alpha^\vee)} \neq 0$ wegen der symmetrischen Lage der h-Eigenwerte im Gewichtsstring einer $sl(2,F)$-Darstellung].

Die gefunden Bedingungen reformuliert man am besten mittels der *dualen Killingform*.

Duale Killingform. Die Einschränkung der Killingform K von L auf H ist eine nichtausgearte symmetrische Bilinearform auf H. Die dazu *duale symmetrische Bilinearform* $(.,.)$ auf dem Dualraum $H^\vee$, definiert durch

$$(\alpha,\beta) \;:=\; K(H_\alpha,H_\beta) \;=\; \alpha(H_\beta) \text{ oder}$$

$K(H_\alpha,H_\beta) = Spur_L(ad_L(H_\alpha)ad_L(H_\beta)) = \sum_{\gamma\in\Phi} dim(L_\gamma)\cdot\gamma(H_\alpha)\gamma(H_\beta) = \sum_{\gamma\in\Phi}(\gamma,\alpha)(\gamma,\beta)$ wegen $dim(L_\gamma)=1$, ist für alle $x,y\in H^\vee$

$$(x,y) \;=\; \sum_\gamma (\gamma,x)(\gamma,y)$$

durch bilineare Fortsetzung. Insbesondere

$$\boxed{(x,x) = \sum_{\gamma\in\Phi}(\gamma,x)^2}\,.$$

Es gilt $(\alpha,\alpha) = (\alpha,\alpha)^2\sum_{\gamma\in\Phi} n_{\alpha\gamma}^2$ und die Zahlen $n_{\alpha\beta} = \beta(H_\alpha^\vee) = 2\frac{(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}$ sind ganz. Da wir bereits $(\alpha,\alpha)\neq 0$ wissen, folgt $(\alpha,\alpha)\in\mathbb{Q}$. Wegen $n_{\alpha\gamma}\in\mathbb{Z}$ folgt $(\alpha,\gamma)\in\mathbb{Q}$ für $\alpha,\gamma\in\Phi$. Also $(x,x) = \sum_{\gamma\in\Phi}(\gamma,x)^2 \geq 0$ für alle x aus dem von den Wurzeln aufgespannten $\mathbb{R}$-Vektorraum.

Theorem 1. *Die duale Killingform $(.,,)$ definiert auf dem $\mathbb{Q}$-Vektorraum*

$$\boxed{E = \sum_{\alpha\in\Phi}\mathbb{Q}\cdot\alpha}\,,$$

aufgespannt in $H^\vee$ von den endlich vielen Wurzeln $\alpha\in\Phi\subset H^\vee$, eine nichtausgeartete symmetrische <u>positiv definite</u> $\mathbb{Q}$-Bilinearform. Es gilt

- $dim_{\mathbb{Q}}(E) = dim_F(H)$.
- $\alpha, n\alpha\in\Phi, (n\in\mathbb{N}) \Longrightarrow n=\pm 1$.
- $\alpha\in\Phi \Longrightarrow \sigma_\alpha(\Phi)=\Phi$ *für die Spiegelungen definiert durch*

$$\boxed{\sigma_\alpha(x) = x - \tfrac{2(x,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\alpha}\,.$$

- $\alpha,\beta\in\Phi \Longrightarrow n_{\alpha\beta} = \frac{2(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\in\mathbb{Z}$.

Bemerkung. Die lineare Abbildung $\sigma_\alpha : E\to E$ erfüllt $\sigma_\alpha(\alpha) = -\alpha$ und ist die Identität auf der zu α bezüglich der Metrik $(.,.)$ orthogonalen Hyperebene in E. Somit ist σ_α eine Spiegelung, und als solche enthalten in der orthogonalen Gruppe der dualen Killingform $(.,.)$. Die von diesen Spiegelungen erzeugte endliche Untergruppe W der Permutationsgruppe von Φ nennt man die *Weylgruppe* des Wurzelsystems. W stabilisiert das Untergitter $\sum_{\alpha\in\Phi}\mathbb{Z}\cdot\alpha$ von E.

Wurzelsysteme. Eine endliche Konfiguration $\Phi\subseteq E$ von nichttrivialen Vektoren eines Euklidischen Raumes $(E\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{R},(.,.))$ mit den im letzten Theorem genannten Eigenschaften nennt man ein *abstraktes Wurzelsystem*.

Wurzelsysteme Φ

Für abstrakte Wurzelsysteme (E, Φ) gilt $\sigma_\alpha(\Phi) = \Phi$ für die Spiegelungen $\sigma_\alpha, \alpha \in \Phi$ sowie $n_{\alpha\beta} = \frac{2(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)} \in \mathbb{Z}$ für alle $\alpha, \beta \in \Phi$. Also ist $n_{\alpha\beta}n_{\beta\alpha} = 4cos^2(\theta_{\alpha\beta}) \leq 4$ ganzzahlig, und $\neq 4$ für $\alpha \neq \pm\beta$, da sonst $\beta = \pm\lambda\alpha$ gilt mit $\lambda \in \{1/2, 1, 2\}$ im Widerspruch zur Primitivität.

Fakt 1. *Aus* $n_{\alpha\beta} = \frac{2(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)} \in \mathbb{Z}$ *folgt* $\boxed{n_{\alpha\beta}n_{\beta\alpha} \in \{0, 1, 2, 3\}}$ *für alle* $\alpha \neq \pm\beta$.

Fakt 2. *Für* $\alpha \neq \pm\beta$ *gilt entweder* $|n_{\alpha\beta}| = 1$ *oder* $|n_{\beta\alpha}| = 1$ *oder* α *und* β *sind orthogonal zueinander.*

Fakt 3. $\boxed{\Phi = -\Phi}$, *denn* $\sigma_\alpha(\alpha) = -\alpha$.

Fakt 4. *Für* $\alpha \neq \pm\beta$ *mit* $\alpha, \beta \in \Phi$ *gilt*

$$(\alpha, \beta) > 0 \Longrightarrow \alpha - \beta \in \Phi \ .$$

[Sei obdA $n_{\beta\alpha} = 1$ nach Fakt 2, und damit $\alpha-\beta = \sigma_\beta(\alpha) = \alpha-n_{\beta\alpha}\cdot\beta \in \Phi$. D.h. entweder gilt $\alpha - \beta \in \Phi$ oder $\beta - \alpha \in \Phi$. Benutze dann $\Phi = -\Phi$].

Basen Δ von Φ

Sei (E, Φ) ein abstraktes Wurzelsystem und sei H eine generische Hyperebene in E, d.h. kein $\alpha \in \Phi$ liegt in H. Dann zerfällt Φ (abhängig von H) in die rechte und linke Teilmenge

$$\boxed{\Phi \ = \ \Phi^+ \sqcup \Phi^-} \ .$$

$\alpha \in \Phi^+$ heisst *unzerlegbar* oder *einfach*, wenn gilt $\alpha \neq \alpha_1 + \alpha_2$ für alle $\alpha_1, \alpha_2 \in \Phi^+$. Aus Fakt 3 folgt

$$\boxed{\Phi^- = -\Phi^+} \ .$$

Folgerung 1. *Jedes* $\alpha \in \Phi^+$ *ist eine positive Linearkombination von einfachen Wurzeln* α_ν

$$\alpha \ = \ \sum_\nu m_{\alpha\nu}\alpha_\nu \quad , \quad m_{\alpha\nu} \geq 0 \ .$$

Folgerung 2. *Für einfache* $\alpha, \alpha' \in \Phi^+$ *gilt* $\boxed{(\alpha, \alpha') \leq 0}$ *im Fall* $\alpha \neq \alpha'$. [Aus Fakt 4 folgt ansonsten $\alpha - \alpha' \in \Phi^+$ nach eventueller Vertauschung von α und α'. Damit wäre dann $\alpha = (\alpha - \alpha') + \alpha'$ zerlegbar. Widerspruch].

Folgerung 3. *Die Menge* $\Delta \subset \Phi^+$ *der einfachen Wurzeln (bzgl. der Hyperebene* H*) definiert eine Basis des* $\mathbb{R}$*-Vektorraums* E.

Beweis. Φ und damit Δ erzeugt E. Eine Relation $\sum_{\alpha\in\Delta} m_\alpha\alpha \ = \ 0$ hat odbA die Gestalt

$$\lambda \ = \sum_{\alpha'\in\Delta} m_{\alpha'}\alpha' \ = \sum_{\alpha''\in\Delta} m_{\alpha''}\alpha''$$

für Koeffizienten $m_{\alpha'}, m_{\alpha''} \geq 0$ und disjunkte Mengen $\Delta' = \{\alpha'\}$ und $\Delta'' = \{\alpha''\}$. Für den so definierten Vektor λ gilt nach Folgerung 2

$$(\lambda,\lambda) \;=\; (\sum_{\alpha'} m_{\alpha'}\alpha', \sum_{\alpha''} m_{\alpha''}\alpha'') \;=\; \sum_{\alpha'\neq\alpha''} m_{\alpha'}m_{\alpha}(\alpha',\alpha) \;\leq 0\;.$$

Aus der Definitheit der Paarung folgt $\lambda = 0$, und damit leicht $m_{\alpha'} = 0$ und $m_{\alpha''} = 0$. Also ist Δ eine Basis des Vektorraums E.

Der Coxeter Graph

Eine endliche Menge $U = \{u_1, ..., u_r\}$ linear unabhängiger Vektoren u_i eines reellen Euklidschen Vektorraum heisse ZK (zulässige Konfiguration), wenn gilt

- $(u_i, u_i) = 1$
- $4(u_i, u_j)^2 = 0, 1, 2, 3$ für alle $i \neq j$
- $(u_i, u_j) \leq 0$ für alle $i \neq j$

Einer ZK ordnet man einen *Coxeter Graph* D zu, ein Graph dessen

- Ecken den u_i entsprechen mit
- $4(u_i, u_j)^2$ Verbindungskanten zwischen Ecken $u_i \neq u_j$.

Das Beispiel von Interesse (Fakt 1 sowie Folgerung 2 und 3): Die

$$u_i = \frac{\alpha_i}{(\alpha_i, \alpha_i)^{1/2}}$$

für $\alpha_i \in \Delta$ (System einfacher Wurzeln zu einer generischen Hyperebene H für ein abstraktes Wurzelsystem Φ) definieren eine ZK. Der Coxeter Graph repräsentiert die Zahlen $\frac{(\alpha,\beta)}{\|\alpha\|\|\beta\|}$ für $\alpha, \beta \in \Delta$.

Theorem. *Jeder zusammenhängende Coxeter Graph ist vom Typ A_n, BC_n, D_n oder vom Typ G_2, F_4 oder E_6, E_7, E_8.*

Beweis. 1) Ist U eine ZK und $u_i \in U$, dann ist auch $U \setminus \{u_i\}$ eine ZK. Den Coxetergraph erhält man durch Weglassen der Ecke u_i und Streichen der zugehörigen Kanten. Jede Zusammenhangskomponente eines Coxeter Graphen ist daher wieder ein Coxeter Graph.

2) Die Anzahl von Paare verbundener Ecken in D ist echt kleiner als die Zahl der Ecken von D, denn $0 \neq v = \sum_{u_i \in D} u_i$ erfüllt $(v, v) > 0$ und daher gilt $\#$Ecken $> -2\sum_{i<j}(u_i, u_j) \geq \#$Paare.

3) D ist ein *Baum*, denn würde D einen Zykel enthalten, gäbe es nach 1) eine ZK dessen Coxeter Graph ein Zykel ist. Dies ist unmöglich nach 2).

4) Von jeder Ecke u in D gehen höchsten 3 Kanten aus, ist als entweder eine 'Dreiersternecke' oder hat ≤ 2 Nachbarn. [Nach 1) ist D obdA ein Stern um u mit den Nachbarn $v_1, .., v_l$ zu denen Kanten bestehen. Nach 3) gilt $(v_i, v_j) = 0$ für alle Nachbarn $v_i \neq v_j$ von u. Ergänzt man das ON-System

$v_1, ..., v_l$ um v_0 zu einer ON-Basis, dann ist $(u, v_0) \neq 0$ wegen der linearen Unabhängigkeit. Plancherel zeigt daher $\sum_{i=1}^{l}(u, v_i)^2 \leq 1$. Daher ist die Anzahl $\sum_{i=1}^{l} 4(u, v_i)^2$ der Nachbarkanten von u echt kleiner als 4.

5) Nach 4) ist der Graph D vom Typ G_2 (2 Ecken mit 3 Verbindungskanten), wenn zwei Eckpunkte von D durch drei Kanten verbunden sind und D *zusammenhängend* ist.

6) Enthält D eine *Kette* vom Typ A_k, d.h. Ecken $v_1, ..., v_k$ mit $4(v_i, v_{i+1})^2 = -1$ für $i = 1, ..., k-1$ so daß v_i nur mit v_{i+1} und v_{i-1} verbunden ist für alle $i = 2, ..., k-1$, dann kann man diese Kette $v_1, , .v_k$ zusammenziehen zu einer einzigen Ecke v (Verheftung von v_1 und v_k sowie Weglassen von $v_2, .., v_{k-1}$) und erhält wieder einen Coxeter Graph. [Für $v = \sum_{i=1}^{k} v_i$ gilt $(v, v) = 1$ sowie $(u, v) = (u, v_1)$ für Nachbarn u von v_1 resp. $(u, v) = (u, v_k)$ für Nachbarn u von v_k].

7) Sei D zusammenhängend und keine 'Kette'. Dann kommt genau eine 'Doppelkante' (vom Typ B_2) oder alternativ genau eine 'Dreiersternecke' (vom Typ D_4) in D vor. [Wären zwei 'Doppelkanten' durch eine Kette verbunden, würden 1) und 6) eine 'Ecke' mit vier Kanten in einem Coxeter Graph liefern; nach 4) ausgeschlossen. Wären zwei 'Dreiersternecken' durch eine Kette verbunden, schliesst man analog. Ebenso wenn eine 'Doppelkante' durch eine Kette mit einer 'Dreiersternecke' verbunden wäre. Da D nach 3) ein Baum ist und nach 4) die Zahl der Kanten, die von einer Ecke ausgeht, höchstens 3 ist, folgt daraus die Behauptung.]

8) Ist $D \neq F_4$, dann kann von einer 'Dopppelkante' nur von einer der beiden Ecken eine weitere Kante ausgehen. [Für die Ecken u_p, v_q der Doppelkante seien $u_1, u_2, .., u_p$ resp. $v_1, v_2, ..., v_q$ 'Ketten' in D. Für $u = \sum_{i=1}^{p} iu_i$ und $v = \sum_{j=1}^{q} jv_j$ gilt dann $(u, u) = \sum_1^p i^2 - \sum_1^{p-1} i(i+1) = p^2 - p(p+1)/2 = p(p+1)/2$ und ditto $(v, v) = q(q+1)/2$ sowie $(u, v)^2 = p^2q^2(u_p, v_q)^2 = p^2q^2/2$ wegen $(u_p, v_q)^2 = -1/2$. Aus der Schwarz Ungleichung folgt dann $(p-1)(q-1) < 2$. Also $p = 1$ oder $q = 1$.]

9) Ist $D \neq E_6, E_7, E_8$, geht nur von einer der drei 'Sternecken' in D eine weitere Kante aus. [Seien $u_{p-1}, v_{q-1}, w_{r-1}$ die Sternecken und m der Mittelpunkt. Bilde $u = \sum_{i=1}^{p-1} iv_i$, $v = \sum_{j=1}^{q-1} jv_j$ und $w = \sum_{k=1}^{r-1} kw_k$ zu 'Kanten' der Längen $p-1$, $q-1$ und $r-1$ in D ausgehend von den Ecken $u_{p-1}, v_{q-1}, w_{r-1}$. Es gilt $\cos^2(\theta_u) = \frac{(u,m)^2}{(u,u)(m,m)} = \frac{(p-1)^2(-1/4)}{(p-1)p/2} = \frac{1}{2}(1 - 1/p)$ und analog für v und w. Wegen $\cos^2(\theta_u) + \cos^2(\theta_v) + \cos^2(\theta_w) < 1$ wie in Schritt 4 folgt

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} > 1$$

obdA für $p \geq q \geq r \geq 2$. Also $r = 2$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > \frac{1}{2}$ wegen $3/r > 1$, und dann $q = 2, 3$ und $\frac{1}{p} > \frac{1}{6}$ wegen $\frac{2}{q} > \frac{1}{2}$. Somit $p \leq 5$].

Bestimmung von Φ durch Δ

Die Weylgruppe $W(\Phi) \subseteq Aut(\Phi)$ eines abstrakten Wurzelsystems wird erzeugt von den Spiegelungen $\sigma_\alpha, \alpha \in \Phi$. Für $\alpha \in \Phi \subset E$ sei $H(\alpha) = \{v \in E \mid (\alpha, v) = 0\}$ die Fixhyperebene der Spiegelung σ_α. Die Zusammenhangskomponenten von

$$E_{\mathbb{R}} \setminus \bigcup_{\alpha\in\Phi} H(\alpha) \quad , \quad E_{\mathbf{R}} = E \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$$

nennt man *Weylkammern*. Ist $(E, \Phi) = (E_1 \oplus E_2, \Phi_1 \times \{0\} \cup \{0\} \times \Phi_2)$ ein Produkt zweier abstrakter Wurzelsysteme, ist $W(\Phi) = W(\Phi_1) \times W(\Phi_2)$ und Weylkammern $K = K_1 \times K_2$ sind Produkte von Weylkammern. Ist (E, Φ) kein Produkt von Wurzelsystemen, nennt man (E, Φ) *irreduzibel*.

Fakt 1. *Ist (E, Φ) irreduzibel, dann operiert $W(\Phi)$ irreduzibel auf E.*

Beweis. Sei $E_1 \subseteq E$ ein $W(\Phi)$-stabiler Unterraum und E_2 sein Orthokomplement. Es genügt zu zeigen $\alpha \in \Phi \Longrightarrow \alpha \in E_1$ oder $\alpha \in E_2$, was einen Widerspruch zur Irreduzibilität ergäbe. Sei $\alpha \notin E_1$. Dann folgt aber wegen $\sigma_\alpha(E_1) = E_1$ sofort $(\alpha, E_1) = 0$ und daher $\alpha \in E_1^\perp = E_2$.

Fakt 2. *$W(\Phi)$ operiert transitiv auf den Weylkammern.*

Beweis. Sei K eine feste Kammer und sei K' eine weiter Kammer. Wähle $k \in K$ und $k' \in K'$ und $w \in W(\Phi)$ mit minimalem $\|wk' - k\|$. Wir behaupten dann $wk' \in K$ und damit $wK' = K$. Wäre $wk' \notin K$, existiert eine Trennwand $H(\alpha)$ von K so dass $\sigma_\alpha wk'$ näher bei k liegt als wk' (betrachte die Wand $H(\alpha)$ von K, die von der Verbindungsgerade $k'k$ getroffen wird).

Sei $W_K = \langle\sigma_{\alpha_1}, ..., \sigma_{\alpha_r}\rangle$ die Untergruppe von $W(\Phi)$, die von den Spiegelungen σ_α zu den Wänden $H(\alpha)$ von K erzeugt wird.

Fakt 3. $W(\Phi) = W_K$ und insbesondere hängt $W := W_K$ nicht von K ab.

Beweis. Zu zeigen ist $\sigma_\alpha \in W_K$ für $\alpha \in \Phi$. Für beliebige Spiegelungen σ_α und beliebige orthogonale Abbildungen w gilt

$$\sigma_\alpha = w^{-1}\sigma_{w(\alpha)}w \ .$$

Für jedes $\alpha \in \Phi$ ist $H(\alpha)$ die Wand einer Kammer K'. Verbindet man K' mit K durch eine Hilfsgerade wie bei Fakt 2, passiert diese eine Kette von Kammern. Durch Induktion nach der Zahl der Zwischenkammern gibt es ein $w \in W_K$ mit $w(K') = K$. Dann gilt $w(H(\alpha)) = H(\alpha_\nu)$ für ein $\alpha_\nu \in \Delta$. [Betrachte zuerst den Fall einer Nachbarkammer K' von K]. Aus $w, \sigma_{\alpha_\nu} \in W_K$ folgt dann $\sigma_\alpha = w^{-1}\sigma_{\alpha_\nu}w \in W_K$.

Fakt 4. *Die Basen Δ (zu trennenden Hyperebenen von Φ) entsprechen genau den Weylkammern K des abstrakten Wurzelsystems via*

$$\Delta \quad \mapsto \quad K = \bigcap_{\alpha\in\Delta} \{v \in E_{\mathbb{R}} \mid (\alpha, v) > 0\} \ .$$

Beweis. 1) Indem man gegebenenfalls α_i durch $-\alpha_i$ ersetzt, ist mit obigen Bezeichnungen die Weylkammer K durch folgende Gleichungen definiert

$$v \in K \Longleftrightarrow (\alpha_i, v) > 0 \quad \forall\, \alpha_i \in \Delta \ .$$

2) Die zu einem Punkt $0 \neq \xi \in E_{\mathbb{R}}$ definierte orthogonale Hyperebene H trennt Φ in Φ^+ und Φ^- genau dann, wenn ξ nicht auf einer der Wände $H(\alpha), \alpha \in \Phi$ liegt oder mit anderen Worten, wenn ξ in einer der Weylkammern $K \subset E$ liegt. Für $\xi \in K$ und beliebiges $\alpha \in \Phi$ gilt $(\alpha, K) > 0 \Longleftrightarrow (\alpha, \xi) > 0 \Longleftrightarrow \alpha \in \Phi^+$. Das heisst, K ist der Durchschnitt aller $\{v \in E \mid (\alpha, v) > 0\}$ für $\alpha \in \Phi^+$.

3) Wegen Folgerung 1 (im Abschnitt Wurzelsysteme) sind alle $\alpha \in \Phi^+$ nichtnegative Kombinationen der $\alpha \in \Delta \subset \Phi^+$. Daher ist K der Durchschnitt aller $\{v \in E \mid (\alpha, v) > 0\}$ für $\alpha \in \Delta$; und keine dieser Gleichungen kann mehr weggelassen werden! Somit definieren die $\alpha \in \Delta$ genau die Wände der Weylkammer K.

Dies zeigt nun, daß man ein Wurzelsystem (E, Φ) vollständig aus der Kenntnis einer Basis $\Delta \subset \Phi$ rekonstruieren kann:

Folgerung. *Ist $\Delta \subset \Phi$ Basis eines abstrakten Wurzelsystems (E, Φ), dann ist die Weylgruppe $W(\Phi)$ die von den Spiegelungen $\sigma_\alpha, \alpha \in \Delta$ erzeugte Gruppe W und es gilt $\Phi = \bigcup_{w\in W} w(\Delta)$ als Teilmenge von E.*

Im Fall $dim(E) = 2$ der Coxetergraphen $A_1 \times A_1$, A_2, $B_2 = C_2$ und G_2 (und $n_{\alpha_1\alpha_2} = 0, 1, 2, 3$ respektive) liefert das aus $\Delta = \{\alpha_1, \alpha_2\} = \{\bullet, \bullet\}$ dann durch Spiegelungen die folgenden Wurzelsysteme

$$\begin{array}{ccc} & \bullet & \\ \ast & \circ & \bullet \\ & \ast & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & \bullet \ \ast & \\ \ast & \circ & \bullet \\ & \ast \ \ast & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \bullet & \ast & \ast \\ \ast & \circ & \bullet \\ \ast & \ast & \ast \end{array} \qquad \begin{array}{c} \ast \\ \bullet \ \ast \ \ast \ \ast \\ \ast \ \circ \ \bullet \\ \ast \ \ast \ \ast \ \ast \\ \ast \end{array}$$

Bestimmung von Δ durch das Dynkin Diagram

Der Coxeter Graph D bestimmt $\frac{4(\alpha,\beta)^2}{(\alpha,\alpha)(\beta,\beta)} = n_{\alpha\beta} n_{\beta\alpha}$ in $\{0, 1, 2, 3\}$ für $\alpha, \beta \in \Delta$. Aus $n_{\alpha\beta}/n_{\beta\alpha} = (\beta, \beta)/(\alpha, \alpha)$ und $n_{\alpha\beta}, n_{\beta\alpha} \in \mathbb{Z}$ folgt aus $n_{\alpha\beta} n_{\beta\alpha} = 1$ daher $n_{\alpha\beta} = n_{\beta\alpha} = \pm 1$ und $(\alpha, \alpha) = (\beta, \beta)$. Ist (E, Φ) irreduzibel (D zsh.), sind Δ und Φ bis auf Homothetie festgelegt, wenn man die Kante mit $n_{\alpha\beta} n_{\beta\alpha} > 1$, wenn sie auftritt, mit der Richtung von der langen Wurzel α zu der kurzen Wurzel β versieht (**Dynkin Diagram**). Es gilt dann $(\beta, \beta)/(\alpha, \alpha) \in \{2, 3\}$.

Bemerkung. Zwei Wurzelsystem (E, Φ) und (E, Φ') heissen *isomorph*, wenn Φ' aus Φ durch eine Drehstreckung des Euklidischen Raumes E hervorgeht. Die relevanten Grössen $n_{\alpha\beta}$ werden durch Drehstreckungen nicht verändert.

Bemerkung. Ein zusammenhängender Coxetergraph legt (E, Φ) bis auf Isomorphie eindeutig fest ausser im Fall des Coxeter Graphen BC_n. In diesem Fall legt das Dynkindiagram das Wurzelsystem (E, Φ) bis auf Isomorphie fest als Typ B_n (orthogonal) oder C_n (symplektisch).

Duales Wurzelsystem. Sei (E, Φ) ein Wurzelsystem mit primitiven Wurzeln $\alpha \in \Delta$. Dann definieren die Vektoren

$$\alpha^\vee := \frac{2\alpha}{(\alpha, \alpha)} \quad , \quad (\alpha \in \Delta)$$

die Basis $\Delta^\vee$ eines eindeutig bestimmten Wurzelsystems $(E, \Phi^\vee)$. Dies definiert das zu (E, Φ) duale Wurzelsystem $(E, \Phi^\vee)$. Ist das Dynkin Diagram zusammenhängend, so ist $(E, \Phi^\vee)$ isomorph zu (E, Φ) ausser wenn (E, Φ) vom Typ B_n oder C_n ist. In diesem Fall werden die Typen B_n und C_n durch die so definierte Dualität jeweils vertauscht.

Bestimmung der Liealgebra L durch Φ

Für einfaches L ist das zugeordnete Wurzelsystem (E, Φ) irreduzibel, denn im Fall $(E, \Phi) = (E_1, \Phi_1) \times (E_2, \Phi_2)$ wäre $I = (H \cap E_1) \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi_1} L_\alpha$ ein Ideal in L verschieden von 0 und L.

Für halbeinfache Liealgebren L_1, L_2 mit max. torischen Unterliealgebren H_1 resp. H_2 ist $H = H_1 \oplus H_2$ max. torisch in $L = L_1 \oplus L_2$ und das zugehörige Wurzelsystem (E, Φ) von (L, H) ist isomorph zum cartesischen Produkt $(E_1, \Phi_1) \times (E_2, \Phi_2)$ der Wurzelsysteme (E_i, Φ_i) der (L_i, H_i).

Die F-Vektoräume $T^\pm = \bigoplus_{\alpha \in \Phi^\pm} L_\alpha$ sind offensichtlich Lieunteralgebren von L und es gilt $L = T^- \oplus H \oplus T^+$. Ist (V, ϕ) eine Darstellung von L, dann ist ein F-Untervektorraum $U \subseteq V$ ein L-Untermodul, wenn er stabil unter $\phi(T^+), \phi(H), \phi(T^+)$ ist. Zum Beweis des nächsten Theorems benutzen wir das folgende

Lemma. *Ein Untervektorraum U einer Darstellung (V, ϕ) von L ist stabil unter $\phi(T^\pm)$, falls er stabil ist unter allen $\phi(X_{\pm\alpha})$, $\alpha \in \Delta$.*

Beweis. Jedes $\alpha \in \Phi^+$ schreibt sich in der Form $\alpha = \beta_1 + ... + \beta_n$ für gewisse einfache positive Wurzeln $\beta_i \in \Delta$. Es gilt $L_\alpha = [L_{\beta_1}, [L_{\beta_2}, ...]]]$ wegen der Irreduzibilitätsaussage auf Seite 25. Somit schreibt sich $\phi(X_\alpha)$ als eine nichtkommutativer polynomialer Ausdruck in den $\phi(\beta_i)$ wegen $\phi([X, Y]) = \phi(X)\phi(Y) - \phi(Y)\phi(X)$. Daher folgt $\phi(X_\alpha)(U) \subseteq U$ aus $\phi(X_\beta)(U) \subseteq U$ für $\beta \in \Delta$. Ditto für Φ^-. $\square$

Theorem. *Eine halbeinfache Liealgebra L ist durch das Dynkin Diagram einer maximal torischen Unterliealgebra H bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.*

Beweis. ObdA ist L einfach. Für gegebene $(L_1, H_1, \Delta_1), (L_2, H_2, \Delta_2)$ zu einfachen Liealgebren L_1, L_2 mit demselben Wurzelsystem (E, Φ) mit Basis Δ wollen wir zeigen $L_1 \cong L_2$ (als Liealgebra). Wir identifizieren dazu Δ_1 und Δ_2 mit Δ und H_1 und H_2 mit $H = \bigoplus_{\alpha\in\Delta} F \cdot H_\alpha$. Wir wählen $\alpha \in \Phi^+$ mit $\alpha + \alpha_i \notin \Phi$ für alle $\alpha_i \in \Delta$. Sei L die von den $X_\alpha = (X_{1\alpha}, X_{2\alpha})$ und $Y_{-\alpha} = (Y_{1,-\alpha}, Y_{2,-\alpha})$ für $\alpha \in \Delta$ erzeugte Lieunteralgebra von $L = L_1 \oplus L_2$. Da L_1 und L_2 einfach sind und die L sich surjektiv auf L_1 resp. L_2 unter der Projektion auf die Summanden L_i abbildet, ist entweder L der Graph eines Isomorphismus $L_1 \cong L \cong L_2$ oder es gilt $L = L_1 \oplus L_2$. Letzeres kann man ausschliessen, denn L stabilisiert einen nichttrivialen echten Untermodul I des L-Moduls $L_1 \oplus L_2$, welcher verschieden ist von $L_1 \oplus 0$ und $0 \oplus L_2$. [Wähle dazu $\alpha_0 \in \Phi^+$ mit $\alpha_0 + \alpha \notin \Phi^+$ für alle $\alpha \in \Delta$. Der von $v = (X_{1\alpha_0}, X_{2\alpha_0})$ erzeugte L-Untermodul $V \subseteq L_1 \oplus L_2$ enthält nämlich modulo $F \cdot v$ nur Summen von Elementen in $L_{1\beta_1} \oplus L_{2\beta_2}$ mit β_1, β_2 von kleinerem Gewicht als α_0 im Sinne von Seite 37, und ist daher von $L_1 \oplus L_2, L_1 \oplus 0, 0 \oplus L_2, 0$ verschieden. Benutze $V = \bigcup_{i=0}^{\infty} V_i$ für $V_0 = F \cdot v$ und $V_i := V_{i-1} + \sum_{\alpha\in\Delta} ad(Y_{-\alpha})(V_{i-1})$. Der so definierte Vektorraum V ist offensichtlich stabil unter H und den $Y_{-\alpha}, \alpha \in \Delta$. Er ist aber auch stabil unter den $X_\alpha, \alpha \in \Delta$. Beachte dazu $[X_\alpha, Y_{-\alpha}] \in H$ und $[X_\alpha, Y_{-\beta}] = 0$ für $\alpha \neq \beta$ in Δ.] $\square$

Bemerkung. Wir zeigen später mit Hilfe der Theorie der Darstellungen einer halbeinfachen Liealgebra L, dass das Dynkin Diagram von L aus der Menge der Isomorphieklassen irreduzibler endlich dimensionaler Darstellungen von L rekonstruiert werden kann, und damit nicht von der Wahl der maximal torischen Lieunteralgebra H und nicht von der Wahl der Basis Δ abhängt.

Bemerkung. Jedes Dynkin Diagramm D ist das Diagramm einer halbeinfachen Liealgebra (obdA D zusammenhängend). Die Serien A_n, B_n, C_n, D_n können den Liealgebren der linearen, orthogonalen und symplektischen Gruppen zugeordnet werden. Liealgebren zu den Dynkin Diagrammen G_2 und F_4 und E_8 werden wir explizit konstruieren. Die Liealgebren zu E_7, E_6 findet man dann als Lieunteralgebren der zu E_8 gehörigen Liealgebra.

Darstellungen halbeinfacher Liealgebren

Das Gewichtegitter

Sei (E, Φ) ein (abstraktes) Wurzelsystem und $\Delta \subset \Phi$ eine Basis von primitiven Wurzeln. Die Vektoren $x \in E$, die

$$\frac{2(x,\alpha)}{(\alpha,\alpha)} \in \mathbb{Z} \quad , \quad \forall\, \alpha \in \Phi$$

erfüllen, definieren das sogenannte *Gewichtegitter* $\Gamma(\Phi)$ in E. Im Gewichtegitter ist das *Wurzelgitter* $\mathbb{Z}[\Phi] = \sum_{\alpha\in\Phi} \mathbb{Z}\cdot\alpha = \bigoplus_{\alpha\in\Delta} \mathbb{Z}\cdot\alpha$ enthalten

$$\mathbb{Z}[\Phi] \subseteq \Gamma(\Phi) .$$

Der Quotient $\pi_1(\Phi) = \Gamma(\Phi)/\mathbb{Z}[\Phi]$ beider Gitter ist eine endliche abelsche Gruppe, die sogenannte *Fundamentalgruppe* des Wurzelsystems Φ.

Fundamentalgewichte. Sei $\Delta = \{\alpha_1, ..., \alpha_r\}$ und $\tilde\alpha_i, i = 1, ..., r$ eine Dualbasis in E der F-Basiselemente $\frac{2\alpha_j}{(\alpha_j,\alpha_j)}, j = 1, .., r$ von E. Die so definierten $\tilde\alpha_i$ nennt man die

$$\boxed{\textit{Fundamentalgewichte } \tilde\alpha_i \ \text{(bezüglich } \Delta)} .$$

Für je zwei Fundamentalgewichte $\tilde\alpha, \tilde\alpha'$ gilt

$$\boxed{(\tilde\alpha, \tilde\alpha') \geq 0}$$

[eine unmittelbare Konsequenz der 2-dimensionalen Euklidischen Geometrie wegen $(\alpha, \alpha') \leq 0$ für einfache $\alpha \neq \alpha'$ in Δ].

Der Abschluss $\overline{K}$ der positiven Weylkammer K gebildet zu Δ ist gegeben durch

$$x \in \overline{K} \quad \Longleftrightarrow \quad x \in \sum_{i=1}^{r} \mathbb{R}_{\geq 0} \cdot \tilde\alpha_i .$$

Per Definition liegen die Fundamentalgewichte $\tilde\alpha_i$ im Gewichtegitter $\Gamma(\Phi)$ und sie haben die Eigenschaft

$$\sigma_{\alpha_j}(\tilde\alpha_i) = \tilde\alpha_i - \delta_{ij}\alpha_j \quad , \quad \alpha_j \in \Delta .$$

Insbesondere operiert daher die Weylgruppe W auf dem Gewichtegitter, und jedes Element x im Gewichtegitter besitzt ein unter W konjugiertes Element $wx, w \in W$, welches *dominant* ist, also in $\Gamma(\Phi) \cap \overline{K}$ liegt.

Lemma. *Die Fundamentalgewichte* $\tilde\alpha_i, i = 1, .., r$ *definieren eine* $\mathbb{Z}$*-Basis des Gewichtegitters* $\Gamma(\Phi)$. *Ein Gewicht ist dominant genau dann wenn es sich als eine nichtnegativ ganzzahlige Linearkombination der Fundamentalgewichte schreiben lässt.*

Beweis. Für $x \in \Gamma(\Phi)$ ist $y = \sum_{i=1}^r \frac{2(x,\alpha_i)}{(\alpha_i,\alpha_i)}\tilde\alpha_i$ eine $\mathbb{Z}$-Linearkombination der $\tilde\alpha_i$. Für alle α_i gilt $(x - y, \alpha_i) = 0$ und damit $x = y$. $\square$

Gewichte einer Darstellung

Proposition. *Sei F algebraisch abgeschlossen mit $char(F) = 0$. Für jede endlich dimensionale Darstellung (V, ϕ) einer halbeinfachen Liealgebra L über F und jedes ad-halbeinfache Element $h \in L$ ist $\phi(h)$ ein halbeinfacher Endomorphismus von V.*

Beweis. Jedes solche h liegt in einer maximalen torischen Algebra H von L. Da F-Linearkombinationen kommutierender halbeinfacher Elemente halbeinfach sind, genügt es die Aussage für die Basiselemente $\phi_\alpha(h) = H_\alpha$, $\alpha \in \Delta$ von H zu beweisen. Diese liegen im Bild von $\phi_\alpha : sl(2, F) \to L$. Aber $\phi \circ \phi_\alpha(h)$ operiert auf V, wie wir gezeigt haben, halbeinfach. $\square$

Für eine endlich dimensionale Darstellung (V, ϕ) einer halbeinfachen Liealgebra L über einem algebraisch abgeschlossenen Körper F der Charakteristik Null sind die Elemente in H (H maximal torisch in L) daher diagonalisierbar auf V. Somit zerfällt V in H-Eigenräume

$$\boxed{V \ = \ \bigoplus_\chi \ V_\chi}$$

für gewisse Linearformen $\chi : H \to F$, die man die *Gewichte* von V nennt. Hierbei sei $V_\chi = \{v \in V \mid \phi(H)(v) = \chi(H) \cdot v\}$

Fakt. *Die Gewichte χ der endlich dimensionalen Darstellungen (V, ϕ) einer halbeinfachen Liealgebra liegen im Gewichtegitter $\Gamma(\Phi)$.*

Beweis. Für $\alpha \in \Phi$ definiert $\phi \circ \phi_\alpha : \ sl(2, F) \to gl(V)$ eine Darstellung von $sl(2, F)$. Die Eigenwerte von $h \in sl(2, F)$ unter dieser Darstellung $\phi \circ \phi_\alpha$ sind die Zahlen $\chi(H_\alpha^\vee)$. Da die Eigenwerte von $h \in sl(2, F)$ immer ganzzahlig sind, folgt $\frac{2(\chi,\alpha)}{(\alpha,\alpha)} \in \mathbb{Z}$ für alle $\alpha \in \Phi$. $\square$

Offensichtlich gilt für $\alpha \in \Phi$

$$\boxed{\phi(L_\alpha)(V_\chi) \ \subseteq \ V_{\chi+\alpha}} \, .$$

Da V nur endlich viele Gewichte besitzt, existiert daher ein H-Eigenvektor von $v \in V$ mit der Eigenschaft $Yv = 0$ für alle $Y \in L_\alpha, \alpha \in \Phi^-$ (bezüglich der gewählten Basis Δ von Φ); analog existiert ein Gewicht χ von (V, ϕ) und ein Eigenvektor $0 \neq w \in V_\chi$ (*Höchstgewichtsvektor*) von H mit

$$\boxed{\phi(X)w = 0 \quad \text{für alle} \quad X \in \bigoplus_{\alpha \in \Phi^+} \ L_\alpha} \, .$$

Man nennt χ in diesem Fall ein *Höchstgewicht* der Darstellung (V, ϕ). Wir bemerken: $\phi(X_\alpha)(w) = 0$ für $\alpha \in \Delta \Longrightarrow \phi(X_\alpha)(w) = 0$ für $\alpha \in \Phi^+$.

Lemma. *Höchstgewichte χ sind dominant.*

Beweis. Es gilt $\phi_\alpha(x)w = 0$ für alle $\alpha \in \Delta$. Also $\chi(H_\alpha) \geq 0$ wegen der Klassifikation der $sl(2, F)$-Darstellungen. Aus $(\chi, \alpha) = \chi(H_\alpha) \geq 0$ für alle $\alpha \in \Delta$ folgt die Dominanz von χ. $\square$

Höchstgewichte

Sei L, H und $\Delta = \{\alpha_1, ..., \alpha_r\}$ fixiert und (V, ϕ) eine Darstellung von L und $0 \neq v \in V$ ein Höchsgewichtsvektor, d.h. ein H-Eigenvektor (zum Eigenwert χ) mit $\phi(X)v = 0$ für alle $X \in L_\alpha, \alpha \in \Phi^+$.

Kanonische Filtration. Setze $V_0 = F \cdot v$ und dann rekursiv

$$V_i = V_{i-1} + \sum_{\alpha \in \Delta} \phi(Y_{-\alpha})(V_{i-1}) \ .$$

Dann ist $V_\infty = \bigcup_{i=0}^\infty V_i$ ein L-*Untermodul* von V.

Beweis. V_∞ ist per Definition unter den Operatoren $\phi(Y_{-\alpha}), \alpha \in \Delta$ stabil. Jeder der Räume V_i ist invariant unter $\phi(X)$ für $X \in H$. In der Tat zerfällt V_i/V_{i-1} in H-Eigenräume, deren Eigenwerte von der Gestalt sind:

$$\chi - \sum_{j=1}^r n_j \alpha_j \quad , \quad \sum_{j=1}^r n_j = i \qquad (n_j \in \mathbb{N}_{\geq 0}) \ .$$

Es gilt $\phi(X_\alpha)\phi(Y_{-\beta}) - \phi(Y_{-\beta})\phi(X_\alpha) = \phi(H_\alpha)$ für $\alpha = \beta \in \Delta$ und $\phi(X_\alpha)\phi(Y_{-\beta}) - \phi(Y_{-\beta})\phi(X_\alpha) = \phi([X_\alpha, Y_{-\beta}]) = 0$ für $\alpha, \beta \in \Delta$ und $\alpha \neq \beta$ [denn $\alpha - \beta \notin \Phi^+ \cup \Phi^-$ für $\alpha, \beta \in \Delta$]. V_∞ ist invariant unter $\phi(L)$, wenn es stabil ist unter $\phi(Y_{-\beta}), \beta \in \Delta$ und $\Phi(X), X \in H$ sowie $\phi(X_\alpha), \alpha \in \Delta$ (benutze das Lemma auf Seite 32). Für letzteres zeigt man

$$\phi(X_\alpha)V_n \subseteq V_n \qquad \forall \ n$$

mittels Induktion nach n. [Aus $\phi(X_\alpha)V_{n-1}) \subseteq V_{n-1})$ folgt $\phi(X_\alpha)(V_n) = \phi(X_\alpha)(V_{n-1}) + \sum_{\beta \in \Delta} \phi(X_\alpha)\phi(Y_{-\beta})(V_{n-1})$. Dies ist enthalten in $V_{n-1} + \phi(H_\alpha)(V_{n-1}) + (\sum_{\beta \neq \alpha} \phi(Y_{-\beta})\phi(X_\alpha)(V_{n-1})$ und somit in V_n nach der Induktionsannahme.] $\square$

Folgerung. *Ist (V, ϕ) eine (nicht notwendig endlich dimensionale) Darstellung von L mit Höchstgewichtsvektor v zum Eigenwert χ. Wird (V, ϕ) von v als $U(L)$-Modul erzeugt, dann zerfällt V in H-Eigenräume. Der H-Eigenwert χ hat Multiplizität 1 und alle Eigenwerte von H liegen in der Menge*

$$\chi - \sum_{i=1}^r \mathbb{N}_{\geq 0} \cdot \alpha_i \ .$$

Weiterhin folgert man

Lemma. *In einer irreduziblen endlich dimensionalen Darstellung (V, ϕ) einer halbeinfachen Liealgebra L über einer alg. abgeschlossenen Körper F der Charakteristik Null gibt es bis auf skalare Vielfache einen eindeutig bestimmten Höchstgewichtvektor. Das zugehörige Höchstgewicht*

$$\boxed{\chi \in \Gamma(\Phi) \cap \overline{K}}$$

der irreduziblen Darstellung (V, ϕ) ist eindeutig bestimmt.

Die Verma Moduln

Die Moduln $V(\chi)$. Sei L eine halbeinfache Liealgebra über F (alg. abg. mit Charakteristik Null). Sei H eine maximal torische Lieunteralgebra von L. Wir wählen eine Basis Δ in Φ. Die positiven Wurzeln in Φ^+ definieren $T = T^+ = \bigoplus_{\alpha\in\Phi^+} L_\alpha$ in L. Die Liealgebra T^+ erzeugt zusammen mit H eine Liealgebra $B = B^+$. Analog definiert man T^- und B^- mit Hilfe der $L_\alpha, \alpha \in \Phi^-$. Es gilt

$$L \;=\; T^- \oplus B = T^- \oplus H \oplus T^+ \quad \text{(als Vektorräume)} \ .$$

Für eine F-Linearform $\chi : H \to F$ definiert man den Quotient $V(\chi)$ von $U(L)$ nach dem von den $X - \chi(X), X \in H$ und T^+ erzeugten Linksideal

$$\boxed{V(\chi) \;=\; U(L)/\langle X - \chi(X), T^+\rangle_{X\in H}} \ .$$

Diesen $U(L)$-Linksmodul $V(\chi)$, aufgefasst als Darstellung von L, nennt man den *Verma-Modul* zum Eigenwert χ. Wir bemerken an dieser Stelle, dass $V(\chi)$ für $L \neq 0$ eine *unendlich dimensionale* Darstellung von L ist. Aus dem Isomorphiesatz folgt die

Universelle Eigenschaft. *Ist (V,ϕ) eine (nicht notwendig endlich dimensionale) Darstellung von L und $v \neq 0$ ein Höchstgewichtsvektor von V zum Höchstgewicht χ, dann existiert eine L-lineare Abbildung*

$$f : V(\chi) \to (V,\phi) \ ,$$

welche die Nebenklasse von 1 auf v abbildet.

Die Abbildung f ist wegen $f(1) = v$ nicht trivial. Ist (V,ϕ) *irreduzibel*, dann ist also f eine surjektive L-lineare Abbildung und es gilt

$$(V,\phi) \;\cong\; V(\chi)/Kern(f) \ .$$

Aus dem nächsten Lemma folgt dann weiterhin, dass der L-Untermodul $Kern(f)$ keinen H-Eigenraum zum Eigenwert χ besitzt. Also $Kern(f) \subseteq U(\chi)$, wenn $U(\chi)$ den maximalen L-Untermodul von $V(\chi)$ bezeichnet ohne H-Eigenraum zum Eigenwert χ. Damit folgt aus dem nächsten Lemma

Proposition. *Sei (V,ϕ) eine irreduzible (nicht notwendig endlich dimensionale) Darstellung von L mit einem H-Eigenvektor $v \neq 0$ zum Eigenwert χ und der Eigenschaft $\phi(X)v = 0$ für alle $X \in T^+$. Dann gilt*

$$\boxed{(V,\phi) \;\cong\; W(\chi) \quad , \quad W(\chi) := V(\chi)/U(\chi)}$$

und (V,ϕ) ist damit bis auf Isomorphie eindeutig durch χ bestimmt.

Lemma. *Für beliebiges $\chi \in Hom_F(H,F)$ zerfällt $V(\chi)$ in eine direkte Summe von endlich dimensionalen Eigenräumen von H zu Eigenwerten in $\chi - \sum_{i=1}^r \mathbb{N}_{\geq 0}\cdot\alpha_i$ und der Eigenraum zum Eigenwert χ ist eindimensional und erzeugt von der Nebenklasse von 1. Der Quotient $W(\chi) = V(\chi)/U(\chi)$ ist eine irreduzible Darstellung von L mit Höchstgewicht χ.*

Beweis. Offensichtlich wird $V(\chi)$ als $U(L)$-Modul von 1, also von seinem χ-Eigenraum erzeugt. Die erste Aussage folgt daher aus der Folgerung des Abschnitts 'Höchstgewichte'. Diese Aussage impliziert, dass jeder echte $U(L)$-Untermodul von $V(\chi)$ in $U(\chi)$ enthalten sein muss. Daher ist der $U(L)$-Quotientenmodul $W(\chi)$ irreduzibel. □

Zum Abschluss zeigen wir: Die irreduzible Darstellung $W(\chi)$ von L zum Eigenwert χ ist endlich dimensional genau dann wenn $\chi \in \Gamma(\Phi) \cap \overline{K}$.

Theorem. *Die Menge $I(L)$ der Isomorphieklassen irreduzibler endlich dimensionaler Darstellungen von L kann (nach Wahl von H und Δ) mit dem Monoid der dominanten Gewichte identifiziert werden*

$$\boxed{I(L) \;\cong\; \Gamma(\Phi) \cap \overline{K}}\,.$$

Hierbei wird einer irreduziblen endlich dimensionalen Darstellung (V, ϕ) von L das Höchstgewicht von (V, ϕ) bezüglich (H, Δ) zugeordnet.

Beweis. Für $\chi \in \Gamma(\Phi) \cap \overline{K}$ sei v der Höchstgewichtsvektor zum Eigenwert χ des $U(L)$-Moduls $(V, \phi) = V(\chi)$. Dann gilt

$$(**) \qquad \phi(X_{-\alpha})^m v \;\in\; U(\chi) \quad , \quad \forall\, m > n = (\chi, \alpha)\ .$$

Dazu genügt

$$(*) \qquad \phi(X_\alpha)\phi(X_{-\alpha})^{n+1} v = 0\ ,$$

denn $w = \phi(X_{-\alpha})^{n+1} v$ ist dann ein Höchstgewichtsvektor in $V(\chi)$ und wegen $w \notin F \cdot v$ enthalten im Ideal $U(\chi) \subset V(\chi)$. [Wegen $[X_\beta, X_{-\alpha}] = 0$ für $\beta, \alpha \in \Delta$ und $\beta \neq \alpha$ gilt nämlich $\phi(X_\beta)w = \phi(X_{-\alpha})^{n+1}\phi(X_\beta)v = 0$. Weiterhin liegt w im H-Eigenraum zum Eigenwert $\chi - (n+1)\alpha$.] Für (*) ersetze (V, ϕ) durch die Darstellung $(V, \phi \circ \phi_\alpha)$ von $sl(2, F)$. Wegen $\phi \circ \phi_\alpha(h)v = (\chi, \alpha) \cdot v$ und $\chi \in \Gamma(\Phi) \cap \overline{K}$ ist $n = (\chi, \alpha) \in \mathbb{Z} \cap \mathbb{R}_{\geq 0}$. Weiterhin kann $(V, \phi \circ \phi_\alpha)$ wegen der universellen Eigenschaft durch den Modul $V(n)$ (für $sl(2, F)$) ersetzt werden. Die irreduzible Darstellung $W(n)$ von $sl(2, F)$ ist ein Quotient von $V(n)$ (hier wird erneut die universelle Eigenschaft von $V(n)$ benutzt). Daraus folgt $y^{n+1}v \in U(n)$ und damit (*): $xy^{n+1}v = 0$, denn sonst wäre $U(n) = V(n)$.

Fixiere $\alpha \in \Delta$. Der Untervektorraum einer Darstellung von L aller Vektoren, die nach Einschränkung auf $\phi_\alpha(sl(2, F))$ in einer endlich dimensionalen Darstellung von $\phi_\alpha(sl(2, F))$ liegen, ist L-invariant. Da $W(\chi)$ irreduzibel als L-Modul ist und die Einschränkung von $W(\chi)$ auf $\phi_\alpha(sl(2, F))$ wegen (**) die endlich dimensionale Darstellung $W(n), n = (\chi, \alpha)$ von $\phi_\alpha(sl(2, F))$ enthält, zerfällt $W(\chi)$ nach Einschränken auf $\phi_\alpha(sl(2, F))$ in einer direkte Summe endlich dimensionaler Darstellungen. Also sind $x_t w = exp(t\phi(X_\alpha))w$ und $y_t w = exp(\frac{2}{(\alpha,\alpha)} t\phi(Y_{-\alpha}))w$ erklärt für alle Vektoren w in $W(\chi)$ [denn X_α und $Y_{-\alpha}$ operieren nilpotent auf jeder endlich dimensionalen Darstellung von $\phi_\alpha(sl(2,F))$]. Dies definiert Automorphismen $s_\alpha : W(\chi) \to W(\chi)$ vermöge

$$s_\alpha = x_1 y_1 x_1 \ .$$

Es gilt $H = F \cdot H_\alpha \oplus H_\alpha^\perp$. Nach Definition vertauscht s_α mit allen $\phi(X)$, $X \in H_\alpha^\perp$. Wir behaupten

$$s_\alpha^{-1}\phi(X)s_\alpha = \phi(\sigma_\alpha(X)) \quad , \quad X \in H \ .$$

Dazu genügt $s_\alpha^{-1}\phi(H_\alpha)s_\alpha = \phi(-H_\alpha)$ für die endlich dimensionalen Darstellungen $W(n) = Sym^n(W(1))$ der Gruppe $sl(2,F)$. Konjugation von $h \in s(2,F)$ mit

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

liefert die Matrix $-h \in sl(2,F)$. Es folgt $s_\alpha(W(\chi)_\mu) = W(\chi)_{\sigma_\alpha(\mu)}$.

Folgerung. *Ist $\chi \in \Gamma(\Phi) \cap \overline{K}$ und μ ein H-Eigenwert von$W(\chi)$, w ein Element der Weylgruppe W und $\mu' = w(\mu)$. Dann gilt für die H-Eigenräume*

$$\boxed{W(\chi)_{\mu'} \cong W(\chi)_\mu \quad , \quad \mu' = w(\mu)} \ .$$

Wegen $\chi \in \Gamma(\Phi) \cap \overline{K}$ sind alle H-Eigenwerte in $\chi - \sum_{\alpha\in\Delta} \mathbb{N}_{\geq 0}$ und damit in $\mathbb{Q}$. Jeder W-Orbit eines H-Eigenwerts μ enthält daher einen Punkt in $\overline{K}$. Der Durchschnitt von $\chi - \sum_{\alpha\in\Delta} \mathbb{N}_{\geq 0}$ und $\overline{K}$ ist endlich. Da W endlich ist, gibt es also nur endlich viele H-Eigenwerte auf $W(\chi)$. Die H-Eigenräume von $V(\chi)$, und damit auch die des Quotienten $W(\chi)$, sind endlich dimensional. Es folgt $\dim(W(\chi)) < \infty$ für $\chi \in \Gamma(\Phi) \cap \overline{K}$. $\square$

Der Casimir Operator

Sei L halbeinfach und $K(X,Y)$ die Killingform auf L. Sei $X_1, ..., X_n$ eine Basis von L und $Y_1, ..., Y_n$ eine Dualbasis bezüglich K. Dann ist in der universell Einhüllenden der Operator $\Omega = \sum_{i=1}^n X_i Y_i$ definiert, welcher auf Darstellungen (V,ϕ) von L wohldefiniert operiert vermöge

$$\phi(\Omega) = \sum_{i=1}^n \phi(X_i)\phi(Y_i) \ \in \ End_F(V) \ .$$

Ist $[X, X_i] = \sum_j a_{ij} X_j$, dann folgt $a_{ij} = (K([X,X_i],Y_j) = -K(X_i,[X,Y_j])$. Also $[X,Y_j] = \sum_i (-a_{ij})Y_i$. Für alle $X \in L$ gilt daher

$$\boxed{\phi(X)\phi(\Omega) = \phi(\Omega)\phi(X)} \ ,$$

denn $[\phi(X),\phi(\Omega)] = \sum_i \phi([X,X_i])\phi(Y_i) + \sum_j \phi(X_j)\phi([X,Y_j])$ ist Null:

$$\sum_{i,j} a_{ij}\phi(X_j)\phi(Y_i) + \sum_{j,i} \phi(X_j)(-a_{ij})\phi(Y_i) = 0 \ .$$

Ist (V,ϕ) *irreduzibel*, zeigt das Schursche Lemma

$$\boxed{\phi(\Omega) \ = \ c(V,\phi) \cdot id_V}$$

für eine Konstante $c(V,\phi)$ in F, welche nur von der Isomorphieklasse der Darstellung (V,ϕ) abhängt.

Für halbeinfaches L definieren die $H_\alpha, \alpha \in \Delta$ und $X_\alpha, Y_{-\alpha}$ für $\alpha \in \Phi^+$ eine Basis von L. Also $\Omega = \sum_{\alpha\in\Delta} H_\alpha \tilde{H}_\alpha + \sum_{\alpha\in\Phi^+} Y_{-\alpha}X_\alpha + \sum_{\alpha\in\Phi^+} X_\alpha Y_{-\alpha}$, und somit

$$\Omega = \sum_{\alpha\in\Delta} H_\alpha \tilde{H}_\alpha + \sum_{\alpha\in\Phi^+} H_\alpha + 2\sum_{\alpha\in\Phi^+} Y_{-\alpha}X_\alpha \ .$$

Hierbei bezeichne $\tilde{H}_\beta \in H, \beta \in \Delta$ eine Dualbasis der H_α, $\alpha \in \Delta$, d.h. $K(H_\alpha, \tilde{H}_\beta) = \delta_{\alpha\beta}$. Somit ist $\sum_{\alpha\in\Delta} \chi(H_\alpha)\chi(\tilde{H}_\alpha) = \sum_{\alpha\in\Delta}(\chi,\alpha)(\chi,\tilde{\alpha})$, und dies ist gleich (χ,χ) [denn $(\chi_1,\chi_2) = \sum_{\alpha\in\Delta}(\chi_1,\alpha)(\chi_2,\tilde{\alpha})$; es genügt dies für alle $\chi_1 = \alpha, \chi_2 = \tilde{\beta}$ mit $\alpha,\beta \in \Delta$ zu verifizieren]. Ist $v \in V_\chi$ ein Höchstgewichtsvektor von V, gilt $\phi(X_\alpha)v = 0$ für alle $\alpha \in \Phi^+$ und damit

$$\phi(\Omega)v = \sum_{\alpha\in\Delta} \phi(H_\alpha)\phi(\tilde{H}_\alpha)v + \sum_{\alpha\in\Phi^+} \phi(H_\alpha)v \ .$$

Lemma. *Ist (V,ϕ) irreduzibel und χ ein Höchstgewicht der Darstellung, dann operiert $\phi(\Omega)$ auf V mit dem Skalar $c(\chi) = c(V,\phi)$*

$$\boxed{c(\chi) \ = \ (\chi+\delta, \chi+\delta) - (\delta,\delta)} \ .$$

Hierbei ist $\delta := \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Phi^+} \alpha$ die halbe Summe der positiven Wurzeln.

Beweis. Für $v \in V_\chi$ mit $\phi(X_\alpha)v = 0$, $\alpha \in \Phi^+$ ist $\phi(\Omega)$ Multiplikation mit $(\chi,\chi) + \sum_{\alpha\in\Phi^+}(\chi,\alpha) = (\chi, \chi+2\delta)$.

Reduktivität der Darstellungskategorie $Rep_F(L)$

Theorem. *Jede endlich dimensionale Darstellung einer halbeinfachen Liealgebra L über einem algebraisch abgeschlossenen Körper F ist isomorph zu einer direkten Summe von irreduziblen Darstellungen.*

Beweis. Wie beim Beweis im Fall $L = sl(2,F)$ genügt es für irreduzible Darstellungen (V,ϕ) mit Höchstgewichtsvektor $w \in V_\chi$ zu zeigen:

$$\boxed{c(\chi) = 0 \iff \chi = 0 \iff \dim(V) = 1} \ .$$

Ist $\chi \neq 0$, gilt $c(\chi) = (\chi,\chi) + 2(\chi,\delta) > 2(\chi,\delta)$. Aus dem nächsten Lemma und der Dominanz von χ folgt $(\chi,\delta) \geq 0$ und damit dann $c(V,\phi) > 0$. $c(V,\phi) = 0$ impliziert also $\chi = 0$. Dann wird der Höchstgewichtvektor w von allen $X_\alpha, Y_{-\alpha} (\alpha \in \Phi^+)$ annuliert ($sl(2,F)$-Theorie) ebenso wie von allen Elementen aus $H \subseteq L$. Folglich ist $F \cdot w \subseteq V$ ein L-invarianter Unterraum. Aus der Irreduzibilität von V folgt daher $V = F \cdot w$. $\square$

Lemma 1. *Der Weylvektor $\delta := \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Phi^+} \alpha$ liegt in $\Gamma(\Phi) \cap K$ und es gilt*

$$\boxed{\delta = \sum_{\alpha\in\Delta} \tilde{\alpha}} \ .$$

Beweis. Wir zeigen: $x = \delta$ und $x' = \sum_{\alpha \in \Delta} \tilde{\alpha}$ erfüllen für $\alpha \in \Delta$ beide die Gleichungen

$$\sigma_\alpha(x) = x - \alpha \ .$$

Dies legt x eindeutig fest, denn für zwei Lösungen x', x ist die Differenz $x' - x$ orthogonal zu allen $\alpha \in \Delta$ und damit Null. Die Gleichung

$$\sigma_\alpha(\sum_{i=1}^r \tilde{\alpha}_i) = (\sum_{i=1}^r \tilde{\alpha}_i) - \alpha$$

folgt aus der Definition der fundamentalen Gewichte $\tilde{\alpha}$. Die entsprechende Aussage für δ ergibt sich aus

Lemma 2. *Ist $\alpha = \alpha_i \in \Delta$ eine einfache positive Wurzel, dann permutiert σ_α die positiven Wurzeln in $\Phi^+ \setminus \{\alpha\}$ und es gilt $\sigma_\alpha(\alpha) = -\alpha$.*

Beweis. Für $\beta \neq \alpha_i \in \Phi^+$ gilt $\sigma_{\alpha_i}(\beta) \in \Phi^+ \setminus \{\alpha_i\}$, denn anderenfalls wäre

$$\sigma_{\alpha_i}(\beta) = \beta - const. \cdot \alpha_i = (m_i - const.) \cdot \alpha_i + \sum_{i \neq j = 1}^r m_j \cdot \alpha_j$$

in Φ^- und damit $m_j \leq 0$ für $j \neq i$; andererseits gilt $m_j \geq 0$ wegen $\beta \in \Phi^+$. Dies impliziert $\beta = m_i \cdot \alpha_i$ für $m_i \in \mathbb{N}$ und wegen der Primitivität $\beta = \alpha_i$. □

Rekonstruktion des Wurzelsystems von L aus $Rep_F(L)$

Sei H maximal torisch in L, Δ eine Basis des zu (L, H) zugeordneten Wurzelsystems Φ und K die zu Δ gehörige Weylkammer.

Lemma 1. *Das Tensorprodukt $W_1 \otimes W_2$ zweier irreduzibler Darstellungen W_1 und W_2 mit Höchstgewichten χ_1 und χ_2 enthält die irreduzible Darstellung W zum Höchstgewicht $\chi = \chi_1 + \chi_2$ mit Multiplizität eins. Für jeden anderen irreduziblen Summand von $W_1 \otimes W_2$ mit Höchstgewicht μ gilt*

$$\boxed{(\mu, \mu) < (\chi, \chi) \ \textit{ resp. } \ c(\mu) < c(\chi)} \ .$$

Beweis. Die Gewichte des Tensorproduktes $W_1 \otimes_F W_2$ sind von der Form $\mu = \mu_1 + \mu_2$ für Gewichte μ_i von W_i, und liegen daher in $\chi_1 - \sum_{\alpha \in \Delta} \mathbb{N}_{\geq 0} \alpha + \chi_2 - \sum_{\alpha \in \Delta} \mathbb{N}_{\geq 0} \alpha = \chi - \sum_{\alpha \in \Delta} \mathbb{N}_{\geq 0} \alpha$ für $\chi = \chi_1 + \chi_2$, und χ ist ein Höchstgewicht mit Multiplizität eins. Jedes Höchstgewicht μ in $W_1 \otimes_F W_2$ ist dominant, liegt also in $\Gamma(\Phi) \cap \overline{K}$. Das nächste Lemma zeigt $(\mu, \mu) < (\chi, \chi)$ für $\mu \neq \chi$ [setze $x = \chi$ und $y = \mu$]. □

Lemma 2. *$x + y \in \overline{K}$ mit $z = x - y = \sum_{i=1}^r \mathbb{Q}_{\geq 0} \cdot \alpha_i$ für $\Delta = \{\alpha_1, ..., \alpha_r\}$ impliziert $(y, y) \leq (x, x)$. Ist ausserdem $x, y \in \overline{K}$, gilt Gleichheit nur im Fall $x = y$. Ditto für $c(x) = (x, x + 2\delta)$ anstelle von (x, x).*

Beweis. Aus $(x+y,z)\geq 0$ folgt $(y,y)=(x,x)-(x+y,z)\leq(x,x)$. Gilt $x,y\in\overline{K}$ und damit $(x,z)\geq 0$ und $(y,z)\geq 0$, folgt $(x,z)=(y,z)=0$ bei Gleichheit. Also $(z,z)=(x-y,z)=0$ und somit $z=0$. $\square$

Der Monoid $I(L)$. Sei $I(L)$ die Menge der Isomorphieklassen irreduzibler Darstellungen der Kategorie $Rep_F(L)$. Für eine endlich dimensionale Darstellung $W\cong\bigoplus_{i=1}^s W(\chi_i)$ von L mit irreduziblen Summanden $W(\chi_i)$ zum Höchstgewicht χ_i setzen wir $c(W):=\max_{i=1,..,s}c(\chi_i)$ und definieren

$$I(L)\ \times\ I(L)\xrightarrow{(.,.)}\mathbb{Q}$$

für irreduzible Darstellungen W_1 und W_2 von L durch

$$\boxed{2\cdot(W_1,W_2):=c(W_1\otimes W_2)-c(W_1)-c(W_2)}\,.$$

Ausserdem definieren wir

$$\boxed{I(L)\ \times\ I(L)\xrightarrow{\ *\ } I(L)}$$

so dass irreduziblen Darstellungen W_1 und W_2 (bis auf Isomorphie) der (bis auf Isomorphie) eindeutige irreduzible Summand $W=:W_1*W_2\subseteq W_1\otimes W_2$ zuordnet wird, für den gilt $c(W)=c(W_1\otimes W_2)$.

Lemma 3. *$(I(L),*)$ ist ein freier Monoid $I(L)=\bigoplus_{i=1}^r\mathbb{N}_{\geq 0}\cdot\tilde{\alpha}_i$ erzeugt von endlich vielen indekomposiblen Elementen $\tilde{\alpha}_1,..,\tilde{\alpha}_r$ und das Skalarprodukt $(.,.)$ auf $I(L)$ setzt sich zu einem positiv definiten $\mathbb{Q}$-bilinearen symmetrischen Skalarprodukt auf $E=\bigoplus_{i=1}^r\mathbb{Q}\cdot\tilde{\alpha}_i$ fort. Eine Dualbasis der $\tilde{\alpha}_i$ bezüglich dieses Skalarproduktes definiert ein Dynkindiagram. Ist H maximal torisch in L mit Wurzelsystem (E,Φ) und Δ eine Basis von Φ, dann ist das zugehörige Dynkin Diagram dual zu dem von $(I(L),*,(.,.))$ definierten Dynkin Diagram.*

Beweis. Wähle H und Δ, dann kann $I(L)$ mit $\Gamma(\Phi)\cap\overline{K}$ identifiziert werden. Sind $W_i=W(\chi_i)$ irreduzibel mit Höchstgewicht χ_i, ist W_1*W_2 die irreduzible Darstellung zum Höchstgewicht $\chi_1+\chi_2$. Somit ist $I(L)$ der freie abelsche Monoid erzeugt von den Fundamentalgewichten $\tilde{\alpha}_1,...,\tilde{\alpha}_r$. Weiterhin gilt dann $2(W_1,W_2):=c(\chi_1+\chi_2)-c(\chi_1)-c(\chi_2)=2(\chi_1,\chi_2)$ wegen $c(\chi)=(\chi,\chi)+(\chi,2\delta)$. $\square$

Folgerung. *Wurzelsystem (E,Φ) und Dynkindiagram einer halbeinfachen Liealgebra L hängen nicht von der Wahl einer maximal torischen Unteralgebra H von L und nicht von der Wahl einer Basis Δ ab. Das duale Wurzelsystem $(E,\Phi^\vee)$ lässt sich aus der Kategorie $Rep_F(L)$ mit Hilfe des Casimir Operators rekonstruieren vermöge der*

Identifikation der metrischen Monoide:

$$\boxed{\big(\Gamma(\Phi)\cap\overline{K},+,(.,.)\big)\ \cong\ \big(I(L),*,(.,.)\big)}\,.$$

Die H-Eigenräume von $V(\chi)$

Ist X_i eine Basis von L, dann wird $U(L)$ von nichtkommutativen Monomen in den X_i erzeugt. Auf Grund der Kommutator Relationen kann man (induktiv beginnend mit Termen höchsten Grades) die Monome umordnen und erreichen, dass die Monome angeordnet sind, d.h. von der Gestalt $X_1^{n_1}\cdots X_d^{n_d}$ für $d = \dim(L)$. Wählt man zuerst eine Basis $X_1,..,X_e$ in T^- und ergänzt diese durch eine Basis in B, ist klar, daß die Monome $X_1^{n_1}\cdots X_e^{n_e}$ ein Erzeugendensystem des Quotienten $V(\chi)$ von $U(L)$ bilden. Das heisst, die Zusammensetzung

$$\varphi : U(T^-) \twoheadrightarrow V(\chi)$$

der natürlichen Abbildungen $U(T^-) \to U(L)$ und $U(L) \to V(\chi)$ ist surjektiv. Wir behaupten

Lemma 1. *Die Abbildung*

$$\boxed{\varphi : U(T^-) \cong V(\chi)}$$

ist ein Isomorphismus.

Beweis. Es genügt zu zeigen $U(T^-) \cap \langle X - \chi(X), T^+\rangle_{X\in H} = 0$ in $U(L)$. Dazu kann man obdA zu dem graduierten Ring $Gr(U(L))$ übergehen. Wegen $Gr(\langle X - \chi(X), T^+\rangle_{X\in H}) = Gr(U(B^+))$ genügt es daher zu zeigen $Gr(U(T^-)) \cap Gr(U(B^+)) = 0$. Dies folgt aus $L = T^- \oplus B^+$. [Beachte $Gr(U(T^-)) = S^\bullet(T^-)$, $Gr(U(B^+)) = S^\bullet(B^+)$ und $Gr(U(L)) = S^\bullet(L)$. Dies reduziert die Aussage auf den Polynomring.] □

Wir identifizieren $V(\chi)$ als Vektorraum mit $U(T^-)$ vermöge des Isomorphismus φ (oder mit $U(B^-)/\langle X - \chi(X)\rangle_{X\in H}$). Dann operiert $h \in H$ für $u \in U(T^-)$ auf dem Bild von u im dem Quotienten $V(\chi)$ von $U(L)$ vermöge

$$hu = (hu - uh) + \chi(h)\cdot u\ .$$

Die Operation der halbeinfachen Elemente $h \in H \subset B^-$ auf dem Ideal T^- durch $D(u) := hu - uh = [h,u]$ lässt sich zu einer F-Derivation der F-Algebra $U(T^-)$ fortsetzen. Die so definierte Derivation D von $U(T^-)$ erhält die natürliche Filtration und induziert vermöge des Isomorphismus $Gr(U(T^-)) \cong S^\bullet(T^-)$ eine Derivation der symmetrischen Algebra $S^\bullet(T^-)$, welche auf T^- wieder durch $ad_L(h)|_{T^-} = [h,-]$ gegeben ist. Die so erhaltene F-Derivation von $S^\bullet(T^-)$ erhält wegen $S^1(T^-) = T^-$ die homogenen Schichten $S^i(T^-)$ von $S^\bullet(T^-)$. Da T^- in die H-Eigenräume $T^- = \bigoplus_{\alpha\in\Phi^+} L_{-\alpha}$ zerfällt, folgt

Lemma 2. *Als H-Modul kann man $V(\chi)$ mit der mit χ getwisteten symmetrischen Algebra identifizieren*

$$\boxed{V(\chi) \ = \ (F,\chi)\otimes_F S^\bullet\Big(\bigoplus\nolimits_{\alpha\in\Phi^+} L_{-\alpha}\Big)}\ .$$

Die Weylsche Charakterformel

Sei $F = \mathbb{C}$. Für $X \in H$ und $\chi \in Hom_F(H, F)$ setze $q^\chi = exp(\chi(H))$. Es gilt

$$q^{\chi+\chi'} = q^\chi \cdot q^{\chi'} \ .$$

Der *Charakter* einer endlich dimensionalen Darstellung (V, ϕ) von L sei

$$\boxed{ch(V, \phi) \ := \ \sum_\mu \dim_F(V_\mu) \cdot q^\mu}$$

Die Summe durchläuft dabei die Gewichte μ von (V, ϕ).

Wir betrachten 'Potenzreihen' in den Variablen q (konvergent für alle $X \in H$ mit $Re(X) \in K$), um dem unendlich dimensionalen Modul $V(\chi)$ einen Charakter zuzuordnen (Lemma 2, die H-Eigenräume von $V(\chi)$)

$$ch(V(\chi)) \ = \ q^\chi \cdot \prod_{\alpha\in\Phi^+} \sum_{i=0}^{\infty} q^{-i\alpha}$$

oder alternativ

$$ch(V(\chi)) \ = \ q^\chi \cdot \prod_{\alpha\in\Phi^+} \frac{1}{1 - q^{-\alpha}} \ = \ \frac{q^{\chi+\delta}}{\prod_{\alpha\in\Phi^+}(q^{\alpha/2} - q^{-\alpha/2})} \ .$$

Jeder L-Untermodul $V \subseteq V(\chi)$ enthält Höchstgewichtsvektoren [z.B. H-Eigenvektoren in V für Eigenwerte μ so dass (μ, δ) maximal ist.] und wird von diesen als $U(L)$-Untermodul erzeugt.

Fakt. *In $V(\chi)$ gibt es nur endlich viele verschiedene Untermoduln.*

Man kann sich auf die Bestimmung möglicher Höchstgewichte μ in $V(\chi)$ beschränken! Der Casimir Ω vertauscht mit $U(L)$. $V(\chi)$ wird vom χ-Höchstgewichtsvektor erzeugt. Daher operiert Ω auf $V(\chi)$ mit dem Skalar $c(\chi) = |\chi + \delta|^2 - |\delta|^2$. Auf jedem Untermodul $V \subseteq V(\chi)$, erzeugt von einem Höchtgewichtsvektor vom Gewicht μ, operiert Ω mit dem Skalar $c(\mu)$. Also $c(\mu) = c(\chi)$. Die Menge aller μ mit $\mu+\delta \in \chi+\delta-\sum_{\alpha\in\Delta} \mathbb{N}_{\geq 0}\cdot\alpha$ vom festen Radius $|\mu + \delta| = |\chi + \delta|$ ist endlich. Daraus folgt die Behauptung. $\square$

Folgerung. *Die Menge $\Sigma(\chi)$ aller $\mu \in \chi - \sum_{\alpha\in\Delta} \mathbb{N}_{\geq 0}$ mit $c(\mu) = c(\chi)$ ist endlich. Es gibt Zahlen $m(\mu) \in \mathbb{Z}$ mit $m(\chi) = 1$, so dass gilt $ch(W(\chi)) = \sum_{\mu\in\Sigma} m(\mu)ch(V(\mu))$, und damit (*)*

$$ch(W(\chi)) \ = \ \frac{\sum_{\mu\in\Sigma} m(\mu)q^{\mu+\delta}}{\prod_{\alpha\in\Phi^+}(q^{\alpha/2} - q^{-\alpha/2})} \ .$$

Beweis. Eine entsprechende Formel für $ch(U)$ (mit Koeffizienten $m(\mu) = m_U(\mu)$) gilt für alle Untermoduln U, und damit auch für alle Subquotienten der L-Moduln $V(\chi')$, $\chi' \in \Sigma(\chi)$. Benutze dazu Induktion nach $\#\Sigma(\chi')$ sowie $ch(U + V) = ch(U) + ch(V) - ch(U \cap V)$. Im Induktionsanfang

$\#\Sigma(\chi') = 1$ ist $V(\chi')$ irreduzibel, und die Behauptung folgt in diesem Fall aus $ch(V(\chi')) = q^{\chi'+\delta} / \prod_{\alpha \in \Phi^+}(q^{\alpha/2} - q^{-\alpha/2})$. $\square$

Sei nun $\chi \in \Gamma(\Phi) \cap \overline{K}$ und damit $W(\chi)$ endlich dimensional. Die letzte Formel (*) gilt dann für alle $X \in H$ (da sie für alle $X \in H$ mit $Re(X) \in K$ gilt). Der Charakter der endlich dimensionalen Darstellung $W(\chi)$ ist invariant unter der Weylgruppe W (Folgerung auf Seite 40). Da jedes $\sigma_\alpha, \alpha \in \Delta$ die Wurzeln in $\Phi^+ \setminus \{\alpha\}$ permutiert und α auf $-\alpha$ abbildet (Lemma 2 auf Seite 42), nimmt der Nenner $N(X) = \prod_{\alpha \in \Phi^+}(q^{\alpha/2} - q^{-\alpha/2})$ der Formel (*) bei Anwendung von σ_α ein Vorzeichen auf. Daraus folgt die Existenz eines Gruppenhomomorphismus

$$\boxed{sign : W \to \{\pm 1\}}$$

derart, dass das Zählerpolynom $Z(X) = \sum_{\mu \in \Sigma} m(\mu) q^{\mu+\delta}$ die Eigenschaft $Z(w(X)) = sign(w) \cdot Z(X)$ besitzt. Es folgt $m(\mu) = sign(w) \cdot m(\mu')$, falls $w(\mu + \delta) = \mu' + \delta$ gilt für $w \in W$. Jedes $\mu + \delta$ besitzt einen Repräsentant in seinem W-Orbit (mit gleicher Länge), welcher in $\overline{K}$ liegt (Fakt 2 und 3 auf Seite 30). Aus $\mu + \delta, \chi + \delta \in \overline{K}$ und $c(\mu) = c(\chi)$ folgt $\mu = \chi$ (Lemma 2 auf Seite 42). Daher liegen alle $\mu + \delta$ im W-Orbit von $\chi + \delta$ und es gilt $m(\mu) = sign(w) \cdot m(\chi) = sign(w)$ im Fall $\mu + \delta = w(\chi + \delta)$. Es folgt

Theorem. *Ist (V, ϕ) eine endlich dimensionale irreduzible Darstellung mit dem Höchstgewicht χ, dann gilt*

$$\boxed{ch(V, \phi) \;=\; \frac{\sum_{w \in W} sign(w) \cdot q^{w(\chi+\delta)}}{\prod_{\alpha \in \Phi^+}(q^{\alpha/2} - q^{-\alpha/2})}} \; .$$

Beispiel. Für $L = sl(2, F)$ und $\chi = n \in \mathbb{N}$ ist $\alpha = 2$ und $\delta = 1$. Also bestätigt hier die Weylsche Charakterformel, was wir bereits wissen:

$$ch(W(n)) = \frac{q^{n+1} - q^{-n-1}}{q - q^{-1}} = q^{-n} + q^{-n+2} + \cdots + q^{n-2} + q^n \; .$$

Anwendungen

Satz von Levi-Malcev

Seien L und R Liealgebren über F. Dann ist $Der_F(R)$ eine Liealgebra (mit dem Kommutator als Lieklammer). Für einen beliebigen Liealgebren Homomorphismus

$$\phi : L \to Der_F(R)$$

kann man dann den F-Vektoraum

$$M := R \oplus L$$

zu einer Liealgebra machen mit der Lieklammer

$$[(r,X),(s,Y)] \ := \ \big([r,s] + \phi(X)(s) - \phi(Y)(r) \ , \ [X,Y]\big)$$

für $X, Y \in L$ und $r, s \in R$. Eine leichte Rechnung zeigt, daß die Jacobi Identität aus $\phi(X)([r,s]) = [\phi(X)r, s] + [r, \phi(X)s]$ folgt. Man nennt die so definierte Liealgebra das *semidirekte Produkt* von R mit L.

Beispiel 1. Ist R auflösbar und L-halbeinfach, dann ist R offensichtlich das Radikal von M.

Beispiel 2. Ist (V, ϕ) eine Darstellung $\phi : L \to End_F(V)$ von L. Fasst man den F-Vektorraum V als abelsche Liealgebra über F auf, dann ist $Der_F(V) = End_F(V)$. Somit ist ist das semidirekte Produkt von (V, ϕ) mit L erklärt.

Sei F ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik Null. Dann gilt

Satz. *Jede endlich dimensionale Liealgebra M über F ist isomorph zu dem semidirekten Produkt des Radikals R der Liealgebra M mit dem halbeinfachen Quotienten $L = M/R$. Die definierende Abbildung $\phi : L \to Der_F(R)$ ist definiert durch die Lieklammer von M:*

$$\phi(X)(r) = [X, r] \ .$$

Beweis (mittels Induktion nach $dim_F(R)$). Das Zentrum $Z(R)$ des Radikalideals R definiert eine exakte Sequenz von Liealgebren

$$0 \to Z(R) \to M \to M/Z(R) \to 0 \ .$$

Nach Induktionsannahme zerfällt $M/Z(R)$ in $R/Z(R)$ und L. Das Urbild von L definiert eine exakte Sequenz von L-Moduln

$$0 \to Z(R) \to M' \to L \to 0 \ .$$

Diese zerfällt in $Rep_F(L)$, da L halbeinfach ist. D.h. es gibt einen Isomorphismus von L-Moduln $M \cong R \oplus L$. Man kann daher die Elemente von M eindeutig in der Gestalt $r + X$ schreiben für $r \in R$ und $X \in L$ so dass gilt $[r + X, s + Y] = [r,s] + [X,s] + [r,Y] + [X,Y]$. Beachte $[X,Y] \in L$. Da R ein Ideal in M ist, ist andererseits $[r,s] + [X,s] + [r,Y] = [r,s] + \phi(X)(s) - \phi(Y)(s)$ in R. $\square$