I GARBENTHEORIE

§1 Topologische Räume

Ein topologischer Raum besteht aus einer Menge X mit einem System $\mathbf{A}$ von Teilmengen, den abgeschlossenen Teilmengen. Es soll gelten

1) $A, B \in \mathbf{A}$ impliziert $A \cup B \in \mathbf{A}$

2) Beliebige Durchschnitte von Mengen in $\mathbf{A}$ sind wieder in $\mathbf{A}$

3) X und $\emptyset$ sind in $\mathbf{A}$

Die Komplemente der abgeschlossenen Mengen sind die offenen Mengen.

Eine Abbildung $f : X \to Y$ zwischen topologischen Räumen heißt stetig, wenn Urbilder von offenen Mengen wieder offen sind. Äquivalent: Urbilder abgeschlossener Mengen sind wieder abgeschlossen. Es bezeichne Top die Kategorie der topologischen Räume mit stetigen Abbildungen als Morphismen.

Jede Teilmenge Y eines topologischen Raum X wird, versehen mit der induzierten Topologie $A \cap Y, A \in \mathbf{A}$, wieder ein topologischer Raum.

Ein topologischer Raum X heißt quasikompakt, wenn jede offene Überdeckung von X eine endliche Teilüberdeckung zulässt. Äquivalent: Ist ein Durchschnitt abgeschlossener Teilräume leer, dann bereits ein endlicher Teildurchschnitt.

Ein topologischer Raum X heißt noethersch, wenn jede absteigende Kette von abgeschlossenen Teilmengen stationär wird. Äquivalent dazu ist: jede offene Teilmenge ist (quasi)kompakt. Hinweis: Verwende das Durchschnittskriterium für Quasikompaktheit.

Eine abgeschlossene Teilmenge Y eines topologischen Raumes X heißt irreduzibel, falls Y nicht als (nichttriviale) Vereinigung von zwei abgeschlossenen Teilmengen geschrieben werden kann. Ist Y irreduzibel, dann auch jede offene Teilmenge von Y.

Lemma: Sei X noetherscher topologischer Raum. Jede nichtleere abgeschlossene Teilmenge Y von X, kann als endliche Vereinigung irreduzibler abgeschlossener Mengen geschrieben werden

$$Y = Y_1 \cup ... \cup Y_n \ .$$

Man kann obdA annehmen $Y_i \not\subset Y_j$ für $i \neq j$. In diesem Fall sind die irreduziblen Komponenten eindeutig bestimmt.

Beweis: Gäbe es keine solche endliche Darstellung, folgt mittels eines Schubfachschlußes die Existenz einer nicht stationären absteigenden Kette abgeschlossener Mengen. Die Eindeutigkeit folgt dann sofort aus der Definition der Irreduzibilität.

§2 Garben

X sei ein topologischer Raum

Unter einer Prägarbe G abelscher Gruppen auf X versteht man eine Kollektion von Daten:

$(U$ offen in $X) \mapsto G(U)$ (abelsche Gruppe)

$(U \subset V) \mapsto res(V,U) : G(V) \to G(U)$ (Gruppenhomomorphismus)

mit folgenden Eigenschaften:

(i) $G(\emptyset) = 0$

(ii) $res(U,U) = id$

(iii) $res(V,U) \circ res(W,V) = res(W,U)$ falls $U \subset V \subset W$

Eine Prägarbe heißt Garbe, falls zusätzlich gilt: Es sei $V = \cup_{i \in I} V_i$ eine offene Überdeckung durch $V_i \subset V$. Dann gilt

G1) res: $G(V) \to \prod_{i \in I} G(V_i)$ ist injektiv.

(Ein Schnitt s verschwindet, wenn seine Restriktionen s_i auf die V_i verschwindet)

G2) Zu $s_i \in G(V_i)$ mit $res(V_i, V_i \cap V_j)(s_i) = res(V_j, V_i \cap V_j)(s_j)$ existiert ein $s \in G(V)$ mit $s_i = res(V, V_i)(s)$.

(Lokale Schnitte lassen sich zu globalen Schnitten verkleben, falls sie (notwendigerweise wegen (iii)!) auf den paarweisen Durchschnitten übereinstimmen).

Äquivalent: Die Sequenz

$$0 \to G(V) \to \prod_i G(V_i) \to \prod_{i,j} G(V_i \cap V_j)$$

ist exakt.

Beispiele: 1) $G(U) = C(U) = \{f : U \to \mathbb{R}$ stetig$\}$ (Garbe der stetigen Funktionen)

2) $X \subset \mathbb{C}$ offene Teilmenge. $G(U) = O(U) = \{f : U \to \mathbb{C}$ holomorph$\}$ (Garbe der holomorphen Funktionen)

3) Sei H eine abelsche Gruppe versehen mit der diskreten Topologie. Dann definiert

$$G(U) = \{f : U \to H \text{ stetig }\}$$

die sogenannte konstante Garbe H auf X. (Stetig = lokal konstant wegen der diskreten Topologie auf H).

4) Die Nullgarbe $G(U) = 0$ als Spezialfall von 3).

Bemerkung: Falls U offen nichtleer zusammenhängend ist, gilt in Beispiel 3) $G(U) = H$. Allerdings definiert

$G(U) = H$ (falls $U \neq \emptyset$) und $G(\emptyset) = 0$ im allgemeinen nur eine Prägarbe auf X.

Die Garben abelscher Gruppen auf X werden zu einer Kategorie Ab_X, wenn man Garbenhomomorphismen $\phi \in Hom_X(F, G)$ definiert als Kollektionen von Gruppenhomomorphismen

$$\phi_U : F(U) \to G(U)$$

welche (für alle $V \subset U$) mit den Restriktionsabbildungen vertauschen

$$\begin{tikzcd} F(U) \arrow[r, "\phi_U"] \arrow[d, "res"'] & G(U) \arrow[d, "res"] \\ F(V) \arrow[r, "\phi_V"] & G(V) \end{tikzcd} .$$

Genauso definiert man die Oberkategorie P_X der Prägarben auf X.

Für jeden Punkt $x \in X$ definiert man nun einen sogenannten Halm-Funktor von P_X bzw. Ab_X in die Kategorie Ab der abelschen Gruppen.

F (Prä)-Garbe $\to F_x$ (Halm in x)

Hierbei ist der Halm gegeben durch

$$F_x = lim_{U, x \in U} F(U) = \{(U, s \in F(U))\} / \equiv$$

Hierbei heißen zwei Schnitte $s \in F(U)$ und $t \in F(V)$ äquivalent

$$(U, s) \equiv (V, t)$$

($x \in U, x \in V$), wenn es eine Umgebung W von x gibt mit $res(U, W)(s) = res(V, W)(t)$. Die Menge der Äquivalenzklassen bilden eine abelsche Gruppe bezüglich der Addition, den Halm F_x. Die einem Schnitt $(U, s \in F(U))$ zugeordnete Äquivalenzklasse in F_x heißt der

Keim s_x von s in F_x. Die Zuordnung der Keime $s \mapsto s_x$ hat folgende Eigenschaft: Das Diagramm

$$\begin{tikzcd} G(U) \arrow[r, "\phi_U"] \arrow[d] & F(U) \arrow[d] \\ G_x \arrow[r, "\phi_x"] & F_x \end{tikzcd}$$

ist kommutativ (für $x \in U$).

<u>Bemerkung:</u> Ist G die Garbe der holomorphen Funktionen, dann entsprechen die Keime in x den Taylorentwicklungen in x.

§3 Assoziierte Garbe

Wir konstruieren einen zum Vergißfunktor $V : Ab_X \to P_X$ adjungierten Funktor mit der Eigenschaft $Hom_X(F, V(G)) = Hom_X(F^+, G)$. Dieser Funktor ordnet einer Prägarbe F auf X eine Garbe F^+ und einen Prägarbenhomomorphismus $\phi : F \to F^+$ zu mit der universellen Eigenschaft

$$\psi : \begin{tikzcd} F \arrow[r] \arrow[d, "\phi"'] & G \\ F^+ \arrow[ur, dotted, "\exists\,!"'] & \end{tikzcd} \qquad (G \text{ Garbe})$$

Bemerkung: Diese universelle Eigenschaft bestimmt $\phi : F \to F^+$ eindeutig bis auf einen Isomorphismus in der Kategorie P_X. Die (bis auf Isomorphie in Ab_X eindeutig bestimmte) Garbe F^+ heißt die zu F assoziierte Garbe.

Folgerung (aus Bemerkung): Ist F bereits eine Garbe, dann ist ϕ ein Isomorphismus: $\phi : F \cong F^+$.

Konstruktion von F^+:

Setze

$$F^+(V) = \{s : V \to \cup_{x \in V} F_x | s \text{ erfüllt (*) } \} \ .$$

Ein Schnitt in $F^+(V)$ muß die Eigenschaften (*) erfüllen:

(*1) $s(x) \in F_x$

(*2) s wird repräsentiert durch lokale Schnitte: Für jedes $x \in X$ gibt es eine Umgebung $U(x)$ von x und ein $t \in F(U(x))$ mit der Eigenschaft $s(\tilde{x}) = t_{\tilde{x}}$ für alle $\tilde{x} \in U(x)$.

Bild:

Offensichtlich definiert F^+ eine Prägarbe auf X. Der Prägarbenhomomorphismus $\phi : F \to F^+$ ist definiert durch

$$t \in F(V) \to \{x \to Keim\ t_x \in F_x\} \in F^+(V)$$

Die Garbeneigenschaften sind erfüllt, da Schnitte in $F^+(V)$ Funktionen sind:

G1) Eine Funktion ist Null genau dann wenn sie lokal Null ist.

G2) Funktionen lassen sich verkleben, wenn sie auf Durchschnitten übereinstimmen. Die Bedingung (*) vererbt sich automatisch auf die Verklebung.

Zu zeigen bleibt die universelle Eigenschaft: Wir begnügen uns damit, die Abbildung $F^+ \to G$ (siehe oben) anzugeben. Gegeben sei ein $s \in F^+(V)$. Wir müssen das Bild $t \in G(V)$ angeben. Wird s lokal repräsentiert durch gewisse $s_i \in F(V_i)$ (Eigenschaft (*)), dann setze $t_i = \psi(s_i) \in G(V_i)$. Zu zeigen bleibt, daß sich die t_i zu einem Schnitt $t \in G(V)$ verkleben lassen. Dies folgt aus der Garbeneigenschaft G2) für G, falls $res(t_i) = res(t_j)$ gilt auf $V_i \cap V_j$. Dies folgt aus dem nächsten Lemma wegen $(s_i)_x = (s_j)_x = s(x)$ beziehungsweise wegen der Folgerung $(t_i)_x = (t_j)_x$ für $x \in V_i \cap V_j$.

<u>Lemma:</u> Für eine Prägarbe mit G1) sind äquivalent:

i) $s = s'$ in $G(V)$

ii) $s_x = s'_x \in G_x$ für alle $x \in V$

<u>Beweis:</u> Nur ii) $\Longrightarrow$ i) ist unklar. Man reduziert sofort auf den Fall $s' = 0$. Aus $s_x = 0$ folgt die Existenz einer Umgebung $V(x)$ von x mit $res(V, V(x))(s) = 0$. Da die $V(x), x \in V$ ganz V überdecken, folgt $s = 0 \in G(V)$ aus Axiom G1).

Aus der Definition von F^+ folgt

<u>Korollar:</u> Für jede Prägarbe F und jedes $x \in X$ gilt: $F_x^+ = F_x$.

<u>Beispiel</u>: Sei $H_n(U) = H$ die konstante Prgarbe H_n auf X (H diskrete abelsche Gruppe mit $res(U, V) = id_H$ als Restriktionen). Dann ist $(H_n)^+$ die "konstante Garbe H_X" der lokalkonstanten Funktionen auf X mit Werten in H.

§4 Kern, Bild und Kokern

Für eine Prägarbe F seien $G(U) \subset F(U)$ unter den Restiktionen stabile Untergruppen, d.h. $res(U,V) : G(U) \to G(V)$. Dann definiert G eine Unterprägarbe von F.

Sei $\phi : F \to G$ ein (Prä)-Garbenhomomorphismus. Dann definieren

$$Kern(\phi)(V) = Kern(\phi_V : F(V) \to G(V))$$

und

$$Bild_n(\phi)(V) = Bild(\phi_V : F(V) \to G(V))$$

sowie

$$Kokern_n(\phi) = G(V)/\phi(F(V))$$

offensichtlich Prägarben auf X.

Lemma: Sind F, G (wie oben) Garben, dann ist $Kern(\phi)$ eine Garbe.

Beweis: Als Unterprägarbe einer Garbe erfüllt $Kern(\phi)$ automatisch Garbenaxiom G1).

Zu G2): Seien $s_i \in F(V_i)$ Schnitte im Kern (d.h $\phi(s_i) = 0$) mit der Verklebungseigenschaft $res(s_i) = res(s_j)$ auf $V_i \cap V_j$. Da F Garbe ist, verkleben sich die s_i zu einem Schnitt $s \in F(V)$. Zu zeigen bleibt $s \in Kern(\phi)(V)$, d.h. $\phi(s) = 0$. Wegen Garbenaxiom G1) für G genügt dazu aber $res(V, V_i)(\phi(s)) = \phi(res(V, V_i)(s)) = \phi(s_i) = 0$ (nach unserer Annahme).

Achtung: Im allgemeinen sind für Garben F und G jedoch Bild und Kokern im obigen naiven Sinn keine Garben!

Beispiel: $X = \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Betrachte die Garben O und O^* der holomorphen Funktionen und der invertierbaren holomorphen Funktionen und den Garbenhomomorphismus

$$exp_U : O(U) \to O^*(U) \ , \ f(z) \mapsto exp(f(z)) \ .$$

Die Funktion $g(z) = z \in O^*(X)$ läßt sich nicht in der Form $z = exp(f(z)), f \in O(X)$ schreiben, denn sonst wäre $\oint \frac{dz}{z} = 0$ wegen der Existenz der Stammfunktion $f(z)$ von $1/z$. Andererseits kann man X durch zwei einfach zusammenhängende offene Teilmengen überdecken, wo eine solche Exponentenschreibweise für die Einschränkungen von g möglich ist (Funktionentheorie Vorlesung!) Somit erfüllt die Prägarbe $Bild_n(exp)$ nicht das Garbenaxiom G2)!

Um diesen Mißstand zu beheben, setzt man für einen Garbenhomomorphismus $\phi : F \to G$

$$Bild(\phi) = Bild(\phi)_n^+$$

und

$$Kokern(\phi) = Kokern(\phi)_n^+ \ .$$

$Kokern(\phi)$ wird auch Quotient F/G (bezüglich ϕ) genannt. Weiterhin heißt ϕ injektiv bzw. surjektiv, falls $Kern(\phi) = 0$ bzw. $Bild(\phi) = (Bild(\phi)_n)^+ = G$.

Sei $\phi : F \to G$ ein Garbenhomomorphismus. Wegen dem Lemma und dem Korollar von §3 ist die induzierte Abbildung $Bild(\phi) \to G$ halmweise injektiv, also injektiv

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[r, "\phi"] \arrow[d] & G \\
Bild(F)_n \arrow[ur, hook] \arrow[r, "\psi"] & Bild(F)_n^+ = Bild(\phi) \arrow[u, dotted, hook, "\exists\,!"']
\end{tikzcd}$$

Die Homomorphiesätze für abelsche Gruppen und die universelle Eigenschaft des $+$-Funktors implizieren sofort folgende universelle Eigenschaften von Kern und Kokern. (Zur Motivation der Definition von $Bild(\phi)$ siehe dann $\S 5$).

$Kern(\phi)$ erfüllt folgende universelle Eigenschaft in der Kategorie Ab_X der Garben:

$$\begin{tikzcd}
Kern(\phi) \arrow[dr] \arrow[drr, "0"] & & \\
 & F \arrow[r, "\phi"] & G \\
H \arrow[ur] \arrow[urr, "0"'] \arrow[uu, dotted, "\exists\,!"] & &
\end{tikzcd}$$

$Kokern(\phi)$ erfüllt folgende universelle Eigenschaft in der Kategorie Ab_X der Garben:

$$\begin{tikzcd}
 & & Kokern(\phi) \arrow[dd, dotted, "\exists\,!"] \\
F \arrow[r, "\phi"] \arrow[urr, "0"] \arrow[drr, "0"'] & G \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & & H
\end{tikzcd}$$

Dies folgt aus der universellen Eigenschaft des $+$-Funktors und den Isomorphiesätzen für abelsche Gruppen. Wir beenden diesen Abschnitt mit einer

<u>Definition:</u> Eine Sequenz von Garbenhomomorphismen

$$F \stackrel{\phi}{\to} G \stackrel{\psi}{\to} H$$

heißt <u>exakt</u> (bei G), falls gilt

$$Bild(\phi) = Kern(\psi) \ .$$

§5 <u>Die abelsche Kategorie der Garben</u>

Alle relevanten Aussagen über Bild, Kern und Kokern lassen sich, wie gezeigt wird, halmweise formulieren. Somit übertragen sich alle wohlbekannten Eigenschaften der Kategorie der abelschen Gruppen auf die Kategorien Ab_X. Die Kategorien Ab_X sind somit abelsche Kategorien, also besitzen Nullobjektive, Morphismen können "addiert" werden, Komposition ist distributiv, paarweise direkte Produkte existieren, Kerne und Kokerne existieren, jeder Morphismus faktorisiert in einen Epimorphismus und einen Monomorphismus. Ein Monomorphismus ist der Kern seines Kokerns. Dual für Epimorphismen (siehe Hilton-Stammbach).

<u>Lemma:</u> Sei $\phi : F \to G$ ein Garbenhomomorphismus. Dann gilt

$$(Bild(\phi))_x = Bild(\phi_x : F_x \to G_x)$$

$$(Kern(\phi))_x = Kern(\phi_x : F_x \to G_x)$$

$$(Kokern(\phi))_x = Kokern(\phi_x : F_x \to G_x) \ .$$

<u>Beweis:</u> Wegen $H_x = (H^+)_x$ reduziert man dies auf die entsprechenden "naiven" Aussagen. Diese sind leicht zu verifizieren.

<u>Lemma:</u> Ein Garbenhomomorphismus $\phi : F \to G$ ist ein Isomorphismus (d.h. besitzt eine Umkehrabbildung in Ab_X) genau dann, wenn alle Halmabbildungen $\phi_x : F_x \to G_x, x \in X$ Isomorphismen abelscher Gruppen sind.

<u>Beweis:</u> Die eine Richtung folgt trivialerweise aus der Funktorialität des Halmfunktors.

Wir nehmen umgekehrt an, alle $\phi_x, x \in X$ seien Isomorphismen. Zu zeigen ist die Existenz einer Umkehrabbildung für ϕ.

Injektivität von ϕ: Sei $s \in F(V)$ mit $\phi(s) = 0$. Es folgt $\phi_x(s_x) = \phi(s)_x = 0$ für alle $x \in X$ (Lemma §4) und somit nach Annahme $s_x = 0, x \in X$. Lemma §4 impliziert $s = 0$. Es folgt $Kern(\phi)(V) = 0$ für alle V, d.h. $Kern(\phi) = 0$.

Um die Umkehrabbildung zu konstruieren können wir obdA F und G durch die isomorphen Garben F^+ und G^+ ersetzen. Zur Konstruktion der Umkehrabbildung müssen wir jedem Schnitt

$$s \in G^+(V) \ , \ s : V \to \cup_{x \in V} G_x \text{ mit } \ (*)$$

ein Urbild $t \in F^+(V)$ mit $\phi(t) = s$ zuordnen. Da ein solches Urbild wegen der Injektivität von ϕ eindeutig ist, gibt diese Konstruktion dann eine wohldefinierte Umkehrabbildung ϕ^{-1} oder genauer $(\phi^+)^{-1}$.

Das Urbild t von s unter ϕ^+ findet man durch

$$t : V \stackrel{s}{\to} \cup_{x \in V} G_x \stackrel{\cup \phi_x^{-1}}{\to} \cup_{x \in V} F_x$$

Eigenschaft (*) vererbt sich von s auf t., d.h. $t \in F^+(V)$: Offensichtlich gilt nämlich $t(x) \in F_x$ und t ist lokal representiert durch Schnitte der Garbe F. Denn repräsentiert $\tilde{s} \in G(U(x))$ die Funktion s in einer Umgebung $U(x)$ von x und ist $\tilde{t} \in F(V(x))$ ein Repräsentant des Keimes $\phi_x^{-1}((\tilde{s})_x)$ in einer Umgebung $V(x) \subset U(x)$, dann stimmen per Definition der Keime $\phi_{V(x)}(\tilde{t})$ und $\tilde{s}$ auf einer Umgebung $W(x) \subset V(x)$ überein

$$res(U(x), W(x))(\tilde{s}) = res(V(x), W(x))(\phi_{V(x)}(\tilde{t})) \in G(W(x)) \ .$$

Es folgt somit aus der Definition der Funktion t, daß t auf $W(x)$ von dem Schnitt $\tilde{t}$ repräsentiert wird.

Als Korollar der letzten beiden Lemmata und der Definition folgt

Korollar: Eine Garbensequenz $F \stackrel{\phi}{\to} G \stackrel{\psi}{\to} H$ ist exakt genau dann, wenn alle Halmsequenzen

$$F_x \stackrel{\phi_x}{\to} G_x \stackrel{\psi_x}{\to} H_x$$

exakt sind (für alle $x \in X$). Weiterhin ist $\phi : F \to G$ surjektiv (injektiv) genau dann, wenn alle $\phi_x : F_x \to G_x$ surjektiv (injektiv) sind.

Beispiel: Es folgt die Exaktheit der Sequenz (X offen in $\mathbb{C}$)

$$0 \to 2\pi i \mathbb{Z} \to O \to O^* \to 0 \ .$$

Eigenschaften der Kategorie der abelschen Gruppen übertragen sich mittels der Halmkriterien unmittelbar, wie z.B:

Für Garbenhomomorphismen $\phi : F \to G$ hat man (Iso)Morphismen

$$Bild(\phi) \cong Kern(G \to Kokern(\phi))$$

oder

$$Kokern(\phi) \cong G/Bild(\phi)$$

oder

$$F/Kern(\phi) \cong Bild(\phi)$$

Die zugehörigen universellen Abildungen sind halmweise Isomorphismen, also Isomorphismen. Analog folgt die Exaktheit

$$0 \to G \to H \to H/G \to 0$$

oder

Lemma: Ein Garbenhomomorphismus $\phi : F \to G$ ist ein Isomorphismus genau dann, wenn gilt $Kern(\phi) = 0$ und $Bild(\phi) = G$ bzw. $Kokern(\phi) = 0$.

§6 Direktes und inverses Bild

Sei $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung topologischer Räume.

Direktes Bild: Sei F eine Garbe auf X. Dann definiert

$$(f_*F)(V) = F(f^{-1}(V))$$

eine Garbe auf Y. Man erhält einen Funktor $f_* : Ab_X \to Ab_Y$.

Inverses Bild: Sei G eine Garbe auf Y, dann definiert

$$(f^{-1}(G))_n(V) = lim_{U, f(V) \subset U} G(U)$$

eine Prägarbe auf X. Das inverse Bild $f^{-1}(G)$ ist die dazu assoziierte Garbe auf X.

Beachte: I.a. ist $f(V)$ nicht offen.

Ist $f : X \to Y$ eine Inklusion, schreibt man auch $G|X$ anstelle von $f^{-1}(G)$ (eingeschränkte Garbe).

Bemerkung: Für die Halme gilt $(f^{-1}(G))_x = G_{f(x)}$. Insbesondere ist $f^{-1} : Ab_Y \to Ab_X$ ein exakter Funktor nach §5.

Spezialfall: $i_x : x \to X$ Inklusion eines Punktes. Dann gilt

$$i_x^{-1}(G) = G_x \quad \text{(Halm)} \quad .$$

Adjunktionsformel: Für Garben F auf X und G auf Y gilt

$$ad : Hom_X(f^{-1}(G), F) = Hom_Y(G, f_*(F))$$

Insbesondere hat man eine kanonische Adjunktionsabbildung

$$G \to f_*(f^{-1}(G)) \ .$$

Beweis: Wegen $Hom_X(f^{-1}(G), F) = Hom_X(f^{-1}(G)_n, F)$ genügt es die Formel für das unvergarbte naive inverse Bild auf Prägarbenniveau zu verifizieren.

Situation: Gegeben $\phi \in Hom_X(f^{-1}(G)_n, F)$, d.h. ein System ($V \subset X$ offen)

$$\phi_V : \quad (f^{-1}(G))_n(V) = lim_{W', f(V) \subset W'} G(W') \quad \to \quad F(V) \ .$$

Gesucht $\psi = ad(\phi) \in Hom_Y(G, f_*(F))$, also ein System ψ_W für $W \subset Y$ offen. Setze $V = f^{-1}(W)$. Dann gilt $(*)$ $f(V) \subset W$ und wir definieren $\psi_W = ad(\phi)_W$ durch das Diagramm

$$\begin{tikzcd} G(W) \arrow[r, "res", "(*)"'] \arrow[d, "\psi_W"'] & lim_{W' \supset f(V)} G(W') \arrow[r, equal] & f^{-1}(G)_n(V) \arrow[d, "\phi_V"] \\ f_*(F)(W) \arrow[r, equal] & F(f^{-1}(W)) \arrow[r, equal] & F(V) \end{tikzcd} .$$

<u>ad ist injektiv:</u> Sei $\psi_W = ad(\phi)_W = 0$ für alle W. Zu zeigen ist $\phi_{V'} = 0$ für alle V' offen in X. Sei W offen in Y mit $f(V') \subset W$. Es gilt dann $V' \subset V = f^{-1}(W)$ und durch Einschränken (der rechten Seite des obigen Diagramms) folgt

$$\begin{tikzcd} G(W) \arrow[r, "res"] \arrow[dr, "0"'] & f^{-1}(G)_n(V') \arrow[d, "\phi_{V'}"] \\ & F(V') \end{tikzcd}$$

Im Limes über alle $W \supset f(V')$ folgt (oben Gleichheit und damit) $\phi_{V'} = 0$.

<u>ad ist surjektiv:</u> Gegeben sei ein Garbenhomomorphismus $\psi = (\psi_W)$. Also $\psi_W : G(W) \to F(f^{-1}(W))$. Sei V offen in X und W offen in Y mit $W \supset f(V)$ (somit $V \subset f^{-1}(W)$). Die universelle Eigenschaft des direkten Limes liefert ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} G(W) \arrow[r, "\psi_W"] \arrow[d] & F(f^{-1}(W)) \arrow[r, "res"] & F(V) \\ lim_{W \supset f(V)} G(W) \arrow[urr, dotted, "\exists! \phi_V"'] & & \end{tikzcd} .$$

Dies definiert Morphismen $\phi_V : f^{-1}(G)_n(V) \to F(V)$, somit $\phi : f^{-1}(G) \to F$. Offensichtlich ist $\psi = ad(\phi)$.

<u>Hom-Garbe:</u>

Seien G, F Garben auf X. Dann definiert die Zuordnung

$$\mathcal{H}\mathrm{om}(G, F)(U) = Mor_{Ab_U}(G|U, F|U)$$

eine Garbe auf X.

G1) Gegeben U mit Überdeckung U_i und $\phi : F \to G$ mit $\phi|U_i = 0$. Zu zeigen ist $\phi(s) = 0$ für jeden Schnitt. Wegen Garbenaxiom G1) für F genügt dazu $\phi(s)|U_i = (\phi|U_i)(res(U, U_i)(s)) = 0$ für alle i. Dies ist klar wegen $\phi|U_i = 0$.

G2) Gegeben Garbenhomomorphismen $\phi|U_i$ zwischen den Restriktionen von F und G, welche auf den paarweisen Durchschnitten übereinstimmen. Dann lassen sich die $\phi|U_i$ unter Verwendung der Garbenaxiome von F und G (insbesondere Axiom 2 für G) zu einem Garbenhomomorphismus von F nach G verkleben!

Nullfortsetzung: Sei $j : U \to X$ die Inklusion einer offenen Menge U in X. Sei $Y = X \setminus U$ das abgeschlossene Komplement. Sei F eine Garbe auf U, dann definiert

$$(j_0F)(V) = \begin{cases} F(V) & V \subset U \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

eine Prägarbe auf X. Sei $j_!F = (j_0F)^+$ die assoziierte Garbe. Wegen $(j_!F)_x = (j_0F)_x$ gilt

$$(j_!F)_x = \begin{cases} F_x & x \in U \\ 0 & x \notin U \end{cases} .$$

Beachte: Man hat eine Garbeninklusion $j_!(F) \hookrightarrow j_*(F)$ wegen

$$(j_0(F))(V) = \begin{cases} F(V) & V \subset U \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$(j_*(F))(V) = \begin{cases} F(V) & V \subset U \\ F(V \cap U) & \text{sonst} \end{cases} .$$

Relative Garbensequenz: Bezeichne $i : Y \to X$ die Inklusionsabbildung des Komplements, so folgt

$$0 \to j_!(G|U) \to G \to i_*(G|Y) \to 0 .$$

Die erste Abbildung definiert man leicht, die zweite ist die natürliche Adjunktionsabbildung. Exaktheit folgt halmweise wegen

$$i_*(G|Y)_x = \begin{cases} 0 & x \notin Y \\ G_x & x \in Y \end{cases} .$$

Trivialerweise gilt folgende 2.Adjunktionsformel

$$Hom_X(j_!(G), F) = Hom_U(G, j^{-1}(F)) ,$$

denn $j_!$ kann dabei durch j_0 und j^{-1} durch j_n^{-1} ersetzt werden, da $U \subset X$ offen. Aber $j_0G(V) = G(V)$ und $j_n^{-1}F(V) = F(V)$ für $V \subset U$, und $j_0G(V)$ ist Null sonst.

§7 Kohomologietheorie

Sei im folgenden A eine abelsche Kategorie, z.B die Garbenkategorien oder die Kategorie Ab oder Mod_R der R-Linksmoduln über einem (nicht notwendig kommutativen) Ring mit 1.

Komplexe $K^\cdot = (K^i, d^i)$ in A: $d^i : K^i \to K^{i+1}$ mit $d^{i+1} \circ d^i = 0$ für alle $i \in \mathbb{Z}$.

Komplexabbildungen: $f : K^\cdot \to L^\cdot$ bestehen aus Abbildungen $f^i : K^i \to L^i$ in A für $i \in \mathbb{Z}$, welche mit den Randabbildungen d^i kommutieren:

$$\begin{tikzcd} K^i \arrow[r] \arrow[d, "f_i"'] & K^{i+1} \arrow[d, "f_{i+1}"] \\ L^i \arrow[r] & L^{i+1} \end{tikzcd} .$$

Dies definiert die (abelsche) Kategorie $K(A)$ der Komplexe über A. Der i-te Kohomologiefunktor

$$H^i : K(A) \to A$$

ist erklärt durch

$$H^i(K^\cdot) = Kern(d^i)/Bild(d^{i-1}) \ .$$

Eine Komplexabbildung $f : K^\cdot \to L^\cdot$ bildet Elemente im Kern (Bild) von d^i in Elemente im Kern (Bild) ab, induziert daher eine Abbildung $H^i(f) : H^i(K^\cdot) \to H^i(L^\cdot)$.

Ein Komplex heißt exakt oder azylisch, wenn alle Kohomologiegruppen verschwinden, d.h wenn $Kern(d^i) = Bild(d^{i-1})$ gilt für alle i. Wichtige Spezialfälle sind die kurzen exakten Sequenzen!

Eine kurze exakte Sequenz $0^\cdot \to F^\cdot \to G^\cdot \to K^\cdot \to 0^\cdot$ in der abelschen Kategorie $K(A)$ der Komplexe induziert eine lange exakte Sequenz (exakter Komplex) in der Kategorie A

$$.. \to H^i(F^\cdot) \to H^i(G^\cdot) \to H^i(K^\cdot) \xrightarrow{\delta} H^{i+1}(F^\cdot) \to ... \ .$$

(siehe LA II-Skript)

Zwei Komplexabbildungen $f, g : K^\cdot \to L^\cdot$ heißen homotop, falls es Abbildungen $h^i : K^i \to L^{i-1}$ gibt mit der Eigenschaft $f^i - g^i = d^{i-1} \circ h^i + h^{i+1} \circ d^i$. Dies definiert eine Äquivalenzrelation. Zwei homotope Komplexabbildungen induzieren dieselbe Abbildung auf den Kohomologiegruppen $H^i(g) = H^i(f)$. Zwei Komplexe heißen homotop, wenn es Komplexabbildungen ϕ und ψ zwischen ihnen gibt, deren Zusammensetzung homotop zur Identität $id_{K^\bullet}$ bzw. $id_{L^\cdot}$ ist.

§8 Auflösungen

Sei A eine abelsche Kategorie. Dann ist per Definition die Morphismenmenge zwischen Objekten $Hom(F,G)$ eine abelsche Gruppe. Man erhält einen kontravarianten Funktor

$$Hom(.,G) : A \to Ab$$

Dieser ist linksexakt, d.h es gibt für jede exakte Sequenz $(0 \to)X \to Y \to Z \to 0$ in A eine exakte Sequenz

$$0 \to Hom(Z,G) \to Hom(Y,G) \to Hom(X,G)$$

G heißt injektiv, wenn der Funktor $Hom(.,G)$ exakt ist, d.h. kurze exakte in kurze exakte Sequenzen überführt. Offensichtlich äquivalent ist die universelle Fortsetzungeigenschaft

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & X \arrow[r] \arrow[dr] & Y \arrow[d, dotted, "\exists"] & \text{exakt} \\ & & G & \end{tikzcd}$$

Analog definiert man projektive Objekte P für die der linksexakte, kovariante Funktor $Hom(P,.)$ exakt ist.

Die Kategorie A hat genügend viele injektive Objekte, falls zu jedem Objekt L ein Monomorphismus $\phi : L \to I$ in ein injektives Objekt I existiert. (Dual für projektive Objekte).

Beispiel: $A = Ab$. Ein abelsche Gruppe, welche divisibel ist, ist injektiv! (Eine Anwendung des Zornschen Lemmas!) Zum Beispiel ist jedes Produkt von Gruppen $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ oder $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ divisibel. Für abelsche Gruppen G und $g \in G$ gibt es Homomorphismen $\varphi_g : G \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ mit injektiver Einschränkung $\varphi_g| < g >$ ($\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ ist injektiv). Dies liefert einen injektiven Gruppenhomomorphismus $\prod_{g\in G} \varphi_g$

$$G \hookrightarrow \prod_{g\in G} \mathbb{R}/\mathbb{Z} \ .$$

Somit hat Ab genügend viele injektive Objekte ($\prod_{g\in G} \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ ist injektiv).

Beispiel: Die Garbenkategorie hat genügend viele injektive Objekte. Die Adjunktionsabbildungen definieren Abbildungen $F \hookrightarrow \prod_{x\in X}(i_x)_*(F_x)$. Nach §3, Lemma ist diese Abbildung injektiv. Wähle injektive abelsche Gruppen I_x mit $F_x \hookrightarrow I_x$. Die Garben $(i_x)_*(I_x)$ sind injektiv (reduziere mittels Adjunktionsformel auf die Exaktheit des Funktors i_x^{-1} !), somit ist auch $\prod_{x\in X}(i_x)_*(I_x)$ eine injektive Garbe.

Wir nehmen nun an A sei eine abelsche Kategorie mit genügend vielen injektiven Objekten. Jedes Objekt G besitzt dann eine injektive Auflösung, d.h. einen zugeordneten Komplex $I^\cdot = I^\cdot(G)$

$$... \ 0 \to I^0 \to I^1 \to I^2 \to ....$$

mit lauter injektiven Objekten I^i und der Eigenschaft

$$H^i(I^\cdot) \cong \begin{cases} G & i = 0 \\ 0 & i \neq 0 \end{cases}$$

<u>Beweis:</u> Wähle injektive Einbettung $G \hookrightarrow I^0$, wähle injektive Einbettung $I^0/G \hookrightarrow I^1$ usw.

<u>Fakt:</u> Injektive Auflösungen sind eindeutig bis auf Homotopie.

Dies folgt aus dem

<u>Lemma:</u> Sei $0 \to I^0 \to I^1 \to ...$ injektiver Komplex und $0 \to K^0 \to K^1 \to ...$ ein für $i > 0$ exakter Komplex, dann existiert für jeden Homomorphismus

$$\phi : H^0(K^\cdot) \to H^0(I^\cdot)$$

eine Komplexabbildung $\psi : K^\cdot \to I^\cdot$, welche ϕ induziert. Die Abbildung ψ ist eindeutig bestimmt bis auf eine Homotopie.

<u>Beweis:</u>

$$\begin{tikzcd} H^0(K^\cdot) \arrow[r, hook] \arrow[d, "\phi"'] \arrow[dr] & K^0 \arrow[d, dotted, "\psi_0"'] \\ H^0(I^\cdot) \arrow[r, hook] & I^0 \end{tikzcd} \qquad \text{usw.} \qquad \begin{tikzcd} K^0/H^0(K^\cdot) \arrow[r, hook] \arrow[d, dotted, "\overline{\psi}_0"'] \arrow[dr] & K^1 \arrow[d, dotted, "\psi_1"'] \\ I^0/H^0(I^\cdot) \arrow[r] & I^1 \end{tikzcd}$$

<u>Folgerung:</u> Morphismen $\phi : G \to G'$ induzieren Komplexabbildungen $I(\phi) : I^\cdot(G) \to I^\cdot(G')$.

Eine Verfeinerung zeigt nun sogar die Existenz eines exakten Funktors von A in die Kategorie der injektiven Komplexe mod Homotopie. Dazu verfeinert man die Konstruktion der injektiven Auflösung, so daß nun einer kurzen exakten Sequenz

$$0 \to G' \to G \to G'' \to 0$$

eine kurze exakte Sequenz $0 \to I^\cdot(G') \to I^\cdot(G) \to I^\cdot(G'') \to 0$ injektiver Auflösungen zugeordnet wird. Konstruiere wieder iterativ durch Wahl injektiver Einbettungen

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & G' \arrow[r] \arrow[d, hook] & G \arrow[r] \arrow[d, hook, dotted] & G'' \arrow[r] \arrow[d, hook] & 0 \\ 0 \arrow[r] & I' \arrow[r] & I \arrow[r] & I'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} .$$

Wähle zuerst I' und I''. Setze dann $I = I' \oplus I''$. Die Einbettung von G nach I konstruiert man mittels der Injektivität von I'!! Die Kern-Kokern Sequenz (s. LA-II Skript) liefert die Exaktheit der Kokernsequenz. Iteriere damit zur Konstruktion der Auflösungen.

<u>Bemerkung:</u> Eine kurze exakte Sequenz von injektiven Moduln ist immer splitexakt, d.h induziert von einer Summenzerlegung! Es genügt sogar die Injektivität des linken Terms.

Es gilt also

$$I^\nu(G) \cong I^\nu(G') \oplus I^\nu(G'') \ .$$

§9 Derivierte Funktoren

Sei nun F ein additiver kovarianter Funktor von einer abelschen Kategorie A in eine abelsche Kategorie B. Das heißt, F bildet paarweise direkte Summen in ebensolche ab $F(G \oplus G') \cong F(G) \oplus F(G')$. Wir nehmen an, A habe genügend viele injektive Objekte. Dann definiert man neue additive Funktoren $F^i : A \to B,\ i \geq 0$ durch

$$F^i(G) = H^i(F(I^\cdot(G))) \quad I^\cdot(G) \text{ (injektive Auflösung) } .$$

Die F^i heißen rechtsderivierte Funktoren. Diese hängen (bis auf Isomorphie) nicht von der Wahl der injektiven Auflösung ab. Einer kurzen exakten Sequenz

$$0 \to G' \to G \to G'' \to 0$$

in A werden splitexakte Sequenzen unter $I^\cdot$ zugeordnet, welche unter dem additiven Funktor F in ebensolche übergeführt werden. Man erhält also eine kurze exakte Sequenz (!) von Komplexen $0 \to F(I^\cdot(G')) \to F(I^\cdot(G)) \to F(I^\cdot(G'')) \to 0$ der Kategorie B. Übergang zur Kohomologie liefert dann (für jede kurze exakte Sequenz in A) eine zugeordnete lange exakte Sequenz derivierter Funktoren in B

$$0 \to F^0(G') \to F^0(G) \to F^0(G'') \xrightarrow{\delta} F^1(G') \to \ldots .$$

Bemerkung: Ist F linksexakt (d.h. F erhält Kerne), dann ist F automatisch additiv und es gilt $F^0 = F$ wegen

$$F(G) = F(Kern(I^0 \to I^1)) = Kern(F(I^0) \to F(I^1)) = F^0(G) .$$

Bemerkung: Injektive Objekte G sind F-azyklisch, d.h. $F^i(G) = 0$ für alle $i > 0$.

Bemerkung: Ist F ein linksexakter Funktor, dann ist F exakt genau dann, wenn gilt $F^i(G) = 0, i > 0$ für alle G.

Die folgenden Funktoren F sind linksexakt und kovariant:

1) $\Gamma : Ab_X \to Ab$ mit $\Gamma(G) = \Gamma(X, G) = G(X)$.

2) $\mathcal{H}\mathrm{om}(F, .) : Ab_X \to Ab_X$

3) $Hom_X(F, .) : Ab_X \to Ab$

4) $f_* : Ab_X \to Ab_Y$ für stetiges $f : X \to Y$.

Die derivierten Funktoren liefern in diesen Fällen die Garbenkohomologie $H^i(X, G)$ (Fall 1), die $\mathcal{E}\mathrm{xt}^i(F, G)$ Garben bzw. $Ext^i_X(F, G)$ Gruppen und im letzten Fall die höheren direkten Bildgarben

$$R^i f_*(G)$$

auf Y für Garben G auf X. 1) ist ein Spezialfall von 4).

<u>Bemerkung:</u> Die Funktoren $j_!$ und f^{-1} sind exakt und haben daher triviale höhere derivierte Funktoren. Für abgeschlossene Einbettungen $f : Y \to X$ ist außerdem f_* exakt, denn die Halme stimmen auf der abgeschlossenen Teilmenge Y überein und sind außerhalb Y Null.

<u>Korollar:</u> Ist $i : Y \to X$ eine abgeschlossene Einbettung, dann gilt

$$H^\nu(Y, G) = H^\nu(X, i_*(G)) \ .$$

<u>Beweis:</u> Die Aussage gilt für $\nu = 0$! Ist $I^\cdot$ eine injektive Auflösung von G, dann ist $i_*(I^\cdot)$ eine injektive Auflösung von $i_*(G)$. Denn i_* ist ein exakter Funktor und es gilt

<u>Lemma:</u> Der direkte Bild Funktor f_* führt injektive Garben in injektive Garben über. Ist j offene Einbettung, dann bildet j^{-1} ebenfalls injektive Garben in injektive Garben ab.

<u>Beweis:</u> f_* besitzt den exakten linksadjungierten Funktor f^{-1}. Also ist $Hom_Y(-, f_*I) = Hom_X(f^{-1}(-), I)$ exakter Funktor (I injektiv). Analog besitzt j^{-1} den exakten linksadjungierten Funktor $j_!$ im Fall offener Einbettungen (2.Adjunktionsformel).

<u>Bemerkung:</u> Ist $F : A \to B$ ein linksexakter kovarianter Funktor zwischen abelschen Kategorien und A habe genügend viele injektive Objekte. Dann sind die derivierten Funktoren F^i (bis auf Isomorphie) eindeutig charakterisiert durch die Eigenschaften: $F^0 = F$, $F^i(I) = 0$ für I injektiv und $i > 0$ und die Tatsache, daß die F^i funktoriell kurzen exakten Sequenzen in A lange exakte Sequenzen in B zuordnen.

<u>Beweis:</u> Siehe Lemma 1 des nächsten Abschnitts. Es folgt nämlich (mit den dortigen Bezeichnungen)

$$F^i(G) \cong F^0(B^{i-1})/F^0(X^{i-1}) \quad (i > 0)$$

für eine injektive Auflösung $X^\cdot$ von G.

Dieser Isomorphismus ist funktoriell. Dies zeigt man mit Hilfe des folgenden Lemmas (der Beweis ist eine Diagrammjagt)

<u>5-Lemma:</u> Sind zwei exakte Sequenzen gegeben mit

$$\begin{tikzcd}
G_1 \arrow[r] \arrow[d, two heads] & G_2 \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & G_3 \arrow[r] \arrow[d] & G_4 \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & G_5 \arrow[d, hook] \\
H_1 \arrow[r] & H_2 \arrow[r] & H_3 \arrow[r] & H_4 \arrow[r] & H_5
\end{tikzcd}$$

dann folgt $G_3 \cong H_3$.

Beispiel: Für $X = \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ hat man eine exakte Sequenz

$$0 \to 2\pi i\mathbb{Z} \to O(X) \to O^*(X) \xrightarrow{\delta} H^1(X, 2\pi i\mathbb{Z}) \to H^1(X, O)$$

$$2\pi i\mathbb{Z}$$

$$\oint \frac{g'(z)}{g(z)} dz$$

Kohomologietheorie liefert hier also einen algebraischen Ersatz für eigentlich "transzendent" aussehende Konstruktionen wie Integrale in der Bildung $\delta : g(z) \mapsto \oint \frac{g'(z)}{g(z)} dz$.

§10 F-azyklische Objekte

Sei A eine abelsche Kategorie mit genügend vielen injektiven Objekten. Sei

$$F : A \to B$$

ein linksexakter, kovarianter Funktor in eine abelsche Kategorie B mit seinen derivierten Funktoren F^i.

Definition: Ein Objekt X von A heißt F-azyklisch, falls gilt

$$F^i(X) = 0 \quad i > 0 \ .$$

Beispiele: 1) Injektive Objekte sind F-azyklisch.

2) Wolkenkratzergarben $(i_x)_*(G)$, G abelsche Gruppe, sind Γ-azyklisch.

Ein Komplex $(X^\cdot, d^\cdot) : 0 \to X^0 \to X^1 \to ...$ bestehend aus F-azyklischen Objekten X^i heißt F-azyklische Auflösung von G (in A), falls $H^0(K^\bullet) \cong G$ und falls $H^i(X^\cdot) = 0$ gilt für $i \neq 0$.

1.Lemma: Für eine F-azyklische Auflösung $X^\cdot$ von G in A gilt

$$F^i(G) \cong H^i(F(X^\cdot)) \ .$$

Beweis: Der Fall $i = 0$ ist trivial. Setze $B^i = Bild(d^i)$. Man hat kurze exakte Sequenzen

$$0 \to G \to X^0 \to B^0 \to 0$$

$$0 \to B^0 \to X^1 \to B^1 \to 0$$

$$....$$

Man erhält aus der ersten kurzen exakten Sequenz mittels der langen exakten Sequenz

$$F^i(G) \cong F^{i-1}(B^0) \quad i \geq 2$$

$$F^1(G) \cong H^1(F(X^\cdot)) \quad i = 1 \ .$$

Letzteres wegen

$$\begin{tikzcd}
F(G) \arrow[r, hook] & F(X^0) \arrow[r] \arrow[dr, "F(d)"'] & F(B^0) \arrow[r] \arrow[d, hook] & F^1(G) \arrow[r] & 0 \\
 & & F(X^1) \arrow[d] \arrow[dr, "F(d)"] & & \\
 & & F(B^1) \arrow[r, hook] & F(X^2) &
\end{tikzcd}$$

Die Aussage folgt somit für $i = 1$. Ersetzt man nun G durch B^0 und $X^0 \to X^1 \to ...$ durch $X^1 \to X^2 \to ...$, so folgt die Behauptung durch Rekursion.

Definition: Eine Garbe G heißt welk, wenn ihre Restriktionsabbildungen surjektiv sind. Eine Garbe G heißt schlaff, wenn für alle $J = I/G$ die Abbildungen $\pi : I(U) \to J(U)$ surjektiv sind für alle U offen in X. (Äquivalent dazu ist $H^1(U, G) = 0$ für alle U offen).

2.Lemma: Welk impliziert schlaff.

Beweis: Sei $s \in J(U)$. Sei (V, t) maximal mit $V \subset U$ und $t \in I(V)$ mit $\pi(t) = res(U, V)(s)$ (Zorns Lemma und Axiom G2). Behauptung: $U = V$. Andernfalls wähle $x \notin V$, eine Umgebung V' von x und $t' \in I(V')$ mit $\pi(t') = res(U, V')(s)$. Dann gilt $g = res(t) - res(t') \in G(V \cap V')$. Man kann t' durch $g' \in G(V')$ so abändern, daß gilt $g = 0$ (G ist welk!). Verheftung von t mit t' liefert dann einen Widerspruch zur Maximalität von (V, t).

Für den Schluß reicht G Cech-welk, d.h daß für alle V, V' offen die Abbildung $G(V) \oplus G(V') \to G(V \cap V')$ surjektiv ist. Es folgt: welk impliziert Cech-welk impliziert schlaff.

3.Lemma: Injektiv impliziert welk impliziert Cech-welk impliziert schlaff impliziert f_*-azyklisch für alle f impliziert Γ-azyklisch.

Beweis: 1) Betrachte für U offen in X die Garbe $\mathbb{Z}_U = j_!(\mathbb{Z}|U)$ auf X. Man hat für $V \subset U$ offen (betrachte die Halme!)

$$\mathbb{Z}_V \hookrightarrow \mathbb{Z}_U \ .$$

Für Garben G auf X gilt $G(U) = Hom_U(\mathbb{Z}_n, G|U) = Hom_U((\mathbb{Z}_n)^+, j^{-1}G) = Hom_X(\mathbb{Z}_U, G)$ wegen der 2.Adjunktionsformel. Aus G injektiv folgt daher G welk

$$G(U) \twoheadrightarrow G(V) \ .$$

2) Sei G schlaff. Wähle $G \hookrightarrow I$ mit I injektiv (welk), dann ist $J = G/I$ welk (Kern-Kokern Sequenz!), also insbesondere auch schlaff. Wir wollen zeigen, daß

$$0 \to f_*(G) \to f_*(I) \to f_*(J) \to 0$$

exakt ist. Dann folgt wegen $R^1 f_*(I) = 0$ sofort $R^1 f_*(G) = 0$. Analog $R^i f_*(G) \cong R^{i-1} f_*(J)$ für $i \geq 2$. Man schließt dann $R^i f_* G = 0, i \geq 2$ per Induktion nach i. Zur Existenz der obigen kurz exakten Sequenz genügt Exaktheit des Schnittfunktors für V offen in Y. Dazu genügt wiederum

$$0 \to G(U) \to I(U) \to J(U) \to 0$$

für alle $U = f^{-1}(V)$ offen in X. Benutze dazu nun, daß G schlaff ist!

Bemerkung: Für parakompakte C^∞-Mannigfaltigkeiten gibt es für offene Vereinigungen $W = V \cup V'$ immer C^∞ Funktionen $p_V, p_{V'}$ mit Träger in V resp. V' und $1 = p_V + p_{V'}$ auf W (Partition der 1). Somit ist für $f \in C^\infty(V \cap V')$ dann $f = fp_V + fp_{V'}$ und $fp_V \in C^\infty(V')$ (Nullfortsetzung) und $fp_{V'} \in C^\infty(V)$ (Nullfortsetzung). Somit ist $C^\infty(X)$ (oder jede C^∞-Modulgarbe) eine Cech-welke Garbe, also Γ-azyklisch.

II AFFINE SCHEMATA

§1 Affine algebraische Geometrie

R kommutativer Ring mit 1 (im folgenden alle Ringe komm. mit 1)

$Spec(R)$= Menge der Primideale von R

Zariskitopologie auf $Spec(R)$: $A \subset Spec(R)$ abgeschlossen genau dann wenn

$$A = Z(I), I \text{ Ideal von } R \ .$$

Hierbei bezeichne $Z(I)$ die Menge derjenigen Primideale von R, welche I umfassen.

Man hat einen (kontravarianten) Funktor von der Kategorie der kommutativen Ringe mit 1 und Ringhomomorphismen in die Kategorie der topologischen Räume mit stetigen Abbildungen

$Spec$: Ring $\to$ Top

Einem Ringhomomorphismus $f : R \to R'$ wird dabei zugeordnet die stetige Abbildung

$$Spec(f) : Spec(R') \to Spec(R)$$

definiert durch $Spec(f)(p) = f^{-1}(p)$ (Urbild eines Primideals ist wieder Primideal!)

Eine wichtige Rolle spielt die

Lokalisierung: Sei $f \in R$. Zugeordnet ist ein Ringhomomorphismus

$$\phi : R \to R_f \cong R[X]/(Xf - 1) \ .$$

Dieser Ringhomomorphismus ist universell: Jeder Ringhomomorphismus $\psi : R \to R'$, welcher f auf eine Einheit $\psi(f) \in (R')^*$ abbildet, faktorisiert in eindeutiger Weise über die Lokalisierung $R \to R_f$.

Man zeigt nun leicht (s. Atiyah MacDonald), daß

$$Spec(\phi) : X_f = Spec(R_f) \to X = Spec(R)$$

eine Inklusion ist. Das Bild ist eine offene Menge, das Komplement die abgeschlossene Menge $Z(I)$ der Primideale, welche das Hauptideal $I = (f)$ enthalten

$$X = X_f \cup Z(f) \ .$$

Ist $x \in U$, U offen mit abgeschlossenem Komplement $Z(I)$. Dann existiert $f \in I$ mit $f \notin p_x$, d.h. $x \in X_f \subseteq U$. Die X_f bilden daher eine Basis der Zariski Topologie.

$f \in R$ kann als Funktion $f : X \to \oplus_{x \in X} R/p_x$ aufgefaßt werden mit $f(x) := f \ mod \ p_x \in R/p_x \subset \oplus_{x \in X} R/p_x$. X_f ist die Menge aller $x \in X$ mit $f(x) \neq 0$. Da R/p_x nullteilerfrei ist, folgt

Fakt: Für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ gilt (Potenzierungstrick)

$$X_{f^n} = X_f \ .$$

Weiterhin gilt

$$X_{f_1} \cap X_{f_2} = X_{f_1 f_2} \ .$$

Allgemeiner sei S mit $1 \in S$ eine multiplikativ abgeschlossene Menge in R, dann existiert ein Lokalisierungshomomorphismus $R \to S^{-1}R$, universell mit der Eigenschaft, daß Elemente aus S auf Einheiten abgebildet werden. Es gilt

$$S^{-1}R = \{r/s \mid s \in S, r \in R\}/ \equiv$$

wobei $r/s \equiv r'/s'$ genau dann wenn ein $s'' \in S$ existiert mit

$$(rs' - r's)s'' = 0$$

in R. Es gilt $S^{-1}R = 0$ genau dann wenn gilt $0 \in S$.

Ein wichtiger Spezialfall: $S = R \setminus p_x$ mit p_x Primideal in R.
Die zugehörige Lokalisierung $R_x = (R \setminus p_x)^{-1}R$ ist ein lokaler Ring. Das eindeutige maximale Ideal von R_x wird erzeugt vom Bild von p_x in R_x.

Das Nilradikal Das Nilradikal $Rad(0)$ eines Ringes R ist $\{r \in R \mid \exists \ n \in \mathbb{N}, \ r^n = 0\}$. Dies ist ein Ideal in R mit

$$Rad(0) = \bigcap_{x \in Spec(R)} p_x \ .$$

Die Inklusion $\subset$ ist trivial (p_x Primideale!). Umgekehrt, ist $f \in R$ nicht nilpotent und somit $R_f \neq 0$ (!), dann existiert mindestens ein $x \in Spec(R_f) \subset Spec(R)$, somit $x \notin Z(f)$ bzw. $f \notin p_x$, insbesondere also nicht im Durchschnitt aller p_x. Es folgt:

$$Z(0) = Z(I) \quad (I \text{ Ideal})$$

gilt genau dann wenn gilt

$$0 \subset I \subset Rad(0) \ .$$

$Spec(R)$ ist ein <u>quasikompakter</u> Raum. Gegeben sei eine offene Überdeckung, obdA von der Form

$$Spec(R) = \cup_i Spec(R_{f_i}) \ .$$

Es folgt $\cap Z(f_i) = Z(\sum Rf_i) = \emptyset$, also $I = \sum Rf_i = R$ (sonst ex. max. Ideal über I) und

$$\sum c_i f_i = 1 \quad (\text{für } c_i \in R)$$

(endliche Summe!). Somit gilt bereits $R = \sum Rf_i$ (endliche Summe!) und endliche viele $Spec(R_{f_i})$ überdecken X. Umgekehrt liefern $f_1, ..., f_n \in R$ mit $\sum c_i f_i = 1, c_i \in R$ eine offene Überdeckung $X = \cup_i X_{f_i}$.

Im allgemeinen sind beliebige offene Teilmengen von $Spec(R)$ <u>nicht</u> mehr quasikompakt. Dies ist jedoch immer dann der Fall, wenn der Ring <u>noethersch</u> ist, z.B. also wenn R endlich erzeugt ist als Ring über $\mathbb{Z}$ oder über einem Körper k.

§2 Modulgarben auf geringten Räumen

Eine Ring(prä)garbe ist eine (Prä)garbe, deren Schnittgruppen (komm.) Ringe sind und deren Restriktionsabbildungen Ringhomomorphismen sind. Ein topologischer Raum X versehen mit einer Ringgarbe O_X heißt geringter Raum. Alle Halme O_x sind Ringe. Unter einem Morphismus

$$(f, f') : (X, O_X) \to (Y, O_Y)$$

zwischen geringten Räumen versteht man eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ zusammen mit einem Garbenring(!)homomorphismus

$$f' : O_Y \to f_*(O_X)$$

von Ringgarben auf Y, welcher den Pullback von Schnitten beschreibt: Wir schreiben daher auch $\phi \circ f$ anstatt $f'(\phi)$.

Ist (X, O_X) ein geringter Raum, dann ist eine O_X-Modul(prä)garbe M eine (Prä)Garbe auf X, so daß alle Schnitträume $M(U)$ Moduln unter $O_X(U)$ sind und alle Restriktionen Modulhomomorphismen. Ein Garbenhomomorphismus von O_X-Garben $\phi : M \to N$ heißt O_X-linear,

$$\phi \in Hom_{O_X}(M, N) \ ,$$

wenn alle Abbildungen $\phi_U : M(U) \to N(U)$ $O_X(U)$-linear sind. Dies definiert eine Unterkategorie Mod_X von Ab_X.

Diese Kategorie erlaubt Summenbildung. Das Tensorprodukt ist die zur Prägarbe

$$\big(M \otimes_{O_X} N\big)(U) = M(U) \otimes_{O_X(U)} N(U)$$

assoziierte Garbe. Die Prägarbe

$$U \mapsto Hom_{O_X|U}(M|U, N|U)$$

definiert eine O_X-Modulgarbe genannt $\mathcal{H}\mathrm{om}_{O_X}(M, N)$. Ist M eine O_X-Modul Prägarbe, dann ist die assozierte Garbe eine O_X-Modulgarbe. Somit sind Kern und Bild und Kokern von O_X-linearen Garbenhomomorphismen O_X-Moduln. Die Kategorie Mod_X ist somit eine abelsche Kategorie. Eine Sequenz von O_X-Moduln ist exakt in Mod_X genau dann wenn sie exakt in Ab_X ist.

Modulgarben $O_X^r = \oplus_{i=1}^r O_X$ heißen frei vom Rang r. Eine Modulgarbe M heißt lokal frei, wenn es eine Überdeckung U_i von X mit $M|U_i \cong O_{U_i}^{r_i}$ gibt. Der Rang ist in diesem Fall eine lokalkonstante Funktion. Eine lokalfreie Garbe vom Rang 1 nennt man Linienbündel.

Untermodulgarben von O_X nennt man Idealgarben. Ist $(f,f'):(X,O_X)\to(Y,O_Y)$ ein Morphismus geringter Räume, dann hat man

$$0\to J\to O_Y\stackrel{f'}{\to} f_*(O_X)\ .$$

J ist eine O_Y Idealgarbe auf Y. Mittels der Adjunktionsformel liefert f' einen Garbenring(!)homomorphismus

$$f^{-1}(O_Y)\to O_X\ .$$

Ist M eine Modulgarbe auf X, dann wird $f_*(M)$ eine $f_*(O_X)$ Modulgarbe und via f' eine O_Y Modulgarbe auf Y. Man erhält einen Funktor

$$f_*:Mod_X\to Mod_Y\ .$$

Ist N eine O_Y Modulgarbe auf Y, dann wird $f^{-1}(N)$ eine $f^{-1}(O_Y)$ Modulgarbe und $f^*(N)=f^{-1}(N)\otimes_{f^{-1}(O_Y)}O_X$ eine O_X Modulgarbe via der adjungierten Abbildung zu f'. Man erhält einen Funktor

$$f^*:Mod_Y\to Mod_X\ .$$

Es gilt $f^*(M\otimes_{O_Y}N)=f^*(M)\otimes_{O_X}f^*(N)$. Benutze universelle Eigenschaften und Halmkriterium.

Beispiel: $f^*(O_Y)=O_X$ (per Definition!)

Beispiel: Ist $f:U\hookrightarrow X$ eine offene Einbettung, dann gilt $f^*(G)=f^{-1}(G)=G|U$ (Restriktion).

Es gilt die Adjunktionsformel

$$Hom_{O_X}(f^*(N),M)\cong Hom_{f^{-1}(O_Y)}(f^{-1}(N),M)\cong Hom_{O_Y}(N,f_*(M))$$

für die Funktoren f_* und f^*. Im allgemeinen ist jedoch f^* (im Gegensatz zu f^{-1} nicht mehr exakt.

Beispiel (Vorgriff auf §3): Sei $R=\mathbb{Z}_p$ und $i:x\to X$ der abgeschlossene Punkt in $X=Spec(R)$. Sei $O_X(X)=R, O_X(\emptyset)=0$ und $O_Y(Y)=R/p$. Dann sind $i^{-1}(O_X)=R_x=R$ und $i^*(O_X)=R/p$ verschiedene Ringgarben auf Y, falls i die abgeschlossene Immersion ist gebildet zu $R\to R/p$.

Projektionsformel: Ist $f:(X,O_X)\to(Y,O_Y)$ ein Morphismus in der Kategorie der geringten Räume, M eine O_X-Modulgarbe und N eine lokalfreie O_Y-Modulgarbe auf Y, dann ist der natürliche Morphismus

$$f_*(M)\otimes_{O_Y}N\to f_*(M\otimes_{O_X}f^*(N))$$

ein Isomorphismus.

Beweis: Die Adjunktionsformel liefert eine natürliche Abbildung $f^* f_*(M) \to M$ und somit eine natürliche Abbildung von $f^* f_*(M) \otimes_{O_X} f^*(N)$ nach $M \otimes_{O_X} f^*(N)$. Die dazu adjungierte Abbildung betrachten wir. Um zu zeigen, daß sie ein Isomorphismus ist, genügt es zu lokalisieren. Wir können daher obdA annehmen $N = O_Y^r$ und $f^*(N) = O_X^r$. Dann ist die Aussage aber trivial.

Bemerkung: Mod_X hat genügend viele injektive Objekte. Hinweis: Kopiere den Beweis für Ab_X mittels Adjunktionsformel (für i_x^{-1} !), und benutze daß die Kategorien der Ringmoduln genügend viele injektive Objekte besitzt. Wende dies an auf die Ringe $O_{X,x}$ und betrachte die Abbildungen $(x, O_{X,x}) \to (X, O_X)$ in der Kategorie der geringten Räume.

Ein analoges Argument wie für Ab_X zeigt

Lemma: Jede injektive Garbe in Mod_X ist welk.

Folgerung: Sei $(f, f') : (X, O_X) \to (Y, O_Y)$ ein Morphismus geringter Räume, dann hat man für die direkten Bilder folgendes kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} R^i f_* : Mod_X \arrow[r] \arrow[d, "Vergiss"'] & Mod_Y \arrow[d, "Vergiss"] \\ R^i f_* : Ab_X \arrow[r] & Ab_Y \end{tikzcd}$$

denn der Vergißfunktor $Mod_X \to Ab_X$ ist ein exakter Funktor, welcher injektive Objekte in welke (also azyklische) Objekte überführt. (Ein analoges Diagramm hat man für die Kohomologiegruppen).

Unter den Vorausetzungen der Projektionsformel gilt dann sogar

$$R^i f_*(M) \otimes_{O_Y} N \cong R^i f_*(M \otimes_{O_X} f^*(N)) \ .$$

Beweis: Beide Seiten definieren Funktoren in M, welche kurze exakte Sequenzen in lange exakte Sequenzen überführen. Beide stimmen für $i = 0$ überein. Die linke Seite annuliert injektive M für alle $i \geq 1$. Die rechte Seite auch, denn direktes Bild vertauscht mit offenem Basiswechsel (siehe §7) und Einschränkungen injektiver Moduln auf offene Teilmengen sind welk! Somit sind beide Seiten isomorph.

§3 Schemata

Ein geringter Raum (X, O_X) heißt lokal geringter Raum, falls alle Halme O_x lokale Ringe (d.h. mit einem einzigen maximalen Ideal) sind. Unter einem Morphismus

$$(f, f') : (X, O_X) \to (Y, O_Y)$$

zwischen lokal geringten Räumen versteht man einen Morphismus geringter Räume mit der zusätzlichen Eigenschaft, daß für alle Punkte $x \in X$ der Ringhomomorphismus

$$O_{Y,f(x)} = lim_{V,f(x)\in V}\ O_Y(V) \overset{f'_V}{\to} lim_{V,f(x)\in V}\ O_X(f^{-1}(V)) \overset{res}{\to} lim_{U,x\in U}\ O_X(U) = O_{X,x}$$

ein lokaler Homomorphismus ist, d.h. das Urbild des eindeutigen maximalen Ideals ist wieder das maximale Ideal!

Definition: Wir definieren nun einen kontravarianten Funktor $Spec$

$$Spec\text{: } \underline{\text{Ring}} \to \underline{\text{lokal.ger.Räume}}$$

$$R \to (X, O_X) \quad , \quad (X = Spec(R)) \ .$$

Einem Ring R wird der topologische Raum $X = Spec(R)$ zuordnet mit der Strukturgarbe O_X, welche durch Vergarbung

$$O_X = (O_{X,n})^+$$

der Ringgarbe $O_{X,n}(U) = S_U^{-1}R$ entsteht, definiert durch $S_U = \{s \in R \mid s(x) \neq 0\ \forall x \in U\}$.

1.Lemma: $O_{X,x} \cong R_x$ ($O_{X,x}$ ist also ein lokaler Ring!)

Beweis: Sei $k \in Kern(\phi)$ im Kern des surjektiven Ringhomomorphismus

$$\phi:\ (O_X)_x = (O_{X,n})_x = lim_{U\ni x} S_U^{-1}R \ \twoheadrightarrow\ S_x^{-1}R = R_x\ .$$

Lokal wird k repräsentiert durch $k = r/f \in S_U^{-1}R$ mit $f \in S_U$, also $f \notin p_x$. Ist das Bild von k in R_x null, existiert ein $f' \notin p_x$ mit $f' \cdot r = 0$ in R. Dann gilt $ff' \notin p_x$, d.h. $x \in X_{ff'}$. Aus $res(X_f, X_{ff'})(k) = f'r/f'f = 0$ folgt $k = 0$ in $O_{X,n}(X_{ff'})$ und somit $k = 0$ im Halm $(O_{X,n})_x$. Also $Kern(\phi) = 0$.

2.Lemma: $O_{X,n}(X_f) = R_f$.

Beweis: Für $U = X_f$ ist $f \in S_U$. Umgekehrt ist jedes $s \in S_U$ ist eine Einheit in R_f, denn offensichtlich gilt $Z(s) \subset Z(f)$. Also $f \in Rad(s)$. Somit $\exists n,\ f^n = r \cdot s$. Da $f/1 \in (R_f)^*$ also $s/1 \in (R_f)^*$. Daher $\phi : R_f \cong S_U^{-1}R_f = S_U^{-1}R$ bezüglich der universellen Abbildung ϕ.

Lemma 1 und 2 liefern folgende explizite Beschreibung

$$O_X(U) = \{ s : U \to \bigcup_{x \in U} R_x \mid s \text{ erfüllt (*) } \}$$

wobei die Bedingung (*) bedeute

1) $s(x) \in R_x$ für alle $x \in U$.

(Hierbei sei $R_x = S^{-1}R, S = R \setminus p_x$ der lokale Ring bei x mit maximalem Ideal $S_x^{-1}p_x$)

2) Für jedes $x \in U$ existiert eine Umgebung $V = Spec(R_f) \subset U$ von x (insbesondere $x \notin Z(f)$ bzw. $f \notin p_x$ bzw. $f \in R \setminus p_x$) und ein $\sigma \in R_f$ mit der Eigenschaft

$$s(y) = Bild(\sigma \in R_f \to R_y) \quad (\forall\ y \in V)\ .$$

Bemerkung: Ein Ringhomomorphismus $\psi : T \to R$ induziert eine Abbildung $f : X \to Y$ zwischen den Spektren. Definiere

$$f' :\ O_Y(U) \to f_*O_X(U) = O_X(f^{-1}(U))$$

durch $O_Y(U) \ni s \mapsto f'(s) \in O_X(f^{-1}(U))$. Hierbei sei $f'(s) : f^{-1}(U) \to \bigcup_{x \in f^{-1}(U)} R_x$ durch $s : U \to \bigcup_{y \in U} T_y$ vermöge des Diagramms (**lok**) definiert

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r] \arrow[d, "\psi"'] & T_{f(x)} \arrow[d, dotted] & \ni & s(f(x)) \arrow[d, mapsto] \\ R \arrow[r] & R_x & \ni & f'(s)(x) \end{tikzcd} \ .$$

Beachte $x \in f^{-1}(U) \Longrightarrow y = f(x) \in U$. Der rechte vertikale Ringhomomorphismus $\psi(t/s) = \psi(t)/\psi(s)$ ist ein lokaler Homomorphismus $T_{f(x)} \to R_x$: Wegen $\psi(S_y^{-1} \cdot p_y) \subset S_x^{-1}p_x$ gilt $\psi^{-1}(S_x^{-1}p_x) \supset S_y^{-1}p_y$. Andererseits gilt $\psi^{-1}(S_x^{-1}p_x) \subset S_y^{-1}p_y$, denn aus $\psi(t/s_y) \in S_x^{-1}p_x$ folgt $\psi(t) \in S_x^{-1}p_x \cap R = p_x$ respektive $t \in \psi^{-1}(p_x) = p_y$.

Bemerkung: $O_{X,n} \hookrightarrow O_X$ ist eine Unterprägarbe.

Mit anderen Worten, die kanonischen Abbildungen $\phi_U : S_U^{-1}R \to O_X(U)$ sind injektiv. Für $r/s \in Kern(\phi_U)$ gilt $\forall x \in U\ \exists \rho_x \in R \setminus p_x$ mit $\rho_x \cdot r = 0$ in R. Das Annulatorideal $Ann(r) \subset R$ erfüllt daher $Ann(r) \not\subset p_x$ für alle $x \in X$. Da jedes echte Ideal mindestens in einem maximalen Ideal (Primideal!) enthalten ist, folgt daher $Ann(r) = R$, also $r = 0$ bzw. $r/s = 0$.

Äquivalenzlemma: Die Kategorie Ring der komm. Ringe mit 1 ist (antiäquivalent) zu einer vollen Unterkategorie der Kategorie der lokal geringten Räume, nämlich der Kategorie der affinen Schemata.

Beweis: Wir zeigen zuerst, daß R aus $(Spec(R), O_{Spec(R)})$ rekonstruiert werden kann. Dies erfolgt mittels des Schnittfunktors Γ

$$\Gamma: \ \underline{\text{lok.ger.Räume}} \to \underline{\text{Ring}}$$

$$(X, O_X) \to H^0(X, O_X) \ .$$

Behauptung: Es gilt $\Gamma \circ Spec \cong id_{Ring}$.

Wegen Lemma 2 (für $f = 1$) und wegen der letzten Bemerkung ist der kanonische Ringhomomorphismus ϕ_X injektiv

$$\phi_X: \ R = H^0(X, O_{X,n}) \hookrightarrow H^0(X, O_X) \ .$$

Also genügt zu zeigen

$\underline{\phi_X \text{ ist surjektiv:}}$ Ein globaler Schnitt $s \in H^0(X, O_X)$ ist auf einer Überdeckung $X = \cup X_{f_i}$ repräsentiert durch lokale Schnitte

$$s_i = r_i/f_i \ mod \ \equiv \quad (\text{ in } R_{f_i}) \ .$$

(bei geeigneter Wahl der f_i mittels Potenzierungstrick!) Da X quasikompakt ist, genügen endlich viele i. Auf den Durchschnitten $X_{f_i} \cap X_{f_j} = X_{f_i f_j}$ stimmen die Halme überein und wie oben (Injektivität von ϕ) folgt $Bild(s_i) = Bild(s_j)$ in $R_{f_i f_j}$, d.h.

$$(f_i f_j)^{n_{ij}} \cdot (r_i f_j - r_j f_i) = 0 \qquad \text{für geeignete } n_{ij} \in \mathbb{N} \ .$$

ObdA $n = n_{ij}$ unabhängig von i, j. Der Potenzierungstrick liefert durch Umbenennen $f_i^{n+1} \mapsto f_i$ und $r_i f_i^n \mapsto r_i$ obdA

$$(*) \quad f_j r_i = f_i r_j \ \in R \qquad \text{für alle i,j} \ .$$

Da die X_{f_i} den Raum X überdecken, gilt

$$\sum c_i f_i = 1$$

für geeignete $c_i \in R$. Setze

$$r = \sum_i c_i r_i \in R \ .$$

Es folgt $\phi_X(r) = s$. Wegen Garbenaxiom G1) genügt dazu $Bild(r) \equiv r_j/f_j = s_j$ in R_{f_j}. Letzteres folgt aus

$$f_j \cdot r - 1 \cdot r_j \ = \ f_j(\sum_i c_i r_i) - r_j \overset{(*)}{=} (\sum_i c_i f_i) r_j - r_j = 0 \ .$$

Volle Unterkategorieeigenschaft: Nun zeigen wir noch, daß jeder Morphismus lokal geringter Räume

$$(f, f') : (Spec(R), O_{Spec(R)}) \to (Spec(T), O_{Spec(T)})$$

von einem Ringhomomorphismus $T \to R$ induziert wird.

f' induziert zunächst einen Ringhomomorphismus der globalen Schnitte

$$H^0(f') : T \to R \quad ,$$

welcher mit den Restriktionen zu den lokalen Abbildungen

$$(f')_x : T_{f(x)} \to R_x$$

für alle $x \in X = Spec(R)$ vertauscht. Wir müssen zeigen, daß der Ringhomomorphismus $\psi = H^0(f')$ wieder das Paar (f, f') induziert. Die Abbildung $Spec(H^0(f'))$ bildet aber x auf $f(x)$ ab. Dies folgt aus der Tatsache, daß (f, f') ein Morphismus von lokal geringten Räumen ist.

Es bleibt zu zeigen, daß die Abbildungen f' und $Spec(H^0((f, f'))$ übereinstimmen. Es genügt, daß die Differenz der beiden Abbildungen Null ist. Dazu genügt, daß die Differenz der Halmabbildungen Null ist. Dies ist aber durch Vergleich mit dem Diagram (**lok**) leicht zu zeigen.

3.Lemma: $O_X|X_f \cong O_{X_f}$ für $X = Spec(R)$.

Somit wegen des Äquivalenzlemmas

3.Lemma': $O_X(X_f) \cong R_f$ für $X = Spec(R)$ und $f \in R$.

Beweis von Lemma 3 und 3': Offensichtlich gilt $O_{X,n}|X_f \cong O_{X_f,n}$. Da Vergarben mit Einschränkung auf offene Teilmengen vertauscht $G^+|U = (G|U)^+$, folgt Lemma 3. Lemma 3' folgt dann aus Lemma 3 und dem Äquivalenzlemma 2

$$O_X(X_f) = O_X|X_f(X_f) = O_{X_f}(X_f) = R_f \quad .$$

Definition: Die Kategorie der Schemata ist definiert als die volle Unterkategorie aller lokal geringten Räume (X, O_X), welche eine Überdeckung besitzen $X = \cup_i X_i$, derart daß alle $(X_i, O_X|X_i)$ in der Kategorie der lok.ger.Räume zu affinen Schemata isomorph sind.

Affine Schemata $\subset$ Schemata $\subset$ lok.ger.Räume

Die Notation X_f: Sei X ein beliebiges Schema und $f \in H^0(X, O_X)$ ein globaler Schnitt. Dann definiert $X_f = \{x \in X \mid f(x) \neq 0(!)\}$ eine Teilmenge von X. Auf jeder affinen Karte induziert dies eine entsprechende Teilmenge im alten Sinn, insbesondere ist X_f somit offen in X. Es gilt $X_{f_1} \cap X_{f_2} = X_{f_1 f_2}$ und $X_{f^n} = X_f$ per Definition.

<u>Definition:</u> Für jede offene Teilmenge U eines Schemas (X, O_X) definiert die Einschränkung der Strukturgarbe ein Schema (!), ein sogenanntes <u>offenes Unterschema</u> $(U, O_X|U)$.

<u>Beweis:</u> Sei $X = \bigcup_i X_i$ eine affine Überdeckung. Die $U \cap X_i$ überdecken U. $U \cap X_i \subset X_i = Spec(R_i)$ läßt sich wiederum durch affine Basismengen $X_{ij} = Spec((R_i)_{f_j}$ überdecken. Aber $(U, O_U)|X_{ij} = (X_i, O_{X_i})|X_{ij} = Spec(R_i)|X_{ij}$ (im Sinn lok. ger. Räume) liefert nach Lemma 3 das affine Schema $(X_{ij}, O_{X_{ij}}) = Spec((R_i)_{f_j})$. Also wird $(U, O_X|U)$ durch offen affine Teilschemata überdeckt, und ist somit ein Schema.

<u>Bemerkung:</u> Im allgemeinen ist ein offenes Unterschema eines affinen Schemes nicht mehr affin.

<u>Beispiel:</u> Sei $R = \mathbb{C}[x, y]$. Das von x und y erzeugte maximale Ideal p definiert einen abgeschlossenen Punkt von $(X, O_X) = Spec(R)$. Also ist $U = X \setminus \{p\}$ offen. Das zugehörige offene Unterschema (U, O_U) ist nicht affin! Denn $X_x = U_x$ und $X_y = U_y$ sowie $U_x \cap U_y = X_{xy}$ sind affin und überdecken U. Aus den Garbenaxiomen (und Lemma 3') folgt

$$O_X(U) = Kern(R_x \oplus R_y \to R_{xy}) \ .$$

Also $res(X, U) : R = O_X(U)$. (Benutze R faktoriell; aus $P(x, y)/x^n = Q(x, y)/y^m$ für Polynome P, Q folgt $x^n|P$ und $y^m|Q$). Wäre U affin, würde folgen $U = Spec(H^0(U, O_U)) = Spec(R)$. Das kann aber nicht sein, da in U der Punkt p fehlt.

<u>Definition:</u> Eine <u>offene Immersion</u> $f : (Y, O_Y) \to (X, O_X)$ zwischen Schemata ist per Definition ein Isomorphismus auf ein offenes Unterschema von (X, O_X).

<u>Definition:</u> Ein Schema (Y, O_Y) heißt <u>abgeschlossenes Unterschema</u> eines Schemas (X, O_X), falls es einen Morphismus $(i, i') : (Y, O_Y) \to (X, O_X)$ gibt mit $i : Y \to X$ als abgeschlossener Einbettung und surjektivem Garbenhomomorphismus i'

$$i' : O_X \to i_*(O_Y) \to 0 \ .$$

Eine <u>abgeschlossene Immersion</u> zwischen Schemata ist ein Isomorphismus auf ein abgeschlossenes Unterschema.

§4 Quasikohärente Garben auf Schemata

Definition von $S(M)$: Ist R ein komm.Ring mit 1 und M ein R-Modul, dann definiert

$$S(M)(U) = \{s : U \to \cup_{x\in U} M_x \mid (*)\}$$

mit (*):

1) $s(x) \in M_x = (R \setminus p_x)^{-1}M$ und

2) s wird lokal repräsentiert durch Elemente aus $M_f = S_f^{-1}M$

eine O_X-Modulgarbe auf $X = Spec(R)$.

Analog zu §3 zeigt man nun das

Äquivalenzlemma: Der Funktor S realisiert die Kategorie $Mod(R)$ der R-Moduln als volle Unterkategorie der O_X-Modulgarben auf $X = Spec(R)$. Der Umkehrfunktor ist der Schnittfunktor $G \mapsto \Gamma(G) = H^0(X, G)$.

$$S : Mod(R) \to Mod_X \quad (X = Spec(R))$$

$$M \mapsto S(M) \ .$$

Bemerkung: Mit Hilfe des + Funktors zeigt man, daß für jedes $G \in Mod_X$ ein natürlicher Morphismus

$$S(\Gamma(G)) \to G$$

in Mod_X existiert.

Analog wie in §3, Lemma 3 und 3' zeigt man mit Hilfe des Äquivalenzlemmas die folgende charakteristische Eigenschaft

2.Lemma: $S(M)|X_f = S(M_f)$ bzw. $S(M)(X_f) = M_f$.

Aus der Konstruktion von $S(M)$ ist klar, daß (analog zu §3, Lemma 1) für die Halme gilt

$$S(M)_x = M_x \ .$$

Somit ist der Funktor S exakt, denn lokalisieren $M \mapsto M_f$ ist ein exakter Funktor (Übungsaufgabe !) S ist kompatibel mit der Bildung von $\otimes, \oplus, Hom_?(,)$. (Übungsaufgabe: auch mit Produkten ?)

3.Lemma: Ist $R \to T$ ein Ringhomomorphismus und sei $M \in Mod(R)$. Somit $N \in Mod(T)$ und für $f : Spec(T) \to Spec(R)$ gilt

$$f_*(S(N)) = S(N)$$

und

$$f^*(S(M)) = S(M \otimes_R T) \ .$$

Beweis: Übungsaufgabe!

Definition: Sei (X, O_X) ein Schema. Eine Garbe M in Mod_X heißt quasikohärent, falls es eine affine Überdeckung von X durch $X_i = Spec(R_i)$ gibt mit

$$M|X_i \cong S(M_i)$$

für gewisse R_i Moduln M_i.

Beispiel: $G = O_X$ ist quasikohärent.

Dies definiert die Kategorie Q_X der quasikohärenten Garben als volle Unterkategorie von Mod_X. Wir wollen uns nun überzeugen, daß man auf affinen Schemata $X = Spec(R)$ genau die Kategorie $S(Mod(R))$ dadurch zurückerhält.

4.Lemma: $Q_X = S(Mod(R))$ (beziehungsweise $= Mod(R)$) für affines $X = Spec(R)$.

Beweis: Für jede quasikohärente O_X-Garbe G mit

$$M = H^0(X, G) \in Mod(R)$$

wollen wir zeigen

$$S(M) \cong G \ .$$

Beachte (via + Konstruktion!): Zwei Garben sind isomorph, wenn alle Schnittgruppen isomorph sind (kompatibel mit Restriktionen) auf einer Basis der Topologie (den X_f's).

Die Behauptung folgt daher wegen

$$S(M)(X) = M = G(X)$$

durch Anwenden (auf $S(M)$ und G) der

charakteristischen Eigenschaft quasikohärenter O_X-Moduln G: Für $X = Spec(R)$ affin und $f \in R$ gilt

$$G(X)_f \cong G(X_f) \quad (G \text{ quasikohärent, } X \text{ affin})$$

für alle $X_f \subset X$ in $X = Spec(R)$. Die Isomorphismen sind kompatibel mit Restriktionen.

Bevor wir den Beweis geben, eine Bemerkung: Sei (X, O_X) für den Moment ein beliebiges Schema und f ein globaler Schnitt $f \in H^0(X, O_X)$. Dann hat die Restriktion von f in

$O_X(X_f)$ ein Inverses! Ist nämlich $X = \cup X_i$ eine affine Überdeckung und ist $X_i \cap X_j = \cup_k X_{ijk}$ ein System von affinen Überdeckungen, dann folgt die Behauptung aus

$$0 \longrightarrow O_X(X_f) \longrightarrow \prod_i O_X((X_i)_f) \longrightarrow \prod_{i,j,k} O_X((X_{ijk})_f)$$

mittels des 5-Lemmas (!). Man hat also eine natürliche Abbildung

$$O_X(X)_f \to O_X(X_f)$$

induziert von der Restriktion! Dies induziert wegen der universellen Eigenschaft der Lokalisierung und wegen $G(X)_f = G(X) \otimes_{O_X(X)} O_X(X)_f$ eine natürliche Abbildung

$$G(X)_f \to G(X_f)$$

via $G(X) \otimes_{O_X(X)} O_X(X)_f \to G(X) \otimes_{O_X(X)} O_X(X_f)$.

Die zu zeigende charakteristische Eigenschaft besagt, daß diese Abbildung für affines X und quasikohärentes G ein Isomorphismus ist

$$res : G(X)_f \xrightarrow{\cong} G(X_f) \quad .$$

Anschaulich bedeutet dies folgendes: Jeder Schnitt aus $G(X_f)$ kann durch Multiplikationultiplikation mit einer geeigneten Potenz f^n zu einem Schnitt aus $G(X)$ fortgesetzt werden. Sodann: Ein Schnitt $s \in G(X)$ verschwindet nach Einschränken auf X_f genau dann, wenn gilt $f^n \cdot s = 0$ für ein geeignetes $n \in \mathbb{N}$. Mit anderen Worten: Kern und Kokern der natürlichen Restriktionsabbildung $G(X) \to G(X_f)$ sind f-Torsions-R-Moduln.

Beweis der charakteristischen Eigenschaft: Da Moduln vom Typ $S(M)$ diese charakteristische Eigenschaft erfüllen impliziert G quasikohärent, daß $X = Spec(R)$ eine Überdeckung durch endlich viele affine $X_i = X_{f_i}$ besitzt mit $G|X_i \cong S(M_i)$ für gewisse R_{f_i}-Moduln M_i. Es folgt $G|X_i \cap X_j = G|X_{f_i f_j} = S((M_i)_{f_j})$. Der eigentliche Schluß geht nun wie folgt:

Man startet mit der exakten Sequenz

$$0 \longrightarrow G(X) \longrightarrow \bigoplus_i G(X_i) \longrightarrow \bigoplus_{i,j} G(X_i \cap X_j) \quad .$$

Da Lokalisieren mit endlichen (!) Produkten vertauscht und ein exakter Funktor ist erhält man die Vergleichssequenzen

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & G(X)_f \arrow[r] \arrow[d] & \bigoplus_i G(X_i)_f \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & \bigoplus_{i,j} G(X_i \cap X_j)_f \arrow[d, "\cong"'] \\
0 \arrow[r] & G(X_f) \arrow[r] & \bigoplus_i G(X_i \cap X_f) \arrow[r] & \bigoplus_{i,j} G(X_i \cap X_j \cap X_f)
\end{tikzcd}$$

Mit Hilfe von Lemma 2 und dem Fünferlemma folgt die Behauptung.

Der selbe Schluß zeigt anschließend (unter Benutzung der charakterischen Eigenschaft quasikohärenter Garben im affinen Fall)

<u>Korollar:</u> Sei G eine quasikohärente Garbe auf einem Schema (X, O_X). Besitzt X eine endliche Überdeckung $X = X_{f_i}$ durch affine offene Unterschemata X_{f_i} (gebildet zu globalen Schnitten $f_i \in H^0(X, O_X)$) so gibt es kanonische Isomorphismen

$$G(X)_f \cong G(X_f) \quad \text{für alle } f \in H^0(X, O_X) \ .$$

<u>Korollar(Affinitätskriterium):</u> Ein Schema (X, O_X) ist affin genau dann wenn es endlich viele globale Schnitte $f_i \in H^0(X, O_X)$ gibt so daß die X_{f_i} eine affine Überdeckung bilden und so daß das von den f_i erzeugte Ideal in $H^0(X, O_X)$ gleich $H^0(X, O_X)$ ist.

<u>Beweis:</u> Setze $R = H^0(X, O_X)$ und $Y = Spec(R)$. Wegen $\sum c_i f_i = 1$ überdecken die Y_{f_i} das affine Schema Y. Wir definieren eine Abbildung

$$\phi : X \to Y \ .$$

ϕ bilde $x \in X$ ab auf das Primideal $\{f \in R \mid f(x) = 0\}$. Offensichtlich gilt für alle $f \in R$ dann per Definition

$$(*) \quad \phi^{-1}(Y_f) = X_f$$

Für $f = f_i$ liefert dies

<u>Behauptung:</u> $\phi|X_{f_i} : X_{f_i} \cong Y_{f_i}$ (Homöomorphismen) für alle i.

<u>Beweis der Behauptung:</u> Das letzte Korollar angewandt auf $G = O_X$ gibt $O_X(X_{f_i}) \cong O_X(X)_{f_i} = R_{f_i}$, also da X_{f_i} affin ist somit $X_{f_i} \cong Spec(R_{f_i})$ in der Kategorie der lokal geringten Räume nach §3, Äquivalenzlemma. Insbesondere erhält man den gewünschten lokalen Homöomorphismus. ■

Folglich ist ϕ surjektiv, da die Y_{f_i} den Raum Y überdecken. Andererseits ist ϕ injektiv, denn $\phi(x) = \phi(y)$ (obdA in Y_{f_i}) impliziert wegen (*) $x, y \in X_{f_i}$ und somit wegen der Behauptung $x = y$.

Es bleibt die Homöomorphie der globalen Bijektion ϕ zu zeigen: Aber U offen in X ist äquivalent zu $U \cap X_{f_i}$ offen (alle i) ist äquivalent zu $\phi(U) \cap Y_{f_i}$ offen für alle i (wegen Behauptung) bzw äquivalent zu $\phi(U)$ offen in Y.

Da ϕ ein Homöomorphismus ist, bilden die X_f eine Basis der Topologie von X (da dies für Y gilt). Wir identifizieren die Räume X und Y und schreiben $\phi = id$. Zu zeigen bleibt

$$O_X = S(R) \quad \text{(als Morphismus von lok.ger. Ringgarben)} \ .$$

Es genügt diese Isomorphismus auf einer Basis (den X_f's) der Topologie zu haben - verträglich mit Restriktionsabbildungen. Dies folgt aber aus dem letzten Korollar

$$O_X(X_f) \overset{can\ \sim}{\longleftarrow} O_X(X)_f = R_f \overset{can\ \sim}{\longrightarrow} S(R)(X_f)$$

angewandt auf die kohärenten Garben G und $S(R)$. Dies zeigt $(X, O_X) \cong (Y, O_Y)$ wie behauptet.

<u>Bemerkung:</u> Für $R = \mathbb{C}[x,y]$ und das maximale Ideale $p = (x,y)$ von R war $X = Spec(R)\backslash\{p\}$ nicht affin! Beachte, X_x und X_y sind affin und überdecken X und es gilt $R = H^0(X, O_X)$. Aber das von x und y erzeugte Ideal in R ist eben nicht gleich R.

§5 Permanenzeigenschaften quasikohärenter Garben

Ist $f : X \to Y$ ein Morphismus zwischen Schemata und G quasikohärent auf Y, dann ist $f^*(G)$ quasikohärent auf X (reduziere auf den Fall X, Y affin und §4, Lemma 3!).

Ist X ein Schema und $Y \subset X$ abgeschlossen, dann definiert

$$J_Y(U) = \{s \in O_X(U) \mid s(x) = 0 \ \text{ für alle } x \in Y \cap U\}$$

eine Idealgarbe $J_Y \subset O_X$.

Behauptung: J_Y ist quasikohärent.

Beweis: ObdA ist X affin und $Y = Z(I)$. Dann gilt

$$J_Y = S(\cap_{y \in Y} p_y) \ .$$

Es genügt nämlich, daß beide Garben isomorphe Schnittmengen auf einer Basis, nämlich den X_f Mengen, kompatibel mit Restriktionen besitzen. Dies folgt aus Algebra II.

Bemerkung: Da im affinen Fall $X = Spec(R)$ $Q_X \cong Mod(R)$ eine volle (!) Unterkategorie von Mod_X ist, sind Kerne, Bilder und Kokerne von Morphismen zwischen quasikohärenten Garben wieder quasikohärent. Weiterhin gilt, jede Extension F

$$0 \to G \to F \to G' \to 0$$

quasikohärenter Garben G und G' ist wieder quasikohärent. Hinweis: Betrachte die natürliche Transformation $S \circ \Gamma \to id_{Q_X}$ und verwende das 5-Lemma sowie $H^1(X, G) = 0$ (Serre Kriterium aus §6).

Lemma: Sei $f : X \to Y$ ein Morphismus zwischen Schemata und sei G eine quasikohärente Garbe auf X. Seien X, Y affin oder X ein noetherscher topologischer Raum. Dann ist

$$f_*(G) \in Q_Y \qquad (X \text{ noethersch top. Raum})$$

quasikohärent auf Y.

Beweis: ObdA ist Y affin. Die Behauptung ist klar, falls X auch affin ist wegen §4, Lemma 3. Wir reduzieren auf diesen Fall.

Sei $X = \cup X_i$ eine affine Überdeckung und seien $X_i \cap X_j = \cup X_{ijk}$ affine Überdeckungen. Nach Annahme sind die Überdeckungen obdA endlich. Aus den Garbenaxiomen G1) und G2) folgt die Exaktheit der Sequenz

$$0 \to G \to \bigoplus_i (j_i)_* j_i^*(G) \to \bigoplus_{i,j,k} (j_{ijk})_* (j_{ijk})^*(G)$$

und da f_* links exakt ist folgt daraus

$$0 \to f_*(G) \to \bigoplus_i (fj_i)_* j_i^*(G) \to \bigoplus_{i,j,k} (fj_{ijk})_*(j_{ijk})^*(G) \ .$$

Somit ist $f_*(G)$ als Kern eines Garbenhomomorphismus zwischen quasikohärenten Garben quasikohärent.

Variante: Ist $f : X \to Y$ eine abgeschlossene Immersion, dann gilt $f_*(Q_X) \subset Q_Y$.

Beweis (wie im letzten Lemma ohne noethersch!): Die Annahme an f vererbt sich bei offenem Basiswechsel. ObdA Y affin und damit quasikompakt. Als abgeschlossene Teilmenge ist dann X quasikompakt. X trägt die von $Y = Spec(R)$ induzierte Topologie mit der Basis $X_f = X \cap Y_f, f \in R$. Sei $X = \cup X_i$ eine affine offene Überdeckung. Überdeckt man $X_i = \cup_f X_f$ (mittels geeigneter $f \in R$), sind wegen $X_f = X_f \cap X_i = (X_i)_f$ alle $X_f \subset X_i$ offen affin in X. Somit ist obdA X_i bereits von der Gestalt $X_i = X_{f_i}$ (für $f_i \in R$). Es genügen endlich viele i (Quasikompaktheit von X). Die Durchschnitte $X_i \cap X_j = X_{f_i f_j} = (X_{f_i})_{f_j}$ bleiben affin!

$\S 6$ Kohomologisches Kriterium für affine Räume

Serre Kriterium: Für ein Schema sind äquivalent

1) (X, O_X) ist affin

2) X ist quasikompakt und es gilt $H^1(X, G) = 0$ für alle G quasikohärent auf X.

Korollar: Abgeschlossene Unterschemata Z affiner Schemata X sind affin.

Beweis: $H^1(Z, G) = H^1(X, i_*(G)) = 0$ für $G \in Q_Z$ nach II §5 und I §9 !).

Beweis 2) impliziert 1):

Sei $x \in X$ ein abgeschlossener Punkt. Wähle affine Umgebung von x (mit abgeschlossenem Komplement Y in X). Dann sind Y und $Y \cup \{x\}$ abgeschlossen in X und

$$0 \to J_{Y \cup \{x\}} \to J_Y \to (i_x)_*(k) \to 0$$

ist exakt mit $k = O_{X,x}/p_x O_{X,x}$ (Körper). Wegen 2) folgt

$$0 \to J_{Y \cup \{x\}}(X) \to J_Y(X) \to k \to 0 \ .$$

Es gibt somit einen Schnitt $f \in J_Y(X)$ mit $f(x) = 1$, welcher auf Y verschwindet

$$x \in X_f \subset X \setminus Y \ .$$

X_f ist affin. Die Vereinigung aller solcher X_f enthält jeden abgeschlossenen Punkt und ist somit eine affine Überdeckung $X = \bigcup_f X_f$. (Jede nichtleere abgeschlossene Teilmenge A eines quasikompakten Schemas X enthält einen abgeschlossenen Punkt. Benutze dazu Induktion nach der Zahl affiner Karten). Da X quasikompakt ist, genügen endlich viele solche f. Insbesondere ist dann

$$0 \to K \to \bigoplus_f O_X \overset{\oplus f}{\to} O_X \to 0$$

exakt und $K = Kern(\oplus f)$ ist auch quasikohärent. Wegen 2) folgt

$$\bigoplus_f H^0(X, O_X) \to H^0(X, O_X) \to 0 \ .$$

Somit ist (X, O_X) affin nach $\S 4$.

Beweis 1) impliziert 2):

X affin impliziert X quasikompakt. Den Verschwindungssatz reduzieren wir auf

Definition: Eine Garbe $G \in Mod_X$ auf einem affinen Schema X erfüllt Eigenschaft C_n, falls für jeden globalen Schnitt f und für jedes

$$\xi \ \in \ Kern(H^n(X,G) \to H^n(X_f,G))$$

(wir schreiben wieder G für $G|X_f$) ein $n \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$f^n \cdot \xi = 0 \ .$$

Äquivalent ist $H^n(X,G)_f \hookrightarrow H^n(X_f,G)$.

Behauptung: Sei $n \geq 1$ und X affin. Eigenschaft C_n für G impliziert

$$H^n(X,G) = 0 \ .$$

Beweis der Behauptung: Die Prägarben $U \mapsto H^n(U,G)$ besitzen eine triviale Vergarbung $\mathcal{H}^n(G) = H^n(.,G)^+ = 0$ für $n \geq 1$. (Denn $+$ ist ein exakter Funktor und $H^n(.,G)$ und damit $\mathcal{H}^n(G)$ annuliert injektive Garben G, somit sind $\mathcal{H}^n$ die derivierten des trivialen Funktors $id : Mod_X \to Mod_X$).

Es folgt: Für jedes $\xi \in H^n(X,G)$ und jedes $x \in X$ existiert eine affine Umgebung $X_{f_i}, x \in X_{f_i}$ mit

$$\xi \in Kern(H^n(X,G) \to H^n(X_{f_i},G)) \ .$$

Endlich viele der X_{f_i} überdecken den quasikompakten affinen Raum X.

$$X = \cup_i X_{f_i} \ .$$

Aus Eigenschaft C_n folgt $f_i^n \xi = 0$ und somit wegen $\sum\limits_i c_i^{(n)} f_i^n = 1$ (für geeignete $c_i^{(n)} \in R$)

$$\xi = (\sum c_i^{(n)} f_i^n)\xi = 0$$

für n genügend groß. Dies zeigt die Behauptung.

Der Beweis des Serre Kriteriums folgt daher bereits aus

Lemma: Für $G \in Q_X$ auf einem affinen Schema X gilt C_0 und C_1, also $H^1(X,G) = 0$.

Beweis: C_0 wurde bereits gezeigt (s.II, §4). Wir reduzieren C_1 auf die charakteristische Eigenschaft mit einem Čech-Argument. Für $\xi \in H^1(X,G)$ existiert eine (s.oben) endliche affine Überdeckung durch $X_i = X_{f_i}$ mit $res(X,X_i)(\xi) = 0$. Also

$$\xi \ \in \ K(X) := Kern(H^1(X,G) \to \bigoplus_i H^1(X_i,G)) \ .$$

Wähle $I \in Mod_X$ injektiv mit $G \hookrightarrow I$ und $J = I/G$. Dann gilt $H^1(U,G) = J(U)/I(U)$. Aus dem Diagramm

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \bigoplus G(X_i \cap X_j) \arrow[r] & \bigoplus I(X_i \cap X_j) \arrow[r] & \bigoplus J(X_i \cap X_j) & \\
0 \arrow[r] & \bigoplus G(X_i) \arrow[r] \arrow[u] & \bigoplus I(X_i) \arrow[r] \arrow[u] & \bigoplus J(X_i) \arrow[r] \arrow[u] & \bigoplus H^1(X_i,G) \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & G(X) \arrow[r] \arrow[u] & I(X) \arrow[r] \arrow[u] & J(X) \arrow[r] \arrow[u] & H^1(X,G) \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\
& 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & &
\end{tikzcd}$$

folgt

$$K(X) \ \subseteq \ Kok(X)$$

für $Kok(X) := \bigoplus_{i,j} G(X_i \cap X_j)/\bigoplus_i G(X_i)$ und analog

$$K(X_f) \ \subseteq \ Kok(X_f)$$

für $f \in R$. Sei unser ξ im Kern der Restriktion $res : K(X) \to K(X_f)$. Zu zeigen ist dann, daß ξ von einer Potenz von f annuliert wird. Dazu kann K durch Kok ersetzt werden. Somit genügt zu wissen

$$res : Kok(X)_f \cong Kok(X_f) \ .$$

Letzteres folgt aus dem 5-Lemma

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus G(X_i)_f \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & \bigoplus G(X_i \cap X_j)_f \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & Kok(X)_f \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
\bigoplus G((X_i)_f) \arrow[r] & \bigoplus G((X_i \cap X_j)_f) \arrow[r] & Kok(X_f) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

wegen der charakteristischen Eigenschaft der Einschränkung der quasikohärenten Garbe G von X auf die affinen Räume $X_i \cap X_j$, X_i unter den Restriktionen nach $(X_i \cap X_j)_f$ bzw. $(X_i)_f$.

§7 Der allgemeine Verschwindungssatz

1.Lemma: Für beliebige Morphismen $j : Y \to X$ zwischen Schemata gilt

$$R^n j_*(G)(.) = H^n(j^{-1}(.), G)^+ \qquad \text{(Vergarbung!)} \ .$$

Insbesondere vertauschen höhere direkte Bilder mit offenem Basiswechsel!

Beweis: Die Funktoren auf beiden Seiten annulieren für $n \geq 1$ welke Garben und führen zu langen exakten Sequenzen. Da sie für $n = 0$ übereinstimmen, stimmen sie für alle n überein. (Einbettung in welke und absteigende Induktion).

2.Lemma: Sei $j : Y \to X$ ein Morphismus von Schemata, G eine Garbe auf Y. Aus $R^i j_*(G) = 0$ für $1 \leq i < n$ folgt dann

$$H^i(X, j_*(G)) \cong H^i(Y, G)$$

für $i = 0, 1, ..., n-1$ sowie

$$H^n(X, j_*(G)) \hookrightarrow H^n(Y, G) \ .$$

Zusatz: Ist $j : Y \to X$ eine offene Einbettung, dann restringieren auf Y die zugehörigen Abbildungen zur Identität von $H^i(Y, G)$ für alle $i = 0, ..., n$.

Beweis: Sei $I_0 \to I_1 \to ...$ eine injektive Garbenauflösung von G in Mod_Y. Wegen $R^i j_*(G) = 0 \ (1 \leq i < n)$ ist der folgende Komplex exakt

$$\tilde{I}^{\cdot} \ : \qquad j_*(G) \to j_*(I_0) \to j_*(I_1) \to ... \to j_*(I_n) \ .$$

Da j_* die injektiven Garben I_i in welke Garben überführt, erhält man den Anfang einer welken (Γ-azyklische) Auflösung $\tilde{I}^{\cdot}$ von $j_*(G)$. Löse nun weiter auf durch injektives $\tilde{I}_{n+1}$

$$\begin{tikzcd}
j_*(I_0) \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & j_*(I_{n-1}) \arrow[r, "j_*(d_{n-1})"] & j_*(I_n) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "j_*(d_n)"'] & Kokern(j_*(d_{n-1})) \arrow[r, hook, "\beta"] \arrow[dl, dotted] & \tilde{I}_{n+1} \ . \\
 & & & j_*(I_{n+1}) & &
\end{tikzcd}$$

Anwenden von $\Gamma = H^0(X, .)$ liefert die Kohomologie von $j_*(G)$

$$H^n(X, j_*(G)) = Kern(\Gamma(\beta) \circ \Gamma(\alpha))/Bild(\Gamma j_*(d_{n-1})) = Kern(\Gamma(\alpha))/Bild(\Gamma j_*(d))$$

$$\hookrightarrow Kern(\Gamma j_*(d_n))/Bild(\Gamma j_*(d_{n-1})) = H^n(Y, G)$$

wegen $\Gamma_Y = \Gamma_X \circ j_*$. Offensichlich gilt Gleichheit für $i < n$ wie behauptet.

Wir wenden dies nun an für X affin und $j : Y = X_f \hookrightarrow X$. Beachte $j_*(Q_Y) \subset Q_X$ (auch ohne die Annahme noethersch). Damit beweisen wir den

Verschwindungssatz: Sei X affin und $n \geq 1$, $G = S(M)$ quasikohärent auf X (und sei der zugrundeliegende topologische Raum X noethersch). Dann gilt

$$H^n(X, G) = 0 \qquad (n \geq 1) \ .$$

Beweis des Verschwindungssatzes:

Wir beweisen den Satz durch Induktion nach n. Sei $X = Spec(R)$. Zu zeigen ist Eigenschaft $C_n(f)$

$$H^n(X, S(M))_f \hookrightarrow H^n(X_f, S(M_f))$$

für alle kohärenten Garben $G = S(M)$ und alle $f \in R$. Wie in §6 folgt daraus der Verschwindungssatz im Grad n. Fixiere im folgenden f.

Wir beweisen den Satz zuerst in dem

Spezialfall $M = M_f$: Betrachte die Inklusion

$$j : X_f \to X \ .$$

Wegen $M = M_f$ gilt $j_*(S(M_f)) = S(M)$. Durch Vergarben der Induktionsannahme (Lemma 1) sind die Voraussetzungen

$$R^m j_*(S(M_f)) = 0 \quad (1 \leq m < n)$$

von Lemma 2 erfüllt. Aus Lemma 2 folgt dann Eigenschaft $C_n(f)$ in der scharfen Form

$$H^n(X, S(M)) = H^n(X, j_*S(M_f)) \hookrightarrow H^n(X_f, S(M_f)) = H^n(X_f, S(M)|X_f)$$

und damit der Verschwindungssatz im vorliegenden Spezialfall.

Bemerkung: Der oben formulierte Verschwindungssatz gilt auch ohne die Annahme noethersch (siehe Grothendieck, EGA). Wir benutzen X noethersch zur Vereinfachung des Beweises: Auf einem noetherschen topologischen Raum ist nämlich der naive direkte Limes von Garben

$$(lim\ G_i)(U) = lim_i\ G_i(U)$$

wieder eine Garbe (Der direkte Limes in Ab vertauscht mit endlichen Summen und ist ein exakter Funktor. Daher gelten die Garbenaxiome G1, G2 für $lim\ G_i$ im Fall endlicher Überdeckungen. Im noetherschen Fall reduziert man sofort auf diesen Fall). Man zeigt dann leicht (direkte Limiten welker Garben sind welk; Exaktheit des direkten Limes!) wie in Hartshorne Seite 209

$$H^n(X, lim_i\ G_i) = lim_i\ H^n(X, G_i)\ .$$

Der Fall der f-Torsionsmoduln: Ein R-Modul M heißt f-Torsionsmodul ($f \in R$), falls jedes $m \in M$ von einer Potenz f^i von f annuliert wird. Es gilt dann also $M = lim_i\ M_i$ mit $f^i \cdot M_i = 0$ sowie $S(lim_i\ M_i) \cong lim_i\ S(M_i)$ (universelle Eigenschaft!).

Es folgt

$$H^n(X, S(lim_i\ M_i)) = lim_i\ H^n(X, S(M_i))\ .$$

Es gilt $H^n(f) = f$ (reduziere auf den Fall $n = 0$). Also $f^i H^n(X, S(M_i)) = 0$. Somit ist $lim_i\ H^n(X, S(M_i))$ ein f-Torsionsmodul. Also

$$H^n(X, S(M))_f = 0$$

für f-Torsions R-Moduln, und Eigenschaft $C_n(f)$ ist daher automatisch erfüllt.

Der allgemeine Fall: Sei M ein beliebiger R-Modul. Dann sind Kern K und der Kokern Q der Lokalisierungsabbildung $M \to M_f$ f-Torsionsmoduln. Aus

$$0 \to K \to M \to B \to 0$$

$$0 \to B \to M_f \to Q \to 0$$

folgt wegen $(M_f)_f = M_f$ (der Spezialfall) und der Induktionsannahme

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H^n(X, S(B))_f \arrow[r, hook] \arrow[d, hook, "!"] & H^n(X, S(M_f))_f \arrow[d, hook] \\
0 \arrow[r] & H^n(X_f, S(B_f)) \arrow[r, hook] & H^n(X_f, S(M_f))
\end{tikzcd}$$

und damit

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d, equal] & & \\
0 \arrow[r] & H^n(X, S(K))_f \arrow[r] \arrow[d] & H^n(X, S(M))_f \arrow[r] \arrow[d, hook, "!!"] & H^n(X, S(B))_f \arrow[d, hook, "!"] \\
0 \arrow[r] & H^n(X_f, S(K))_f) \arrow[r] & H^n(X_f, S(M_f)) \arrow[r] & H^n(X_f, S(B_f))
\end{tikzcd}$$

Das heißt, $C_n(f)$ für f-Torsionsmoduln und für $M = M_f$ (sowie die Induktionsannahme) implizieren Eigenschaft $C_n(f)$ für M. Damit ist der Verschwindungssatz bewiesen.

§8 Verallgemeinerung auf affine Morphismen

Definition: Ein Morphismus $g : X \to Y$ zwischen Schemata heißt affin, falls eine affine Überdeckung $Y = \cup_i Y_i$ von Y existiert, für die alle Urbilder $g^{-1}(Y_i)$ affin sind.

Satz: Sei $g : X \to Y$ ein Morphismus zwischen Schemata (und der topologische Raum X sei noethersch). Dann sind äquivalent

(i) g ist affin

(ii) $R^i g_*(G) = 0$ für $i > 0$ und alle $G \in Q_X$ (quasikohärent auf X).

Beweis (i) nach (ii): Wir zeigen das Verschwinden der Halme $R^i g_*(G)_y = 0$, $i > 0$. Dazu sei (durch Übergang zu Y_i) obdA Y und $X = g^{-1}(Y)$ affin. Für $f \in H^0(Y, O_Y)$ ist $f \circ g \in H^0(X, O_X)$ erklärt und für lokal geringte Räume gilt $g^{-1}(Y_f) = X_{f\circ g}$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "g"] & Y \\ X_{f\circ g} \arrow[u, hook] \arrow[r, "g"] & Y_f \arrow[u, hook] \end{tikzcd} \qquad X_{f\circ g} \text{ affin !}$$

Aus Lemma 1 und dem Verschwindungssatz von §7 folgt daher die Implikation (i) nach (ii), da die Y_f eine Basis der Topologie von Y durchlaufen.

Beweis (ii) nach (i): Sei $Y' \subset Y$ offen. Betrachte $j : X' = g^{-1}(Y') \hookrightarrow X$ und $g' = g|X'$. Aus $G' \in Q_{X'}$ folgt $G = j_*(G') \in Q_X$, da X noethersch ist. Offener Basiswechsel (§7, Lemma 1) impliziert $R^i g'_*(G') = R^i g_*(G)|Y'$. Letzteres ist Null für alle $i > 0$ wegen der Annahme von (ii). Somit sind die Vorraussetzungen von §7, Lemma 2 erfüllt. Aus dem ersten Teil der Aussage von §7, Lemma 2 folgt daher für alle $i \geq 0$

$$H^i(X', G') = H^i(Y', F) \quad , \quad F := g'_*(G') \ .$$

Dies gilt für alle quasikohärenten G' auf $g^{-1}(Y')$. Da X noethersch ist, ist F quasikohärent auf Y' nach §5. Ist Y' affin, verschwindet somit $H^i(Y', F)$ für $i > 0$. Somit folgt $H^1(X', G') = 0$ für alle $G' \in Q_{X'}$. Da X noethersch ist, ist X' quasikompakt und nach dem Serre Kriterium affin. Dies zeigt (i) sowie

Korollar: Sei $g : X \to Y$ affin und X ein noetherscher topologischer Raum. Dann ist das Urbild $X' = g^{-1}(Y')$ jeder affinen offenen Menge $Y' \subset Y$ affin. Weiterhin gilt $g_*(Q_X) \subset Q_Y$ und für alle i

$$H^i(X, G) = H^i(Y, g_*(G)) \quad , \quad G \text{ quasikohärent .}$$

Beispiele für affine Abbildungen:

1) Abgeschlossene Immersionen $i : Y \hookrightarrow X$ sind affin (Korollar §6)

2) Die Abbildungen $j : X_f \hookrightarrow X$ sind affin ($f \in H^0(X, O_X)$, X nicht notwendig affin).

§9 Appendix: Die Cech-Auflösung

Sei X ein Schema, G eine Garbe auf X und $X = \cup_{i=0}^n U_i$ eine endliche offene Überdeckung von X. Es bezeiche I Teilmengen von $\{0, ..., n\}$

$$I = \{i_0, i_1, i_2, .., i_r\} \text{ mit } i_0 < i_1 < i_2 < ... < i_r \ ,$$

falls $\#I = r+1$. Für jedes I bezeichne

$$j_I : U_I = \cap_{i \in I} U_i \to X$$

die zugehörige offene Immersion. Für jedes Paar $I \subset J$ hat man mittels der Adjunktionsformel natürliche Abbildungen

$$(j_I)_*(j_I)^*(G) \to (j_J)_*(j_J)^*(G) \ .$$

vermge $j_J = j_I \circ j$ für $j : U_J \to U_I$ und $(j_I)_* id (j_I)^* \to (j_I)_* j_* j^* (j_I)^* = (j_J)_*(j_J)^*$ mittels der Adjunktionsabbildung $id \to j_* j^*$.

Ist speziell $\#I = r+1$ und $\#J = r+2$ mit $J = \{i_0, ..., i_{r+1}\}$ und $I = J \setminus \{i_s\}$, dann versehen wir diese Abbildung mit dem Vorzeichen $(-1)^s$ und erhalten durch Aufsummieren

$$d : \bigoplus_{I, \#I = r+1} (j_I)_*(j_I)^*(G) \to \bigoplus_{J, \#J = r+2} (j_J)_*(j_J)^*(G) \ .$$

Dies definiert einen Komplex, den sogenannten <u>Cech-Komplex</u> $C^\cdot(G)$

$$0 \to C_0(G) \to C_1(G) \to ... \to C_n(G) \to 0$$

mit

$$C_r(G) = \bigoplus_{I, \#I = r+1} (j_I)_*(j_I)^*(G) \ .$$

Zur Vereinfachung der Vorzeichenregeln ersetzen wir den Komplex durch einen anderen. Nämlich wir fassen $C^r(G)$ alternierend fortgesetzt auf alle (ungeordneten) Kollektionen I mit $\#I = r+1$ (durch Null fortgesetzt bei doppelt auftretenden Indizes).

<u>1.Satz:</u> Der Komplex $C^\cdot(G)$ ist eine Garbenauflösung von G.

<u>Beweis:</u> $H^0(G \to C^\cdot(G)) = 0$ gilt wegen Garbenaxiom G1) und G2)! Beachte

$$(j_I)_*(j_I)^*(G)(V) = G(V \cap U_{i_0} \cap ... \cap U_{i_r}) \ .$$

Zu zeigen ist allgemein die Exaktheit des Garbenkomplexes $G \to C^\cdot(G)$. Dies genügt es halmweise zu zeigen.

Sei $x \in X$. Dann liegt x in einem U_i. Bezüglich der Wahl eines solchen i konstruiert man sich nun Homomorphismen h mit

$$id = d^{n-1} \circ h^n + h^{n+1} \circ d^n \ .$$

Es folgt, daß der Komplex der Halme bei x (!) nullhomotop ist und somit exakt ist.

<u>Konstruktion von h:</u> Es gilt nach Definition

$$(ds)(i_0, i_1, ..., i_{n+1}) = \sum (-1)^\nu res\big(s(i_0, .., \hat{i}_\nu, ., i_{n+1})\big) \ .$$

Setze

$$(hs)(i_0, ..., i_n) = Lift\big(s(i, i_0, ..., i_n)\big) \ .$$

Beachte $Lift : lim_{V, x \in V} G(U_i \cap U_{i_0} \cap ... \cap U_{i_n} \cap V) = lim_{V, x \in V} G(U_{i_0} \cap ... \cap U_{i_n} \cap V)$. Sowohl d als auch k führen "alternierende" Schnitte in ebensolche über!

Es gilt für $n \geq 2$

$$k(ds)(i_0, ..., i_n) = (ds)(i, i_0, ..., i_n)$$

$$= s(i_0, i_1, ..., i_n) - s(i, i_1, i_2, .., i_n) ... \pm s(i, i_0, ..., i_{n-1}) \ ,$$

sowie

$$d(ks)(i_0, ..., i_n) = (ks)(i_1, ..., i_n) - (ks)(i_0, i_2, .., i_n) ... \mp (ks)(i_0, ..., i_{n-1})$$

$$= s(i, i_1, i_2, ..., i_n) - s(i, i_0, i_2, .., i_n) ... \mp s(i, i_0, ..., i_{n-1}) \ .$$

Es folgt

$$dk + kd = id \quad (n \geq 2) \ .$$

Somit ist der Komplex azyklisch.

Wir nehmen nun an, alle U_i seien <u>noethersche</u> topologische Räume (zum Beispiel wenn X selbst ein noetherscher topologischer Raum ist). Außerdem seien alle Abbildungen $j_i : U_i \to X$ <u>affin</u> und alle U_i <u>affine Schemata</u>. Dies ist äquivalent damit daß alle U_I (oder alle $U_i \cap U_j$ nach §8, Korollar!) affine Schemata sind. Ist G quasikohärent, dann auch $(j_I)_*(j_I)^*(G)$ sowie die endlichen Summen nach §5 (Permanenzeigenschaften). Auf Grund des Serre Verschwindungssatzes (für U_I) und dem Korollar von §8 sind die Garben des Cech-Komplexes daher Γ-azyklisch

$$H^i\big(X, (j_I)_*(j_I)^*(G)\big) = H^i\big(U_I, (j_I)^*(G)\big) = 0 \quad (i > 0) \ .$$

Es folgt der

2.Satz: Sei X ein Schema mit einer endlichen Überdeckung $X = \cup_{i=0}^{n} U_i$ durch affine, offene, (topologisch noethersche) Teilschemata U_i, und sind alle paarweisen Durchschnitte $U_i \cap U_j$ affin, dann definiert der Cech-Komplex $C^{\cdot}(G)$ eine Γ-azyklische Auflösung von G für alle quasikohärenten Garben G auf X.

1.Korollar: In dieser Situation gilt

$$H^i(X,G) = 0 \qquad (i > n)$$

für alle $i > n$ und alle quasikohärenten Garben G auf X.

2.Korollar: In dieser Situation gilt für jeden globalen Schnitt $f \in H^0(X, O_X)$

$$H^i(X,G)_f \cong H^i(X_f, G) \quad (i \in \mathbb{N}) \ .$$

Beweis: Wie in §4! Wir können in beiden Fällen die Kohomologie mit der $Cech$-Auflösung berechnen! Wegen der charakteristischen Eigenschaft quasikohärenter Garben auf affinen Schemata gilt

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots \longrightarrow & \bigoplus_{I,\#I=r+1} G(X_I)_f & \longrightarrow & \bigoplus_{J,\#J=r+2} G(X_J)_f & \longrightarrow \cdots \\ & \cong \downarrow & & \cong \downarrow & \\ \cdots \longrightarrow & \bigoplus_{I,\#I=r+1} G((X_I)_f) & \longrightarrow & \bigoplus_{J,\#J=r+2} G((X_J)_f) & \longrightarrow \cdots \end{array}$$

Die Kohomologie des unteren Komplexes ist $H^i(X_f, G)$. Die Kohomologie des oberen Komplexes ist $H^i(X,G)_f$, denn Lokalisieren nach f ist ein exakter Funktor und vertauscht mit endlichen Summen!

Bemerkung: Korollar 2 verschärft die Aussagen von §7 zur Eigenschaft $C_i(f)$!

Bemerkung: Die Kategorie der Schemata besitzt Produkte. Ein Schema X nennt man separiert, wenn die diagonale Abbildung $\Delta : X \to X \times X$ eine abgeschlossene Immersion ist. Produkte $Spec(R) \times Spec(R') = Spec(R \otimes_{\mathbb{Z}} R')$ affiner Schemata sind affin. Somit ist $\Delta^{-1}(U \times V) = U \cap V$ affin für affin offene Teilmengen U, V eines separierten Schemas. Die Situation des obigen 2.Satzes und von Korollar 1 und 2 liegt daher vor für alle noetherschen separierten Schemata X.

III PROJEKTIVE SCHEMATA

§1 Graduierte Ringe und Moduln

Es sei

$$S = \bigoplus_{i=0}^{\infty} S_i$$

ein graduierter Ring, d.h. Addition und Multiplikation respektieren die Graduierung, d.h. $S_i + S_i \subset S_i$ und $S_i \cdot S_j \subset S_{i+j}$.

Dann ist insbesondere $S_0 = R$ selbst wieder ein Ring. Wir machen folgende

Annahme: Der graduierte Ring S sei endlich erzeugt über R durch S_1.

Mit anderen Worten: In S_1 existieren Elemente $f_0, .., f_n$ so daß jedes Element von S erzeugt wird durch einen polynomialen Ausdruck mit Werten in R und den f_i.

Unter einem graduierten S-Modul, verstehen wir einen S-Modul

$$M = \bigoplus_{i=-\infty}^{\infty} M_i$$

mit der Eigenschaft $S_i M_j \subset M_{i+j}$ sowie $M_i + M_i \subset M_i$.

Konvention: Wir schreiben oft M^0 resp. S^0 anstelle von M_0 und S_0.

Beispiele:

1) Homogene Ideale I von S = graduierte S-Untermoduln von S mit $I_i = I \cap S_i$.

2) Sei $f \in S_r$ ein homogenes Element. Dann ist die Lokalisierung $\kappa : S \to S_f$

$$S_f = \bigoplus_i (\bigoplus_m \kappa(S_{i+rm})/\kappa(f)^m)$$

ein graduierter Ring und ein graduierter S-Modul.

Definition: Ein homogenes Primideal $\wp$ von S ist ein Ideal von S mit den Eigenschaften

1) $\wp$ ist ein Primideal von S.

2) $\wp$ ist ein homogenes Ideal von S

3) $\wp$ umfasst nicht das Ideal $S_{>0} = \bigoplus_{i>0} S_i$.

Bemerkung: Die erste Bedingung kann abgeschwächt werden zu 1)': Für alle homogenen Elemente f, g mit $fg \in \wp$ gilt entweder $f \in \wp$ oder $g \in \wp$. Beweis: Sei gegeben $f = \sum f_i$ und $g = \sum g_j$ mit $fg \in \wp$, dann ist f oder g in $\wp$. Anderenfalls gäbe es k und l (obdA maximal gewählt) mit $f_k \notin \wp$ und $g_l \notin \wp$. Dann liefert 1)' wegen $f_k g_l \in \wp$ (!) einen Widerspruch.

§2 Proj(S) als topologischer Raum

Sei S ein graduierter Ring mit der Annahme von §1. Wir betrachten die Menge X der homogenen Primideale $\wp$ von S

$$X = Proj(S) \subset Spec(S)$$

Als Teilmenge von $Spec(S)$ versehen wir $X = Proj(S)$ mit der induzierten Topologie.

Beachte: $X \cap Spec(S)_g = \bigcup_i X \cap Spec(S)_{g_i}$ falls $g = \sum g_i, g_i \in S_i$. Beachte $g = \sum_i g_i \notin \wp \Longleftrightarrow \exists i \; g_i \notin \wp$ als Negierung von $g \in \wp \Longleftrightarrow \forall i \; g_i \in \wp$ (für homogene Primideale $\wp$).

Somit bilden die folgenden offenen Mengen (neuartige Definition!)

$$X_{g_i} = X \cap Spec(S)_{g_i} \qquad g_i \text{ homogen}$$

eine Basis der offenen Mengen der Topologie von X.

Abgeschlossene Teilmengen: Ist $I \subset S$ ein Ideal, dann ist $I^h = \oplus_i pr_i(I)$ ein homogenes Ideal mit $I \subset I^h$. Der Hüllenoperator h erhält homogene Ideale. Es folgt $Z(I) \cap X = Z(I^h) \cap X$. Daher sind die abgeschlossenen Teilmengen von $Proj(S)$ genau die Mengen $Z(I) \cap X$ gebildet zu den homogenen Idealen I von S.

Standardüberdeckungen: Ist $S_1 = Rf_0 + ... + Rf_n$, dann gilt

$$X = \bigcup_{i=0}^{n} X_{f_i} \ .$$

Denn $f_i(\wp_x) = 0$ für alle $i = 0, .., n$ impliziert $S_{>0} \subset \wp_x$. Für $x \in X$ ein Widerspruch!

Die Standardkarten: Bezeichne $(S_{f_i})^0$ den Teilring der Elemente vom Grad null in der Lokalisierung S_{f_i}. Dann gibt es einen Homöomorphismus topologischer Räume zwischen X_{f_i} und dem Ringspektrum

$$X_{f_i} \cong Spec(S_{f_i})^0 \quad \text{(Homöo !)}$$

Der Homöomorphismus ist definiert durch die Abbildung

$$\{\text{hom.Primideale } \wp \subset S, f_i \notin \wp\ \} \xrightarrow{\phi} \{\text{Primideale } p \subset (S_{f_i})^0\}$$

und ϕ ist gegeben durch

$$\wp \overset{\phi}{\mapsto} (S_{f_i} \cdot \wp)^0$$

und die Umkehrabbildung ψ ist gegeben durch

$$\bigoplus_{j=0}^{\infty} S_j \cap (f_i)^j \cdot p = \bigoplus_{j=0}^{\infty} \{\xi \in S_j \mid \frac{\xi}{f_i^j} \in p\} \xleftarrow{\psi} p \ .$$

<u>Achtung:</u> $\phi(\wp)$ ist tatsächlich ein Primideal! Ebenso definiert $\psi(p)$ wegen $\S 1, 1)'$ tatsächlich ein (homogenes) Primideal $\wp$ mit $f_i \notin \wp$.

<u>Korollar:</u> Ist R ein <u>noetherscher Ring</u>, dann auch S (Annahme von $\S 1$!) sowie S_{f_i} sowie $(S_{f_i})^0$. Somit ist $Proj(S)$ ein noetherscher topologischer Raum (als endliche Vereinigung von solchen).

<u>Beweis:</u>

1)<u> ϕ ist injektiv:</u> Seien $\wp_1 \neq \wp_2$ homogen und z.B. $\xi \in \wp_1, \xi \notin \wp_2$. Wäre $\phi(\wp_1) = \phi(\wp_2)$, so folgt

$$\xi / f_i^{deg(\xi)} = \eta / f_i^{deg(\eta)} \qquad (\in S_{f_i})$$

für ein $\eta \in \wp_2$, d.h. aber

$$f_i^m \xi = f_i^{m'} \eta \in \wp_2 \qquad (\in S) \ .$$

Wegen $f_i \notin \wp_2$ und $\wp_2$ prim ergibt sich ein Widerspruch, nämlich $\xi \in \wp_2$!

2)<u> ϕ ist surjektiv:</u> Wie man leicht sieht gilt $\phi \circ \psi = id$.

3) Die Homöomorphieeigenschaft der Bijektion ϕ folgt aus

$$(*) \qquad \phi(X_f \cap X_{f_i}) = [Spec(S_{f_i})^0]_{f/f_i^{deg(f)}} \ .$$

für homogenes f. Dies zeigt die Äquivalenz einer Basis der Topologien von X_{f_i} und $Spec((S_{f_i})^0)$.

<u>Beweis von (*)</u>: Sei $\wp \in X_{f_i}$. Dann gilt $\wp \in X_f \cap X_{f_i} \iff f_i f \notin \wp \iff f \notin S_{f_i}\wp \iff f/f_i^{deg(f)} \notin (S_{f_i}\wp)^0 \iff \phi(\wp) \in [Spec(S_{f_i})^0]_{f/f_i^{deg(f)}}$.

§3 Proj als Schema

Definiere für $X = Proj(S)$ eine Strukturringgarbe O_X

$$O_X(U) = \{s : U \to \bigcup_{x \in U} (S_x)^0 \mid \ s \text{ erfüllt } (*)\} \ .$$

mit

$(*)_1 :$ $\quad s(x) \in (S_x)^0$. (Homogene Lokalisierung $S_x = (S \setminus \wp_x)^{-1}_{hom} S$)

$(*)_2 :$ $\quad s$ ist lokal auf $X_f \subset U$ (f homogen) repräsentiert durch Elemente $\sigma \in (S_f)^0$.

Lemma (O_X auf Standardkarten): (X, O_X) ist ein Schema, denn

$$(\#) \qquad (X_{f_i}, O_X | X_{f_i}) \cong (Spec(S_{f_i})^0, O_{Spec(S_{f_i})^0})$$

für alle $i = 0, .., n$.

Beweis: Betrachte $(*)_2$ für $X_f \subset U = X_{f_i}$ (f homogen), d.h. $Z(f_i) \cap X \subset Z(f) \cap X$. Mit anderen Worten: $f_i \in \wp$ und $\wp \in X$ impliziert $f \in \wp$. Die Klasse von f im graduierten Ring S/f_iS ist dann nilpotent, (denn anderenfalls existiert ein homogenes Primideal in $(S/f_iS)_f$ und das Urbild dieses Primideals wäre ein homogenes Primideal $\wp$ in S mit $f \notin \wp$ und $f_i \in \wp$). Es folgt $f^m = rf_i$ für ein $r \in S$. Somit faktorisiert die Lokalisierung $(S_f)^0$ über die Lokalisierung $(S_{f_i})^0$, d.h.

$$(S_f)^0 \cong (S_{f_i})^0_{f/f_i^{deg(f)}} \ .$$

Die Behauptung folgt aus den Definitionen der Strukturgarben, vorausgesetzt alle Halme für $\wp \in X_{f_i}$ beider Strukturgarben stimmen überein:

$$(S_\wp)^0 = [(S_{f_i})^0]_{(\wp S_{f_i})^0} \ .$$

Dies folgt aus der vorherigen Aussage durch einen Limesschluß (Limes über alle f mit $f(x) \neq 0$). Insbesondere gilt $(O_X)_x \cong (S_{\wp_x})^0$. (Übungsaufgabe!)

Folgerung: Für $I \subset \{0, .., n\}$ nicht leer ist

$$X_I = \bigcap_{i \in I} X_{f_i} \cong (Spec((S_f)^0), O_{Spec((S_f)^0)})$$

ein affines Schema, wobei

$$f = \prod_{i \in I} f_i \in S \ .$$

Beweis: Sei obdA $i \in I$. Das letzte Lemma und (*) aus §2 impliziert, daß das offene Unterschema X_I von X isomorph ist zum affinen Schema des Rings $[S_{f_i})^0]_{f/f_i^{deg(f)}}$. Dies ist aber gleich dem Ring $(S_f)^0$ für $f = \prod_{i \in I} f_i$.

Folgerung: Ist R noethersch, läßt sich also nach II §9 die $Cech$-Auflösung zur Kohomologie Berechnung heranziehen!.

§4 Quasikohärente Garben

Ohne Schwierigkeiten überträgt man die Konstruktion des vorigen Abschnitts auf graduierte S-Moduln M. Jedem solchen Modul ist eine Garbe M_X auf $X = Proj(S)$

$$M_X(U) = \{s : U \to \bigcup_{x \in U} (M_{\wp_x})^0 \mid (*)\}$$

mit den Bedingungen $(*)_1$ $s(x) \in (M_{\wp_x})^0$ und $(*)_2$ s ist lokal repräsentiert durch Elemente $\sigma \in (M_f)^0$, zugeordnet wie im letzten Abschnitt. Man zeigt analog wie dort

M_X auf Standardkarten:

$$(\#) \qquad (M_X)|X_{f_i} = S((M_{f_i})^0) \ .$$

Die Garben M_X sind somit quasikohärent. Ihre Halme sind $(M_X)_x = (M_x)^0$. Also ist $M \mapsto M_X$ ein exakter Funktor von der Kategorie der graduierten S-Moduln (mit Grad erhaltenden S-linearen Abbildungen) in die Kategorie $Q_{Proj(S)}$ der quasikohärenten Garben auf $X = Proj(S)$. Ein Modul M hat triviale Vergarbung genau dann, wenn für jedes Element $m \in M$ ein $r \in \mathbb{N}$ existiert mit $S_{\geq r} \cdot m = 0$, (d.h. alle $(M_{f_i})^0 = 0$). Insbesondere liefert der Untermodul $\bigoplus_{i \geq i_0} M_i$ dieselbe Garbe wie $\bigoplus_i M_i$.

Twists: Auf der Kategorie der graduierten Moduln hat man einen Twist-Operator, welcher jedem graduierten S-Modul M den graduierten S-Modul $M(k)$ zuordnet via

$$M(k)_i = M_{i+k} \quad , \quad i \in \mathbb{Z} \ .$$

Entsprechend erhält man getwiste Garben $M_X(k)$ zur Garbe M_X.

Den wichtigsten Fall liefert $M = S$. Die Twists dieses Moduls liefern die k-fach getwistete Strukturgarbe $O_X(k)$. Beachte $M_X(k) = M_X \otimes_{O_X} O_X(k)$. Durch diesen Ansatz kann man den Twist auf ganz Mod_X definieren. Beachte $O_X(i) \otimes_{O_X} O_X(j) = O_X(i+j)$.

Bemerkung: Die Garben $O_X(k)$ sind lokalfreie O_X-Garben auf X vom Rang 1. Auf allen Standardkarten gilt nämlich

$$O_X(k)|X_{f_i} \cong O_X|X_{f_i} \ .$$

$\xi \mapsto \xi \cdot f_i^{-k}$ definiert nämilich einen Isomorphismus der zugehörigen $(S_{f_i})^0$-Moduln $(S_{f_i})_k \cong (S_{f_i})_0$. (Benutze $(\#)$ wie oben für $M = S$ und $M = S(k)$!)

1.Lemma: Eine Garbe G auf $X = Proj(S)$ ist quasikohärent genau dann, wenn gilt $G \cong M_X$ für einen graduierten S-Modul.

Beweis: Zu zeigen ist, daß jedes quasikohärente G von der Gestalt M_X ist. Betrachte den Funktor von der Kategorie der (quasikohärenten) O_X-Modulgarben in die Kategorie der graduierten S-Moduln definiert durch

$$G \mapsto \Gamma_*(G) = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} H^0(X, G(i)) \ .$$

Die rechte Seite ist ein R-Modul und die $f_i \in H^0(X, O_X(1))$ definieren Multiplikationen $(f_i, m_k) \mapsto f_i \cdot m_k$ via $H^0(X, O_X(1)) \otimes H^0(X, G \otimes_{O_X} O_X(k)) \to H^0(X, G \otimes_{O_X} O_X(k+1))$. Man erhält einen graduierten S-Modul $\Gamma_*(G)$.

Sei $\tilde{G}$ die Vergarbung $(\Gamma_*(G))_X$. Man hat einen natürlichen Garbenhomomorphismus

$$\phi : \tilde{G} \to G \ .$$

Definition von ϕ: Da beide Garben quasikohärent sind, genügt es ϕ auf Schnitten über den Standardkarten anzugeben (kompatibel mit Restriktionen). Ist $s \in \tilde{G}(X_{f_i})$ gegeben durch $s = g/f_i^k$ mit $g \in H^0(X, G(k))$ (siehe $(\#)$), setzt man $\phi(s) = res(X, X_{f_i})(g)/f_i^k \in G(X_{f_i})$. Die Abbildung induziert einen Isomorphismus $\tilde{G} \cong G$, d.h:

Korollar: Für quasikohärente Garben G auf $X = Proj(S)$ gilt

$$\phi : (\Gamma_*(G))_X \cong G \ .$$

Beweis: Dazu genügt $\tilde{G}(X_{f_i}) \cong G(X_{f_i})$ für alle $i = 0, .., n$ wegen der Quasikohärenz beider Garben! In anderen Worten $(\bigoplus_k H^0(X, G(k)))^0_{f_i} \cong \bigoplus_k H^0(X_{f_i}, G(k))$. Letzteres folgt aus dem Spezialfall $L = O_X(1), f = f_i$ des

2.Lemma: Sei X ein Schema mit einer endlichen affinen Überdeckung $X = \bigcup_i X_i$, so daß alle $X_i \cap X_j$ endliche affine Überdeckungen besitzen. Sei L ein Linienbündel auf X trivial auf allen X_i, f ein globaler Schnitt von L und $X_f \subset X$ die offene Teilmenge aller $x \in X$ mit $f(x) \neq 0$(!). Für jede quasikohärente Garbe G auf X gilt dann

1) Für $s \in G(X)$ mit $s|X_f = 0$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $f^n \cdot s = 0$ in $(L^{\otimes k} \otimes_{O_X} G)(X)$.

2) Für jeden Schnitt $s \in G(X_f)$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$ so, daß $f^n \cdot s$ im Bild der Restriktion von $(L^{\otimes k} \otimes_{O_X} G)(X)$ liegt.

Beweis: Völlig analog zum Beweis der charakteristischen Eigenschaft in II §4.

Bemerkung: Ist X noethersch, ist die Annahme an X automatisch erfüllt.

Bemerkung: Umgekehrt erhält man in Analogie des obigen Korollars immer einen natürlichen Homomorphismus

$$M \to \Gamma_*(M_X)$$

von S-Moduln. Dieser ist im allgemeinen jedoch kein Isomorphismus! Für jedes m im Kern oder Kokern existiert allerdings ein $r \in \mathbb{N}$ mit $S_{\geq r} \cdot m = 0$, da beide Moduln diesselbe Vergarbung besitzen (siehe obiges Korollar!).

§5 Der projektive Raum $\mathbb{P}^n_R$

Wir betrachten nun einen wichtigen Spezialfall der allgemeinen Konstruktion, nämlich den Fall des Polynomrings

$$R[X_0,...,X_n]$$

über dem Grundring R, versehen mit der natürlichen Graduierung via Polynomgrad.

Das Schema $Proj(R[X_0,..,X_n])$ ist in diesem Fall der n-dimensionale projektive Raum $\mathbb{P}^n_R$ (über R). Man hat einen natürlichen Morphismus

$$\mathbb{P}^n_R \to Spec(R)\ .$$

Die $j=0,..,n$ Standardkarten sind affine Schemata gebildet zu den Polynomringen

$$R[Z_1,..,Z_n]$$

mit $Z_i = X_i/X_j (i<j)$ und $Z_i = X_{i-1}/X_j (i>j)$. Die $n+1$ zugehörigen affinen Karten sind also jeweils n-dimensionale affine Räume $\mathbb{A}^n_R$ (über R)

$$\mathbb{A}^n_R \to Spec(R)\ .$$

Abgeschlossene Unterschemata: Ist allgemeiner S ein graduierter Ring wie in §1 mit $S_0 = R$ und

$$S_1 = Rf_0 + ... + Rf_n\ .$$

Man hat dann eine Surjektion von graduierten Ringen

$$0 \to I \to R[X_0,...,X_n] \to S \to 0$$

definiert durch $X_i \to f_i$ (Einsetzungshomomorphismus), welcher auf R die Identität ist. Sei I der Kern. I ist dann ein homogenen Ideal mit $I \cap R = 0$. Umgekehrt liefert jedes homogene Ideal $I \subset R[X_0,..,X_n]$ des Polynomringes mit $I \cap R = 0$ einen graduierten Quotientenring S wie in §1.

Man erhält aus obiger Idealsequenz eine abgeschlossene Immersion:

$$(i,i') : Y = Proj(S) \hookrightarrow X = Proj(R[X_0,..,X_n])$$

i identifiert $Y = Proj(S)$ mit der abgeschlossenen Teilmenge $Z(I) \cap Proj(R[X_0,..,X_n])$ von $X = Proj(R[X_0,..,X_n])$. (Die homogenen Primideale von $S = R[X_0,..,X_n]/I$ entsprechen genau den homogenen Primidealen von $R[X_0,..,X_n]$, welche I enthalten!) Den Strukturmorphismus i' der Abbildung erhält man durch Vergarben der obigen Sequenz

$$0 \to I_X \to O_X \xrightarrow{i'} i_*(O_Y) \to 0 \ .$$

Hierbei ist I_X die Vergarbung des homogenen Ideals I und es gilt

<u>Lemma:</u> $S_X \cong i_*(O_Y)$

(Übungsaufgabe!).

Für die Twists gilt

<u>Lemma:</u> $i^*(G(k)) = (i^*(G))(k) \quad (k \in \mathbb{Z})$.

<u>Beweis:</u> Man reduziert sofort auf den Fall $G = O_X$. Übungsaufgabe!

Aus der Projektionsformel folgt daher für alle quasikohärenten Garben G auf $Y = Proj(S)$.

$$i_*(G(k)) = (i_*(G))(k)$$

Benutze

$$G(k) =_{Def} G \otimes_{O_Y} O_Y(k) = G \otimes_{O_Y} i^*(O_X(k)) \ .$$

<u>Bemerkung:</u> Diese Beziehungen sind sehr nützlich. Sie erlauben wegen

$$H^i(Y, G(k)) = H^i(\mathbb{P}^n_R, i_*(G(k)) = H^i(\mathbb{P}^n_R, i_*(G)(k))$$

die Reduktion einer Reihe von Aussagen auf den Fall $\mathbb{P}^n_R$!

<u>Beispiel:</u> Ist I das homogene Hauptideal erzeugt von einem homogenen Element $f \in R[X_0,..X_n]$ vom Grad r, dann gilt $I_n = S_{n-r} \cdot f$ und somit

$$I_X \cong O_X(-r) \ .$$

Für $Y = Proj(R[X_0,..X_n]/I)$ gilt dann

$$0 \to O_X(-r) \to O_X \to i_*(O_Y) \to 0$$

im obigen Sinne. Die lange exakte Kohomologiesequenz liefert für $n \geq 2$ (unter Benutzung der Formeln für $H^*(\mathbb{P}^n_R, O(k))$ im nächsten Abschnitt!)

$$H^i(Y, O_Y) = \begin{cases} R & i = 0 \\ 0 & 0 < i < n-1 \text{ oder } i > n-1 \\ R^s & i = n-1 \end{cases}$$

mit $s = 0$ für $r \leq n$ und sonst dem Binomialkoeffizient

$$s = \binom{r-1}{n} \ .$$

§6 Kohomologie des projektiven Raumes $\mathbb{P}^n_R$

Wir berechnen nun die Kohomologiegruppen $H^i(\mathbb{P}^n_R, O(k))$ des projektiven Raumes. Dazu machen wir einige Vorbemerkungen über

Tensorkomplexe: Sei R ein komm. Ring mit 1. Seien L_0 und L_1 flache R-Moduln (zum Beispiel freie R-Moduln). Ein R-Modul M heißt flach, falls der Funktor $(.) \otimes_R M : Mod(R) \to Mod(R)$ exakt ist. Sei $L^\cdot$ ein zweistufiger Komplex der Form

$$0 \to L_0 \to L_1 \to 0$$

und $K^\cdot$ ein beliebiger Komplex

$$... \to K_{n-1} \to K_n \to K_{n+1} \to ... \ .$$

Der Tensorkomplex $(K \otimes_R L)^\cdot$ ist definiert durch

$$\begin{tikzcd}
K_{i-2} \otimes_R L_1 \arrow[r, "-d\otimes id"] & K_{i-1} \otimes_R L_1 \arrow[r, "-d\otimes id"] & K_i \otimes_R L_1 \arrow[r] & {} \\
K_{i-2} \otimes_R L_0 \arrow[r, "d\otimes id"] \arrow[u, "id\otimes d"] & K_{i-1} \otimes_R L_0 \arrow[r, "d\otimes id"] \arrow[u, "id\otimes d"] & K_i \otimes_R L_0 \arrow[r] \arrow[u, "id\otimes d"] & {}
\end{tikzcd}$$

mit $(K^\cdot \otimes_R L^\cdot)_n = K_n \otimes_R L_0 \oplus K_{n-1} \otimes_R L_1$. Aus der Flachheit von L_0, L_1 folgt für die offensichtlichen Abbildungen

Lemma: Die Sequenz

$$0 \to H^1(H^{n-1}(K^\cdot) \otimes_R L^\cdot) \to H^n(K^\cdot \otimes_R L^\cdot) \to H^0(H^n(K^\cdot) \otimes_R L^\cdot) \to 0$$

ist exakt. (Übungsaufgabe!)

Eine Reihe wichtiger Komplexe haben die Form eines iterierten Tensorproduktes

$$K^\cdot = \bigotimes_{i=0}^{n} (0 \to L_0 \to L_1 \to 0) \ .$$

Ihre Kohomologie lässt sich mit Hilfe des obigen Lemmas iterativ berechnen. Besonders einfach ist der Fall, wo alle $H^\cdot(K)$ wieder flache R-Moduln sind und $H^0(0 \to L_0 \to L_1 \to 0)$ verschwindet. In diesem Fall gilt $H^i(K^\cdot) = 0$ für $i \neq n+1$ und

$$H^{n+1}(K^\cdot) = \bigotimes_{i=0}^{n} H^1(0 \to L_0 \to L_1 \to 0) \ .$$

Beispiel: Es bezeichne $S = R[X_0, ..., X_n]$ den Polynomring über R. Der folgende Tensorkomplex hat dann nichttriviale Kohomologie nur an der letzten Stelle $n+1$

$$\bigotimes_{i=0}^{n}{}_R (0 \to R[X_i] \to R[X_i, X_i^{-1}] \to 0) = 0 \to S \to \bigoplus_{i_0} S_{X_{i_0}} \to \bigoplus_{i_0 \neq i_1} S_{X_{i_0}X_{i_1}} \to ... \to S_{X_0...X_n} \to 0 \ .$$

Dies ist sogar ein Komplex von graduierten S-Moduln. Die zugehörige vergarbte Sequenz ist exakt! Die letzte Abbildung $\oplus S_{X_0,..\cancel{X_i}..X_n} \to S_{X_0,...X_n}$ ist surjektiv auf jeder affinen Standardkarte (klar!). Durch Verschieben um k, Bildung von $(.)^0$ erhält man eine Garbenauflösung von $O_X(k)$ auf $X = \mathbb{P}^n_R$. Diese ist azyklisch, denn die Vergarbung der Moduln $S_{X_{i_0}..X_{i_r}}$ (für $I = \{i_0, .., i_r\}$) ist $(j_I)_*(j_I)^*(O_X(k))$. (Beide haben auf den Standardkarten dieselben Schnitte und sind quasikohärent!) Nach II §9 ist die Auflösung daher Γ-azyklisch, denn die Standardkartenabbildungen j_I des projektiven Raumes sind affine Morphismen.

Zur Berechnung der Kohomologie bilden wir daher die globalen Schnitte der Auflösung. Betrachtet man alle k simultan, liefert den ursprünglichen Komplex

$$0 \to \bigoplus_{i_0} S_{X_{i_0}} \to \bigoplus_{i_0 \neq i_1} S_{X_{i_0}X_{i_1}} \to ... \to S_{X_0...X_n} \to 0$$

(Siehe 1.Bemerkung §4 und das Lemma sowie die Folgerung in §3.) Die Kohomologie an der Stelle $n+1$ ist der flache R-Modul $S_{X_0,...X_n}/\oplus S_{X_0,..\cancel{X_i}..X_n} = \oplus_{i_0<0,..,i_n<0} R \cdot X_0^{i_0} \cdots X_n^{i_n}$.

Folgerung: Es sei R ein noetherscher Ring. Dann gilt

$$\bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} H^i(\mathbb{P}^n_R, O(k)) = \begin{cases} R[X_0, ..., X_n] & i = 0 \\ 0 & 0 < i < n \\ (X_0...X_n)^{-1} R[X_0^{-1}, ..., X_n^{-1}] & i = n \end{cases} \ .$$

Die k-Graduierung rechts ist die natürliche Graduierung.

Korollar: Im Fall $X = \mathbb{P}^n_R$ und R noethersch sind die natürlichen Abbildungen

$$M \xrightarrow{\sim} \Gamma_*(M_X) \quad , \quad M = S(k)$$

für alle $k \in \mathbb{Z}$ Isomorphismen.

IV ENDLICHKEITSSÄTZE

§1 Noethersche Schemata

Zur Erinnerung: Ein Ring heißt noethersch, wenn jede aufsteigende Kette von Idealen stationär wird. Der Ring $\mathbb{Z}$ ist noethersch. Jeder Körper ist noethersch. Quotientenringe und Lokalisierungen noetherscher Ringe sind noethersch. Ein Polynomring in endlich vielen Variablen über einem noetherschen Ring ist noethersch.

Ein R-Modul heißt noethersch, wenn jede aufsteigende Kette von R-Untermoduln stationär wird. Jeder endlich erzeugte R-Modul ist noethersch, wenn R noetherscher Ring ist.

Eine fundamentale Folgerung (R noetherscher Ring) lautet: Jeder Untermodul N eines endlich erzeugten R-Moduls M ist wieder endlich erzeugt. Insbesondere folgt aus Exaktheit

$$M' \to M \to M''$$

und M', M'' endlich erzeugt über R sofort M endlich erzeugt über R.

Definition: Ein Schema X heißt noethersch, falls es eine endliche Überdeckung durch affine Schemata $X_i = Spec(R_i)$ gibt für noethersche Ringe R_i.

Bemerkung: Insbesondere ist ein noethersches Schema ein noetherscher topologischer Raum. Die Umkehrung ist falsch $R = k[x_1, ...]/(x_1^2, ...)$.

Bemerkung: Ist $U = Spec(R)$ ein beliebiges affines offenes Unterschema eines noetherschen Schemas X, dann ist R ein noetherscher Ring!

Beweis: Offensichtlich kann man $Spec(R)$ durch gewisse $Spec((R_i)_{f_j})$ überdecken (Bezeichnungen wie in der Definition). Für offene Basismengen $Spec(R_f) \subset Spec((R_i)_{f_j}) \subset Spec(R)$ ($f \in R$) sind die natürlichen Abbildungen $R_f \to (R_i)_{ff_j}$ Isomorphismen. Somit sind die R_f als Lokalisierungen der noetherschen Ringe R_i selbst noethersche Ringe. Man reduziert den Beweis daher sofort auf folgendes

Lemma: Sei $Spec(R) = \bigcup_{f \in J} Spec(R_f)$ eine endliche Überdeckung und alle R_f seien noethersche Ringe, dann ist R ein noetherscher Ring.

Beweis: Für jedes Ideal $I \subset R$ gilt

$$0 \to I \to \bigoplus_{f \in J} I_f \to \bigoplus_{f, f' \in J} I_{ff'} \ .$$

(Garbenaxiom G1) und G2) für $S(I)$ und II §4). Für jede aufsteigende Idealkette in R werden die entsprechenden lokalisierten Idealketten in den noetherschen Ringen $R_f, R_{ff'}$ stationär. Aus den obigen exakten Sequenzen für die Ideale der Kette folgt dann die Stationarität der ursprünglichen Sequenz in R.

Übungsaufgabe: Sei $Y \hookrightarrow X$ eine abgeschlossene Immersion. Ist X ein noethersches Schema, dann ist auch Y ein noethersches Schema.

Übungsaufgabe: Jedes nichtleere noethersche Schema X hat einen abgeschlossenen Punkt.

Folgerung: Insbesondere gilt $X = \bigcup_{x \in |X|} U(x)$ für jedes System $U(x)$ offener Umgebungen der abgeschlossenen Punkte $|X|$ von X.

Hinweis: Dies ist richtig für offene affine Teilmengen U. Betrachte in X den Abschluß A eines abgeschlossenen Punktes von U. Dann $A \setminus U$ usw.

§2 Kohärente Garben

Annahme: Für alle(! bis Ende von VIII, §6) nun folgenden Betrachtungen nehmen wir stillschweigend (!) an, daß die zugrunde liegenden Schemata noethersch sind. Alle Ringe R werden im folgenden stillschweigend als noethersche Ringe vorausgesetzt. Insbesondere ist dann immer $Proj(S)$ ein noethersches Schema.

Insbesondere machen wir nachfolgende Definition nur unter der Vorausetzung

X noethersch!

Definition: Eine quasikohärente Garbe G auf X heißt kohärent, falls affine Karten $X = \bigcup_i X_i$ $\big(X_i = Spec(R_i)\big)$ existieren, so daß alle $G|X_i$ endlich erzeugten R_i Moduln M_i entsprechen: $G|X_i = S(M_i)$.

Beispiele: Lokalfreie Garben von endlichem Rang sind kohärent. Quasikohärente Idealgarben sind kohärent.

Lemma: Sei $Spec(R) \subset X$ ein beliebiges affines offenes Unterschema und G eine kohärente Garbe auf X, dann ist $G|Spec(R)$ Vergarbung $S(M)$ eines endlich erzeugten R-Moduls M.

Beweis: Wie im Lemma von §1 zeigt man, daß M ein noetherscher R-Modul ist, insbesondere also endlich erzeugt.

Aus der Definition folgt nun sofort: Kerne, Bilder und Kokerne von Morphismen zwischen kohärenten Garben sind kohärent. Extensionen zwischen kohärenten Garben sind kohärent. Die volle Unterkategorie der kohärenten Garben K_X in Q_X ist eine abelsche Kategorie. Pullbacks $f^*(G)$ kohärenter Garben G sind kohärent.

Achtung: Direkte Bilder $f_*(G)$ kohärenter Garben sind im allgemeinen nicht kohärent!

Ausnahme: Ist $f : Y \to X$ allerdings eine abgeschlossene Immersion, so ist $f_*(G)$ kohärent, falls G kohärent! (Reduziere auf den Fall $X = Spec(R)$ affin und $Y = Spec(R/I)$. In diesem Fall ist $G = S(M)$ und $f_*(S(M)) = S(M)$ als R-Modul). Endlich Erzeugtheit von M als R bzw. R/I-Modul ist trivialerweise äquivalent.

Die folgenden Abschnitte sind im wesentlichen dem Studium von $f_*(G)$ gewidmet für kohärente G im Fall projektiver Abbildungen $f : Proj(S) \to Spec(R)$. Wir zeigen, daß auch hier kohärente Garben in kohärente Garben übergeführt werden.

§3 Ample Garben

Träger kohärenter Garben: Sei G eine kohärente Garbe. Gilt $G_x = 0$ für den Halm im Punkt $x \in X$, dann gibt es eine offene Umgebung U von x in X mit $G|U = 0$. Denn G ist endlich erzeugt in einer affinen Umgebung V von x

$$O_V^r \to G|V \to 0$$

Die endlich vielen Erzeugenden $s_i, i = 1, ..r$ werden in einer (obdA gemeinsamen) Umgebung U von x durch Null repräsentiert, da $(s_i)_x = 0$. Es folgt die Behauptung. Anders formuliert: Der Träger $\{x \in X \mid G_x \neq 0\ \}$ einer kohärenten Garbe G ist abgeschlossen.

Definition: Eine lokalfreie Garbe L vom Rang 1 auf X heißt ample auf X, falls für jede kohärente Garbe G auf X ein $k \in \mathbb{N}$ und ein $r \in \mathbb{N}$ existiert mit einer Garbensurjektion

$$O_X^r \to G \otimes_{O_X} L^{\otimes k} \to 0 \ .$$

Beispiel: Ist X affin, dann ist O_X ample.

Lemma: Ist $X = Proj(S)$, dann ist $O_X(k)$ für $k > 0$ ample.

Beweis: Für $G \in K_X$ ist G_x ein endlich erzeugter $O_{X,x}$-Modul. Erzeugende können nach Modifikation mit Einheiten von $O_{X,x}^*$ zu Schnitten einer affinen Standardumgebung X_{f_i} von x, und dann (III, §4 Lemma 2) zu globalen Schnitten von $G(k)(X)$ fortgesetzt werden. Hinweis: Multipliziere mit Potenzen von $f_i \in O_X(1)$ und beachte $f_i(x) \neq 0$. Die zugehörige Abbildung $O_X^r \to G(k)$ (r Erzeugende) ist surjektiv in x, somit surjektiv auf einer offenen Umgebung $U(x)$ von x (Kohärenz des Quotienten!). Die Behauptung folgt nun durch ein Überdeckungsargument (X ist quasikompakt). Zuerst in der Form einer Surjektion $\bigoplus_i O_X(-k_i) \twoheadrightarrow G$ und dann wegen $O_X^n \overset{\oplus f_i}{\twoheadrightarrow} O_X(1)$ obdA für ein gemeinsames $k_i = k$.

Serre Dualität: Für jede kohärente Garbe G auf $X = \mathbb{P}_R^n$ definiert die Zuordnung $\phi \mapsto H^n(\phi)$ bei Wahl eines Isomorphismus $H^n(X, O_X(-n-1)) \cong R$ einen Isomorphismus von R-Moduln

$$Hom_{O_X}(G, O_X(-n-1)) \cong Hom_R(H^n(X,G), R) \ .$$

Beweis: Wegen $Hom_{O_X}(O_X(k), O_X(-n-1)) = Hom_{O_X}(O_X, O_X(-n-1-k)) = \Gamma_X(O_X(-n-1-k))$ ist die Aussage klar für alle $G = O_X(k)$ nach III §5. Allgemein folgt die Behauptung aus dem 5-Lemma durch Anwenden der beiden rechtsexakten (!) Funktoren $Hom_{O_X}(., O_X(-n-1)$ bzw. $Hom_R(H^n(X,.), R)$ auf eine Auflösung

$$\bigoplus O_X(m) \to \bigoplus O_X(k) \to G \to 0 \qquad (G \in K_X) \ .$$

Bemerkung: Ist G lokalfrei und G^* die duale Garbe (siehe V,§2 insbesondere Korollar 1), dann impliziert die Serre Dualität

$$H^0(X, G^*(-n-1)) \cong Hom_R(H^n(X,G), R) \ .$$

§4 Endlichkeitsätze

Satz:(Serre) Sei $X = Proj(S)$ und $G \in K_X$ eine kohärente Garbe, dann gilt

1) Alle $H^i(X, G)$ sind endlich erzeugte R-Moduln.

2) Für $i > 0$ gilt
$$H^i(X, G(k)) = 0 \quad , \quad (k >> 0) \ .$$

Zusatz: Für endliche exakte Sequenzen
$$G_1 \to G_2 \to ... \to G_r$$
kohärenter Garben auf X erhält man für $k >> 0$ exakte Sequenzen
$$H^0(X, G_1(k)) \to ... \to H^0(X, G_r(k)) \ .$$

Beweis: Mittels einer abgeschlossenen Immersion reduziert man sofort auf den Fall $X = \mathbb{P}^n_R$. Die Aussagen 1) und 2) des Satzes sind dann klar im Fall der Garben
$$G = O_X(j)^r$$
(III, §6). Der allgemeine Fall wird auf diesen Fall zurückgeführt!

Wir führen den Beweis daher durch absteigende Induktion. Beachte zum Induktionsanfang
$$H^i(X, G) = 0 \quad (i > n)$$
für alle quasikohärenten Garben (Cech-Verschwindungssatz II, §9 Korollar 2 und III §3).

Die Behauptung sei also bewiesen in den Graden $> i$. Da $O_X(1)$ ample ist, gibt es eine Garbensurjektion $O_X(j)^r \to G \to 0$ mit kohärentem Kern K. Es folgt Exaktheit
$$H^i(X, O_X(j)^r) \to H^i(X, G) \to H^{i+1}(X, K) \ .$$

Dies impliziert 1) und 2) im Grad i. Benutze dazu die Bemerkung aus §1 über noethersche Moduln M, M', M''.

Der Zusatz folgt durch Aufsplittern in kurze exakte Sequenzen. Mittels 2) kann man die endlich vielen auftretenden H^1-Terme (Abweichung von der Exaktheit nach Anwenden des Schnittfunktors) durch genügend hohe Twists killen.

Korollar: Für L lokalfrei auf $\mathbb{P}^n_R$ gilt
$$H^0(\mathbb{P}^n_R, L(-j)) = 0 \qquad (j >> 0).$$

Beweis: Benutze 2) und Serre Dualität (§3) für die lokalfreie Garbe $G = L^*$.

Korollar: Die höheren direkten Bilder $R^if_*(G)$ einer (quasi)kohärenten Garbe $G \in K_X$ unter der Strukturabbildung $f : X \to Spec(R)$ sind (quasi)kohärente Garben auf $Spec(R)$.

Beweis: Die Prägarbe F auf $Spec(R)$ definiert durch $U \to H^i(f^{-1}(U), G)$ erfüllt (nach II, §9 Korollar 2) die charakteristische Eigenschaft. Hierzu genügt G quasikohärent auf X.

Eine direkte Inspektion (I,§3) zeigt, daß die assozierte Garbe gebildet zu einer Prägarbe bestimmt ist durch die Schnitte der Prägarbe auf einer Basis der Topologie(!) und den zugehörigen Restriktionsabbildungen. Ein Vergleich mit der quasikohärenten Garbe $S(H^i(X, G))$ auf den Basismengen $U = Spec(R)_f$ zeigt daher

$$F^+ \;\cong\; S(H^i(X, G)) \ .$$

Andererseits gilt

$$F^+ \;\cong\; R^if_*(G)$$

nach II, §7 Lemma 1. Folglich ist $R^if_*(G)$ quasikohärent, nämlich die Vergarbung des R-Moduls $H^i(X, G)$.

Ist G darüber hinaus kohärent, dann ist nach Aussage 1) des obigen Endlichkeitssatzes der R-Modul $H^i(X, G)$ endlich erzeugt und somit $R^if_*(G)$ kohärent.

Definition: Ein Morphismus $f : X \to Y$ heißt lokal projektiv, falls eine affine offene Überdeckung $Y = \bigcup_i X_i$ mit $X_i = f^{-1}(Spec(R_i))$ existiert, so daß alle Einschränkungen von f in der folgenden Form

$$\begin{tikzcd}
X_i \arrow[r, hook, "i"] \arrow[dr] & \mathbb{P}^{r_i}_{R_i} \arrow[d] \\
& Spec(R_i)
\end{tikzcd}$$

(i abgeschlossene Immersion)

faktorisieren.

Korollar: Ist G (quasi)kohärent auf X und $f : X \to Y$ lokal projektiv, dann sind alle $R^if_*(G)$ (quasi)kohärent.

Definition: Ein Morphismus $f : X \to Y$ heißt projektiv, wenn er faktorisiert in eine abgeschlossene Immersion und eine Projektion

$$\pi : \mathbb{P}_Y(E) \to Y \ .$$

Hierbei sei E eine lokalfreie Garbe auf Y vom Rang $n+1$ und $\mathbb{P}_Y(E)$ definiert durch "Verkleben" von Schemata $\mathbb{P}^n_{R_i}$ für eine offene Überdeckung $Y = \bigcup_i U_i$ durch affine

Teilschemata $U_i = Spec(R_i)$, welche E trivialisieren: $E|U_i \cong O_{U_i}$. Genauer: Als Verallgemeinerung unserer Konstruktion von $Proj(S)$ von graduierten R-Algebren S (erzeugt von R und S_1) definiert man man Schemata

$$\pi : Proj(\mathcal{S}) \to Y$$

für graduierte O_Y-Algebragarben

$$\mathcal{S} = \bigoplus_i \mathcal{S}_i \ .$$

Hierbei sei $\mathcal{S}_0 = O_Y$ und $\mathcal{S}_1$ kohärente Garbe auf Y, so daß (lokal bzgl. Y) $\mathcal{S}$ erzeugt wird als Algebrengarbe von $\mathcal{S}_1$ und O_Y. $\mathbb{P}_Y(E)$ ergibt sich aus der Algebrengarbe der symmetrischen Potenzen von E

$$\mathcal{S} = O_Y \oplus E \oplus Symm^2(E) \oplus Symm^3(E) \oplus ... \ .$$

Tensormultiplikation schiftet den Grad und definiert eine Garbensurjektion

$$\pi^*(E) \twoheadrightarrow O_{\mathbb{P}_Y(E)}(1) \to 0 \ .$$

<u>Bemerkung:</u> Alle bisherigen Aussagen über projektive Räume $\mathbb{P}^n_R \to Spec(R)$ und $Proj(S)$ sind lokal in R und lassen sich ohne Mühe auf $\mathbb{P}_Y(E)$ bzw. projektive Morphismen übertragen. Wir überlassen die Details dem Leser.

§5 Das Hilbertpolynom

Wir betrachten für $i \geq 0$ die folgenden "polynomialen" Funktionen

$$P_i : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$$

definiert für alle $i > 0$ durch die Formel

$$P_i(k) \ = \ \begin{bmatrix} k+i \\ i \end{bmatrix} = \frac{1}{i!}(k+i)(k+i-1)...(k+1) \ .$$

Formal sei dann noch $P_0(k) = 1$ sowie $P_{-1}(k) = 0$.

Bemerkung: Es gilt $\left[\begin{smallmatrix} k+i \\ i \end{smallmatrix}\right] = \binom{k+i}{i}$ für $k \geq -i$ und $\left[\begin{smallmatrix} k+i \\ i \end{smallmatrix}\right] = (-1)^i \binom{|k|-1}{i}$ für $k \leq -i-1$, Insbesondere also

$$P_i(-i) = ... = P_i(-1) = 0 \quad , \quad P_i(0) = 1 \ .$$

Als "Polynom" in $\mathbb{Q}[k]$ aufgefaßt, bestimmt dies $P_i(k)$ eindeutig zusammen mit der Eigenschaft $Grad(P_i) \leq i$. Somit folgt bezüglich des Differenzenquotienten

$$(\Delta f)(k) = f(k) - f(k-1)$$

sofort

$$\Delta P_i = P_{i-1} \quad (i \geq 0) \ .$$

Daraus folgt induktiv, daß jede Funktion $f : \mathbb{Z} \to K$ (K eine beliebige abelsche Gruppe) mit verschwindendem $n+1$-stem Differenzenquotient

$$\Delta^{n+1} f = 0$$

sich in polynomialer Standardform schreibt

$$f(k) = \sum_{i=0}^{n} P_i(k) \cdot \chi_i \qquad (\chi_i \in K) \ .$$

Die Koeffizienten $\chi_0, \chi_1, ..., \chi_n$ aus K sind hierbei durch die Funktion f eindeutig bestimmt, sogar durch alle genügend großen Funktionswerte $k >> 0$ (Rekursivität).

Sei nun

$$\pi : \mathbb{P}_Y(E) \to Y$$

ein "projektiver Raum" über Y mit E lokalfrei über Y vom Rang $n+1$. Für jede kohärente Garbe G auf $\mathbb{P}_Y(E)$ definieren wir die

Eulercharakteristik: $\chi(G) = \sum\limits_{i=0}^{n} (-1)^i [R^i \pi_*(G)]$.

Hierbei fassen wir nach dem Endlichkeitssatz $\chi(G)$ auf als Element der freien Gruppe erzeugt von den Isomorphieklassen $[F]$ kohärenter Garben F auf Y oder wir betrachten alternativ das Bild

$$\chi(G) \in K_\bullet(Y)$$

in der Quotientengruppe $K_\bullet(Y)$, definiert durch Division nach der Untergruppe erzeugt von allen Relation $[F] - [F'] - [F'']$, gebildet zu kurzen exakten Sequenzen

$$0 \to F' \to F \to F'' \to 0$$

in der Kategorie K_Y der kohärenten Garben auf Y. Insbesondere gilt $[0] = 0$ in $K_\bullet(Y)$ und daher $[F] = [F']$, falls $F \cong F'$. Diese sogenannte <u>Grothendieckgruppe</u> $K_\bullet(Y)$ ist im allgemeinen schwer zu berechnen!

<u>Der klassische Fall:</u> Ist $Y = Spec(k)$ und k <u>Körper</u>, dann gilt

$$dim_k : K_\bullet(Spec(k)) \cong \mathbb{Z} \ ,$$

denn $K_{Spec(k)}$ ist die Kategorie der endlich dimensionalen k-Vektorräume und die k-Dimension reguliert somit in diesem Fall alles. Man erhält also in diesem Fall, daß obdA $\chi(G) \in \mathbb{Z}$ die alternierende Differenz der k-Dimensionen der endlich dimensionalen k-Vektorräume $H^i(\mathbb{P}^n_k, G)$ ist.

<u>Lemma:</u> Die <u>Eulercharakteristik</u> definiert durch $[F] \mapsto \chi([F])$ einen Gruppenhomomorphismus

$$\pi_K : K_\bullet(\mathbb{P}_Y(E)) \to K_\bullet(Y)$$
$$\pi_K([G]) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \ [R^i\pi_*(G)] \ .$$

<u>Beweis:</u> Zu zeigen ist

$$\chi(F) = \chi(F') + \chi(F'')$$

in $K.(Y)$), falls

$$0 \to F' \to F \to F'' \to 0$$

eine kurze exakte Sequenz in der Kategorie der kohärenten Garben auf $\mathbb{P}_Y(E)$ ist. Betrachte dazu die lange exakte Kohomologiesequenz der direkten Bilder $R^i\pi_*(F'), R^i\pi_*(F)$ sowie $R^i\pi_*(F'')$. Splittet man diese in kurze exakte Sequenzen auf, so erhält man Relationen in $K_\bullet(Y)$, welche leicht die gewünschte obige Relation in $K_\bullet(Y)$ implizieren.

<u>Satz:</u> Für jedes $\xi \in K_\bullet(\mathbb{P}_Y(E))$ ist der Twist $\xi(k)$ wohldefiniert. Ist $E \cong O_Y^{n+1}$, dann hängt $\pi_K(\xi(k))$ "polynomial" vom Twistfaktor $k \in \mathbb{Z}$ ab

$$\pi_K(\xi(k)) = \sum_{i=0}^{n} P_i(k)\chi_i(\xi) \qquad (k \in \mathbb{Z}) \ .$$

Die Koeffizienten $\chi_i(\xi) \in K_\bullet(Y)$ sind eindeutig durch ξ bestimmt.

<u>Bemerkung:</u> Der Endlichkeitssatz in $\S 4$ zeigt

$$\pi_K([G(k)]) = [\pi_*(G(k))] \qquad (k >> 0) \ .$$

Dies liefert eine asymptotische "polynomiale" Formel für die Klassen der <u>direkten Bilder</u> der Twists einer kohärenten Garbe G

$$[\pi_*(G(k))] = \sum_{i=0}^{n} P_i(k)\chi_i(G) \qquad (k >> 0\ !) \ .$$

Die Koeffizienten $\chi_i(G)$ sind bereits durch die Werte der linken Seite für $k >> 0$ eindeutig bestimmt.

<u>Beweis:</u> 1.Schritt: Man zeigt die Existenz eines exakten Komplexes

$$0 \to \pi^*(\bigwedge^{n+1} E)(-n-1) \to ... \to \pi^*(\bigwedge^2 E)(-2) \to \pi^*(E)(-1) \to O_{|\mathsf{P}_Y(E)} \to 0 \ .$$

Man hat natürliche Abbildungen durch Tensormultiplikation. Exaktheit reduziert man auf den lokalen Fall, wo E trivial ist und $Y = Spec(R)$ affin. Hier verwendet man die Beschreibung des obigen Komplexes als Vergarbung des Tensorkomplexes

$$\bigotimes_{i=0}^{n}(0 \to R[X_i](-1) \stackrel{X_i}{\to} R[X_i] \to 0)$$

und schließt ansonsten wie in III, $\S 6$.

2.Schritt: Tensorieren mit $G(k)$ liefert wieder einen <u>exakten</u> Komplex. Dies ist klar, falls $G(k)$ lokalfrei ist. Für den Schluß im allgemeinen Fall wird auf das Kapitel über Basiswechsel (V,$\S 4$) verwiesen.

3.Schritt: Bezeichne $\lambda_i(E)$ Tensormultiplikation mit der Klasse von $\bigwedge^i(E)$ (aufgefaßt als Operation auf $K.(Y)$ ist dies wohldefiniert, da $\bigwedge^i(E)$ lokalfrei ist). Anwenden der Projektionsformel liefert eine <u>Rekursionsformel</u>

$$\chi(k) - \lambda_1(E)\chi(k-1) + ... \pm \lambda_{n+1}(E)\chi(k-n-1) = 0$$

für die Hilbertfunktion

$$\chi(k) = \chi(G(k))$$

mit Werten in $K_\bullet(Y)$.

4.Schritt: Ist E trivial, dann ist

$$\lambda_i(E) = \binom{n+1}{i}$$

und die Rekursionsformel reduziert sich auf die Differenzengleichung $\Delta^{n+1}\chi = 0$. Daraus folgt die Behauptung.

Bemerkung: Im allgemeinen Fall, wo E nicht trivial ist, erhält man auch eine Differenzengleichung. Dazu dualisiert man den obigen Komplexes und erhält nach kurzer Rechnung

$$\big(\Delta^{n+1} + \gamma_1(E^* - n - 1)\Delta^n + ... + \gamma_{n+1}(E^* - n - 1)\big)\chi(.) = 0$$

für die Hilbertfunktion $\chi(k) = \chi(G(k))$. Hierbei sind die $\gamma_i(E^* - n - 1)$ definiert in $K_.(Y)$ durch

$$\sum_i \gamma_i(E^* - n - 1)t^i = \sum_i \lambda_i(E^*)t^i(1-t)^{n+1-i}$$

im Sinne eines formalen Koeffizientenvergleiches.

Wir machen nun einen weiteren Vorgriff auf das Kapitel über Basiswechsel (V,$\S 4$) und bemerken

Sei L lokalfreie Garbe auf $\mathbb{P}_Y(E)$ und $\pi_Y : \mathbb{P}_Y(E) \to Y$ die natürliche Abbildung. Sei $y \in Y$ ein abgeschlossener Punkt mit Restklassenkörper $k = O_{Y,y}/m_y$. Man hat dann natürliche Morphismen

$$\begin{tikzcd} \mathbb{P}^n_k \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\pi_k"] & \mathbb{P}^n_R \arrow[d, "\pi_k"] \\ Spec(k) \arrow[r, "i"] & Spec(R) \end{tikzcd} \quad , \ L$$

Lemma: Sei die Situation wie eben beschrieben. Sei Y zusammenhängend als topologischer Raum. Dann ist die natürliche Zahl

$$(\pi_k)_K([i^*(L)])) \in \mathbb{Z} \quad (\overset{dim_k}{\longleftarrow} K_\bullet(Spec(k)) \ .$$

unabhängig von der Wahl des Punktes $y \in Y$.

Beweis: Wegen der Rekursionsformeln genügt es die Unabhängigkeit aller Twists

$$(\pi_k)_K([i^*(L(j))])$$

für alle $j >> 0$ zu zeigen.

Beachte $i^*(L(j)) = i^*(L)(j)$!

Für $j >> 0$ ist $R^i(\pi_Y)_*(L(j)) = 0$ falls $i > 0$. Somit ist $(\pi_Y)_*(L(j))$ lokalfrei (siehe Kapitel V,$\S 4$ über Basiswechsel!) und vertauscht mit Basiswechsel!. Daher gilt zum einen wegen des Verschwindens der höheren direkten Bilder $\pi_K([L(j)]) = [\pi_*(L(j))]$. Identifiziert man $K_\bullet(Spec(k))$ mit $\mathbb{Z}$ via dim_k, ist dieser Wert (für $\pi = \pi_k$) gleich dem Rang der lokalfreien Garbe $(\pi_K)_*(L(j))$ auf Grund des Basiswechselsatzes. Dieser Rang ist konstant, da Y zusammenhängend angenommen wurde.

§6 Appendix:K_X down to earth

Dieser Abschnitt kann vorerst übersprungen werden!

Sei S ein graduierter Ring, $X = Proj(S)$ und K_X die Kategorie der kohärenten Garben auf X.

Für jeden endlich erzeugten graduierten S-Modul M gilt $M_j = 0$ für alle $j << 0$. Zwei graduierte S-Moduln M und N heißen äquivalent, wenn $M_j = N_j$ gilt für alle $j >> 0 \in \mathbb{Z}$. Ein solches M ist äquivalent zum Nullmodul genau dann, wenn seine Vergarbung M_X die Nullgarbe ist (siehe III, §4). Die Äquivalenzklassen endlich erzeugter graduierter S-Moduln definieren eine abelsche Kategorie bzgl. graduierter S-Homomorphismen. Wir zeigen

Satz: Die Kategorie K_X ist äquivalent zur Kategorie der Äquivalenzklassen endlich erzeugter graduierter S-Moduln.

Beweis: Im Hinblick auf III, §4 genügt es zu zeigen, daß für endlich erzeugte graduierte S-Moduln M die natürliche Abbildung $M \to \Gamma_*(M_X)$ ein Isomorphismus ist

$$M_j \cong H^0(X, M_X(j))$$

für alle Grade $j >> 0$.

Warnung: Die graduierten Moduln $\Gamma_*(M_X)$ sind selbst nicht notwendiger Weise endlich erzeugte graduierte Moduln sondern nur äquivalent zu solchen (z.B. im Fall von Wolkenkratzergarben).

1.Schritt (Reduktion auf $M = S$): Endlich erzeugte graduierte S-Modul M besitzen Auflösungen

$$S(k')^{r'} \to S(k)^r \to M \to 0 \ .$$

Aus §4 Zusatz folgt für $j >> 0$ (nach Vergarbung) die Existenz exakter Sequenzen

$$\begin{tikzcd}
S^{r'}_{k'+j} \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & S^r_{k+j} \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & M_j \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & 0 \arrow[d, "\cong"'] \\
H^0(X, O^{r'}_X(k'+j)) \arrow[r] & H^0(X, O^r_X(k+j)) \arrow[r] & H^0(X, M_X(j)) \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Das 5-Lemma reduziert die Behauptung daher auf den Fall $M = S(k)$ (obdA $k = 0$).

2.Schritt (Reduktion auf $X = \mathbb{P}^n_R$): Wie in III §5 können wir S als Quotient eines Polynomrings T realisieren. Der Quotient besitzt als endlich erzeugter graduierter Modul über dem Polynomring eine Auflösung

$$T(k')^{r'} \to T(k)^r \to S \to 0 \ .$$

Da $H^0(X, O_X(j)) \cong H^0(\mathbb{P}^n_R, i_*(O_X))$ und da $i_*(O_X) = S_{\mathbb{P}^n_R}$, folgt durch Vergarbung und §4 Zusatz somit die Existenz von exakten Sequenzen

$$\begin{tikzcd}
T^{r'}_{k'+j} \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & T^{r}_{k+j} \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & S_j \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d, "\cong"'] \\
H^0(\mathbb{P}^n_R, O^{r'}(k'+j)) \arrow[r] & H^0(\mathbb{P}^n_R, O^{r}(k+j)) \arrow[r] & H^0(X, O_X(j)) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Erneut reduziert das 5-Lemma die Behauptung auf den Fall des Moduls T.

<u>3.Schritt:</u> Für den verbleibenden Fall $S = R[X_0, ..., X_n]$, $M = S$ folgt die Behauptung aus der expliziten Berechnung der Kohomologiegruppen $H^i(\mathbb{P}^n_R, O(j))$ des projektiven Raumes (III §6 Korollar).

§7 Appendix: Varietäten

In diesem Abschnitt sei X ein (nicht notwendig noethersches) Schema.

1.Definition: X heißt reduziert, wenn eine der äquivalenten Eigenschaften erfüllt ist

(i) $O_X(U)$ ist reduziert für alle U.

(ii) $O_X(U)$ ist reduziert für alle affinen U.

(iii) $O_{X,x}$ ist reduziert für alle $x \in X$.

Beweis: (i)$\Longrightarrow$ (ii) ist trivial, (ii)$\Longrightarrow$(i) folgt aus Garbenaxiom G1). (ii)$\Longrightarrow$(iii): Sei R reduziert. Sei $n/\tilde{s} \in S^{-1}R$ nilpotent. Dann gilt $n^N \cdot s = 0$ für ein $N \in \mathbb{N}$ und ein $s \in S$. Also $(n \cdot s)^N = 0$ in R, somit $n \cdot s = 0$. Es folgt $n/\tilde{s} = 0$ in $S^{-1}R$. (iii)$\Longrightarrow$ (ii): Offensichtlich gilt $Nil(R)_x \subset Nil(R_x)$. Ist R_x reduziert, folgt $Nil(R)_x = 0$. Gilt dies für alle $x \in X$, folgt $Nil(R) = 0$ (Halmkriterium für die zu $Nil(R)$ assoziierte Garbe).

2.Definition: X heißt integer, wenn eine der äquivalenten Eigenschaften erfüllt ist:

(i) X ist irreduzibel und reduziert.

(ii) $O_X(U)$ ist integer für alle U.

(iii) $O_X(U)$ ist integer für alle affinen U.

(iv) $O_{X,x}$ ist integer für alle $x \in X$.

Beweis: (ii) $\Longrightarrow$ (i): Sei X reduzibel $X = A_1 \cup A_2, A = A_1 \cap A_2$ und $U_i = X \setminus A_i$ und $U_i \neq \emptyset$. Dann ist $O_X(U_1 \cup U_2) = O_X(U_1) \oplus O_X(U_2)$ (Garbenaxiome), also nicht integer. (i) $\Longrightarrow$ (ii): Gegeben $f_i \in O_X(U)$ mit $f_1 \cdot f_2 = 0$. Dann ist $U = Z(f_1) \cup Z(f_2)$. Ist X irreduzibel, dann auch jede nichtleere offene Teilmenge U. Also obdA $Z(f_1) = U$, d.h. $f_1 = 0$.

(ii)$\Longrightarrow$ (iii) $\Longrightarrow$ (iv): Ist R ein integrer Ring, dann gilt $R \subset R_x \subset Quot(R)$. Also ist R_x integer.

(iv)$\Longrightarrow$ (i): Wäre X reduzibel, gilt $X = A_1 \cup A_2$ mit $A_i \neq X$. Da X zusammenhängend ist, folgt $A = A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$. Wähle $x \in A$. Ist $X = Spec(R)$ affin, dann gibt es minimale Primideale $p_1 \neq p_2$ mit $p_i \subset p_x$. Lokalisieren nach $S = R \setminus p_x$ liefert zwei verschiedene minimale Primideale $S^{-1}p_i$ in R_x. Also wäre R_x nicht integer. Widerspruch! Ist X nicht affin, dann betrachte affine Umgebungen $U = Spec(R)$ von $x \in A$. Obiges Argument im affinen Fall zeigt $A_1 \cap U = U$ oder $A_2 \cap U = U$. Also $U \subset A_1$ oder $U \subset A_2$. Es folgt $X = X_1 \sqcup X_2 \sqcup X_3$ (!), wobei X_1 die Menge der Punkte $x \in X$ ist, für die beliebig kleine affin offene Umgebungen $U(x)$ von x in A_1 existieren, die nicht in A_2 liegen. Umgekehrt für X_2. X_3 ist hierbei die Menge der Punkte $x \in X$, für die jede genügend kleine affin offene Umgebung $U(x)$ von x in A_1 und A_2 liegt. Beachte $A_i \setminus A \subset X_i$. Also $X_1, X_2 \neq \emptyset$. Alle $X_i \subset X$ sind aber offen per Definition. Da die Zerlegung disjunkt ist, sind alle

X_i dann auch abgeschlossen. Da X zusammenhängend ist, folgt $X = X_i$ für ein i im Widerspruch zu $X_1, X_2 \neq \emptyset$.

1.Lemma: Sei X irreduzibel. Dann sind die Restriktionen für alle offenen Teilmengen $\emptyset \neq V \subset U$ injektiv $res: \ O_X(U) \hookrightarrow O_X(V)$.

Beweis: ObdA $X = U$. Sei $f \in O_X(X)$ Null auf V und $Z(f)$ der "Nullstellenort" von f, eine abgeschlossene Menge. Dann gilt $V \subset Z(f)$, also $\overline{V} \subset Z(f)$. Da X irreduzibel ist, folgt $\overline{V} = X$. [Beachte $X = \overline{V} \cup (X \setminus V)$, und X ist irreduzibel]. Also $f = 0$ auf ganz X.

Derselbe Beweis zeigt auch

Hilfssatz: Sei X integer (somit irreduzibel), $\phi : L_1 \to L_2$ ein O_X-Garbenhomomorphismus zwischen Linienbündeln auf X. Dann ist entweder $\phi = 0$ oder ϕ ist injektiv.

Beweis: Durch Tensorieren mit $(L_1)^*$ gilt obdA $L_1 = O_X$ (siehe auch V, $\S$ 2). Also ist ϕ ein Schnitt der lokalfreien Garbe L_2. Der Verschwindungsort eines solchen Schnitts ist abgeschlossen in X (da dies lokal der Fall ist). Aus $Kern(\phi_x) \neq 0$ folgt $\phi_x = 0$, da $O_{X,x}$ integer ist. Somit $\phi|V = 0$ in einer Umgebung V von x, und damit $\phi = 0$ auf ganz X.

2.Lemma: Ein irreduzibles Schema X besitzt einen eindeutig bestimmten Punkt $\eta \in X$ mit der Eigenschaft $X = \overline{\{\eta\}}$ (den sogenannten generischen Punkt). Zusatz: η liegt dann (offensichtlich) in jeder nichtleeren offenen Teilmenge von X.

Beweis: ObdA X reduziert. Wegen des Zusatzes folgt die Eindeutigkeit bereits aus dem affinen Fall. Ebenso die Existenz: Sei $U = Spec(R) \subset X$ affin offen. Dann ist U wieder irreduzibel, und R ist integer und $P_\eta = \{0\}$ das generische Primideal $\eta \in U$! Der Abschluß von η in X umfaßt daher U, somit $\overline{U}$. Aber $\overline{U} = X$ wegen $X = \overline{U} \cup (X \setminus U)$, denn X ist irreduzibel. Dies zeigt die Existenz des generischen Punktes.

Sei X integer. Aus dem letzten Lemma und dem Zusatz folgt $O_{X,\eta} = Quot(R)$ für jedes (!) affin offene Schema $Spec(R) \subset X$. Man nennt $M(X) = O_{X,\eta}$ den Quotientenkörper von X. Wegen $O_{X,\eta} = lim_{U \ni \eta} O_X(U)$ und wegen den letzten beiden Lemmata folgt

$$O_X(U) \hookrightarrow M(X) \quad , \quad (X \text{ irreduzibel})$$

für alle offenen $U \subset X$. Aus Lemma 1 und 2 folgt

3.Lemma: Sei X integer (somit irreduzibel). Dann gilt

(i) $O_X(U) \hookrightarrow O_{X,x}$ für alle $x \in U$.

(ii) $O_X(U) \ = \ \bigcap_{x \in U} O_{X,x} \ \subsetneqq \ M(X)$ für $U \neq \emptyset$.

Beweis: $U \mapsto \bigcap_{x\in U} O_{X,x}$ definiert offensichtlich eine Garbe auf X, welche O_X als Untergarbe enthält. Aussage (ii) genügt es daher auf einer Basis der offenen Mengen zu zeigen, z.B auf allen affinen Karten $U = Spec(R)$ zu zeigen. Benutze dann

$$\bigcap_{x\in U} R_x \ = R$$

für integre Ringe R. Denn für $\alpha \in Quot(R)$ mit $\alpha = f_x/g_x \in R_x$ für alle $x \in U$ gilt $I = (g_x, ...)_{x\in U} = R$. [Anderenfalls gäbe es ein maximales Ideal $p_y \supseteq I$ im Widerspruch zu $g_y \in I, g_y \notin p_y$]. Also $1 = \sum_x h_x \cdot g_x$ (endliche Summe), somit $\alpha = \sum_x \alpha h_x g_x = \sum_x h_x f_x \in R$.

Definition: Ein Schema X heißt regulär, wenn alle lokalen Ringe $O_{X,x}$ reguläre lokale Ringe sind (siehe auch V, §5).

Ein regulärer lokaler Ring ist integer! Somit ist ein zusammenhängendes reguläres Schema automatisch irreduzibel und reduziert.

Definition: Sei k ein Körper. Ein irreduzibles reduziertes projektives Schema $X = Proj(S)$ mit $S_0 = k$ heißt k-Varietät.

§8 Appendix: Kurven

Definition: Eine Kurve X über einem Körper k ist eine zusammenhängende reguläre projektive k-Varietät X der Krulldimension 1, insbesondere ist X irreduzibel und noethersch und separiert. Jeder lokale Ring $O_{X,x}$ von X ist dann ein diskreter Bewertungsring (Algebra II, Lemma 35.2), also normal. Insbesondere sind alle Ringe $O_X(U)$ normal.

Zur Erinnerung: Für eine Kurve X und $U \neq \emptyset$ offen in X gilt $O_X(U) = \bigcap_{x \in U} O_{X,x}$ in $M(X)$ nach §7, Lemma 3.

Variante: Sei $D = \sum_{P \in |X|} n_x \cdot x$ ein Divisor auf einer Kurve X, d.h. seien $n_x \in \mathbb{Z}$ für abgeschlossene Punkte x von X und $n_x = 0$ für fast alle x. Dann definiert für $U \neq \emptyset$

$$O_X(D)(U) = \bigcap_{x \in U} (p_x)^{-n_x} \quad \subset M(X)$$

eine Linienbündel (!) $O_X(D)$ auf X. Es gilt $O_X(D) = O_X$ für $D = 0$.

Der Grad: Der Grad eines Divisors $D = \sum n_x \cdot x$ ist $deg(D) \; = \; \sum_x n_x \cdot dim_k(k(x))$. Hierbei ist $k(x) = O_{X,x}/p_x$, eine Körpererweiterung von k. Da X projektiv über k ist, ist diese endlich erzeugt über k, also endlich über k (Algebra II, Korollar 3.3).

Bemerkung: Sei $P \in |X|$. Aus der Definition von $O_X(n \cdot P)$ und $M(X) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (p_P)^{-n}$ (Bewertungsring) folgt

$$H^0(X \setminus P, O_X) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} H^0(X, O_X(n \cdot P)) \ .$$

Idealgarben: Jede Idealgarbe $J \subset O_X$ ist von der Gestalt $J \cong O_X(-D)$ für einen positiven Divisor (Algebra II, Folgerung 39.1), denn jede affin offene Karte $U = Spec(R)$ von X definiert einen Dedekindring R mit $\#(X \setminus U) < \infty$.

Sei $P \in X$ ein abgeschlossener Punkt der Kurve X und $i : P \to X$ die Inklusion. Per Definition existiert dann eine exakte Garbensequenz $0 \to O_X(-P) \to O_X \to i_*(k(P)) \to 0$. Siehe II, §6. Ist G lokalfrei(!) auf X, so erhält durch Tensorieren wieder eine exakte Sequenz

$$0 \to G(-P) \to G \to i_*(i^*G) \to 0 \ .$$

Es gilt $G|U \cong O_U^r$ in einer Umgebung U von P. Daher ist $i_* i^* G \cong i_*(k(P)^r)$ eine Wolkenkratzergarbe. Für Wolkenkratzergarben gilt

$$H^1(X, i_* i^*(G)) = H^1(P, i^*G) = 0$$

da P ein affines Schema isomorph zu $Spec(k(P))$ ist.

§9 Appendix: Satz von Riemann-Roch für Kurven

Sei X eine Kurve über einem Körper k. Wir setzen $h^i(X,G) = dim_k(H^i(X,G))$ sowie

$$\chi(G) = h^0(X,G) - h^1(X,G) \quad , \quad (G \in K_X) \ .$$

Bemerkung: Später wird gezeigt, daß $X \setminus P$ affin ist für jeden abgeschlossenen Punkt $P \in |X|$. Daraus folgt durch Cechauflösung mit zwei affinen Karten $h^i(X,G) = 0$ für $i \geq 2$.

Lemma: Sei X eine Kurve, G lokalfrei vom Rang r. Dann gilt

(i) $\chi(G(D)) = r \cdot deg(D) + \chi(G)$

(ii) $h^1(X,G) \ \geq \ h^1(X,G(D))$ für $D \geq 0$.

Insbesondere gilt wegen (i) also (schwacher Riemann-Roch)

$$h^0(X,G(D)) \ \geq \ r \cdot deg(D) + \chi(G) \ .$$

Beweis: (i) und (ii) folgt (nach Reduktion auf den Fall $D = P$) aus der langen exakten Kohomologie Sequenz und dem Verschwindungsatz für Wolkenkratzergarben (§8)

$$0 \to H^0(X,G(-P)) \to H^0(X,G) \to k(x)^r \to H^1(X,G(-P)) \to H^1(X,G) \to 0 \ .$$

Hilfssatz: Sei X eine Kurve über einem Körper k, sei $G \in K_X$ lokalfrei und $P \in |X|$. Dann gibt es ein $i_0 = i_0(G,P,X)$ mit $H^1(X, G \otimes_{O_X} O_X(iP)) = 0$ für $i \geq i_0$.

Beweis: Wähle m mit $H^0(X, O_X(-1) \otimes_{O_X} O_X(mP)) \neq 0$ (schwacher Riemann-Roch). Dies liefert eine Injektion $O_X(1) \hookrightarrow O_X(mP)$. Durch Tensorieren also $O_X(n) \hookrightarrow O_X(mnP)$. Da die Quotientengarbe Q eine Wolkenkratzergarbe ist, gilt $H^1(X,Q) = 0$. Die Sequenz

$$H^1(X,G(n)) \to H^1(X,G(mnP)) \to H^1(X,Q)$$

impliziert dann $H^1(X,G(mnP)) = 0$ im Fall $H^1(X,G(n)) = 0$. Dies gilt für $n >> 0$ (Serre Verschwindungssatz). Aber $dim_k H^1(X, G((i+1)\cdot P)) \leq dim_k H^1(X, G(i \cdot P))$ (Lemma (ii)).

1.Korollar: Sei X eine Kurve, G lokalfrei vom Rang r. Dann existiert ein $i(X,G)$ so daß gilt

$$h^0(X,G(D)) = r \cdot deg(D) + \chi(G)$$

(bzw. dazu äquivalent $H^1(X,G(D)) = 0$) für $deg(D) \geq i(G,X)$.

Beweis: Angenommen $O_X(i_0P) \hookrightarrow O_X(D)$. Da die Quotientengarbe eine Wolkenkratzergarbe ist, folgt nach Tensorieren mit G die Aussage aus dem Hilfssatz und der langen Kohomologiesequenz. Sei allgemeiner L ein Linienbündel. Wir zeigen $O_X(i_0P) \hookrightarrow L(D)$ für

$deg(D) >> 0$. Dazu genügt $H^0(X, L(D) \otimes O_X(-i_0P)) \neq 0$. Dies folgt aber für $deg(D) >> 0$ aus dem schwachen Riemann-Roch.

Dies beweist nicht nur Korollar 1. Vielmehr folgt: $L^*(i_0P - D) \subset O_X$ ist eine Idealgarbe, also von der Gestalt $O_X(D')$ für einen Divisor D' (siehe §8). Also

<u>2.Korollar</u>: Jedes Linienbündel L ist von der Gestalt $L \cong O_X(D)$ für einen Divisor D. (Hierbei ist $deg(D)$ durch L eindeutig bestimmt, nicht aber D! Dies definiert $deg(L)$).

Seien nun $P \neq Q$ abgeschlossene Punkte der Kurve X, und sei U eine affin offene Umgebung von Q in $X \backslash P$: Aus Dimensionsgründen ist $(X \backslash P) \backslash U$ eine endliche Vereinigung von abgeschlossenen Punkten $P_1, .., P_m$ mit $P_i \neq Q$. Aus Korollar 1 folgt die Existenz von Schnitten $s_i \in O_X(X \setminus P)$ mit $s(Q) \neq 0$ und $s(P_i) = 0$, denn $h^0(X, O_X(nP - Q - P_i)) = h^0(X, O_X(nP)) - 2$ für $n >> 0$. Setze $f = s_1 \cdots s_m$ in

$$O_X(X \setminus P) = \bigcup_n H^0(X, O_X(n \cdot P)) \ .$$

Dann gilt $f(Q) \neq 0$ und $(X \setminus P)_f \subset U$. Wegen $(X \setminus P)_f = U_f$ ist $(X \setminus P)_f$ also affin. Variiert man Q, überdecken diese affinen Karten das noethersche Schema $X \setminus P$. Nach dem Affinitätskriterium von II, §4 ist daher $X \setminus P$ selbst affin.

<u>3.Korollar</u>: $X \setminus P$ ist affin für jedes $x \in |X|$.

Man zeigt leicht, daß die Grothendieckgruppe $K_\bullet(X)$ von lokalfreien Garben L (obdA sogar vom Rang 1) erzeugt wird. Wir lassen dies als Übungsaufgabe.

Wir setzen dann

$$c_0(\sum_i n_i \cdot [L_i]) \ = \ n_i \cdot rang(L_i) \ .$$

Elemente im Kern von c_0 schreiben sich in der Gestalt $\sum_i([L_i] - [O_X])$. Beachte

$$[G] \mapsto [G] - c_0(G) \cdot [O_X]$$

definiert einen Homomorphismus $p : K_\bullet(X) \to Kern(c_0) \subset K_\bullet(X)$, welcher auf $Kern(c_0)$ die Identität ist.

Wir setzen dann $c_1 = \chi \circ p$. Beachte $\chi : K_\bullet(X) \to \mathbb{Z}$ definierte einen Homomorphismus wegen der Additivität der Eulercharakteristik $\sum_\nu (-1)^\nu h^\nu(X, -)$ [unter Benutzung des aus Korollar 3 folgenden Verschwindungssatzes $H^\nu(X, G) = 0$ für $\nu \geq 2$].

Für Linienbündel L_i (unter Benutzung von Korollar 2) gilt dann

$$c_1(\sum_i([L_i] - [O_X]) \ = \ \sum_i deg(L_i) \ .$$

Es gilt nämlich $c_1\Big([G] - c_0(G)\cdot[O_X]\Big) = \chi(G) - c_0(G)\cdot\chi(O_X) = deg(G)$ für Linienbündel G, wegen $c_0(G) = 1$ und wegen des allerersten Lemmas.

<u>4.Korollar</u>(Riemann-Roch): Dies definiert Gruppenhomomorphismen $c_i : K_\bullet(X) \to \mathbb{Z}$, so daß gilt

$$h^0(X,G) - h^1(X,G) = c_1(G) + c_0(G)\cdot(1-g_X)$$

für alle kohärenten Garben G auf X.

Hierbei ist $g_X := h^1(X,O_X)$ das <u>Geschlecht</u> der Kurve X.

V LOKALFREIE GARBEN

§1 Charakterisierung lokalfreier Garben

1.Lemma: Für eine kohärente Garbe L auf X (noethersch!) sind äquivalent:

1) L ist lokalfrei

2) Alle Halme L_x sind freie $O_{X,x}$-Moduln (obdA $x \in X$ abgeschlossen).

Beweis (nichttriviale Richtung 2 nach 1): Sei $s_1, .., s_r$ eine Basis des freien $O_{X,x}$-Moduls L_x. Betrachte Fortsetzungen der s_i auf eine gemeinsame offene Umgebung U von x und

$$O_U^r \to L$$

$$(f_1, .., f_r) \mapsto \sum_{i=1}^{r} f_i \cdot res((U, V)(s_i)$$

für $V \subset U$ (auf den Schnittmoduln!). Die Halme $K_x = Q_x = 0$ von Kern und Bild sind Null. Es folgt $K|V = Q|V = 0$ auf einer offenen Umgebung V von x (Abgeschlossenheit des Trägers der kohärenten (!) Garben K und Q). Somit ist L lokalfrei: $L|V \cong O_V^r$.

Bemerkung: Da wir X als noethersch annehmen, sind alle lokalen Ringe $R = O_{X,x}$ noethersche, lokale Ringe. Für jede kohärente Garbe G auf X sind die Halme $M = G_x$ endlich erzeugte $R = O_{X,x}$-Moduln.

2.Lemma: Sei R ein lokaler, noetherscher Ring mit Restklassenkörper $k = R/m$, M ein endlich erzeugter R-Modul. Dann sind äquivalent:

1) M ist frei.

2) $Tor_1(M, k) = 0$

Hierbei bezeichnet $Tor_i(M, k)$ die Linksderivierten des rechtexakten Funktors $(.) \otimes_R k$ bzw. äquivalent (!) des rechtsexakten Funktors $M \otimes_R (.)$.

Beweis von Lemma 2: Die Richtung 1) nach 2) benutzt die zweite Definition von Tor_1. Für die Richtung 2) nach 1) benutzen wir die erste Definition! Wähle (endliche!) k-Basis

$$k^r \cong M \otimes_R k \quad (= M/mM) \ .$$

Wahl von Urbildern liefert eine Abbildung

$$R^r \to M$$

mit Kokern Q. Da $(.) \otimes_R k$ rechtsexakt ist, folgt $Q \otimes_R k = 0$ bzw. $Q = 0$ (Nakayama Lemma)

$$0 \to K \to R^r \to M \to 0$$

sowie dann nach Annahme 2)

$$0 = Tor_1(M,k) \to K \otimes_R k \to k^r \overset{\cong}{\to} M \otimes_R k \to 0 \ .$$

Es folgt $K \otimes_R k = 0$ und somit $K = 0$ (Nakayama Lemma).

<u>Variante:</u> Frei impliziert projektiv ($Hom_R(M,(.))$ exakt) impliziert flach ($M \otimes_R (.)$ exakt) impliziert $Tor_1(M,k) = 0$ impliziert frei. Diese Begriffe sind somit im vorliegenden Fall äquivalent.

<u>Korollar:</u>

1) Sind L, L'' lokalfrei und ist $0 \to L' \to L \to L'' \to 0$ exakt, dann ist L' lokalfrei.

2) Sind L, L' lokalfrei und $\phi : L \to L'$ sei O_X-linear. Ist

$$\phi \otimes k(x) : L_x \otimes_{O_X,x} k(x) \to L'_x \otimes_{O_X,x} k(x)$$

injektiv für alle abgeschlossenen Punkte $x \in X$, dann ist $Kokern(\phi)$ lokalfrei und ϕ ist injektiv

$$0 \to L \to L' \to Kokern(\phi) \to 0 \ .$$

<u>Beweis:</u> ObdA $X = Spec(R)$, R lokal. 1) ist klar wegen der langen exakten Tor-Sequenz. 2) folgt durch Aufsplitten $\phi = v \circ u$ mit $u : L \to Bild(\phi)$ und $v : Bild(\phi) \to L'$. Aus $\phi \otimes k$ injektiv folgt dasselbe für $u \otimes k$ und $v \otimes k$. Aus $Tor_1(L',k) = 0$ und letzterem folgt daher $Tor_1(Kokern(\phi),k) = 0$. Somit ist $Kokern(\phi)$ lokalfrei. Aus 1) folgt dann $Bild(\phi)$ lokalfrei. Nochmals 1) zeigt $Kern(\phi)$ lokalfrei. Aber da $u \otimes k$ injektiv ist folgt dann $Kern(\phi) = 0$ aus dem Nakayama Lemma .

<u>Zur Erinnerung</u>: Ein Schema X heißt <u>integer</u>, wenn X zusammenhängend ist und alle lokalen Ringe $O_{X,x}$ <u>nullteilerfrei</u> sind.

<u>Lemma:</u> Ist X <u>integer</u>, dann ist eine <u>kohärente</u> Garbe L lokalfrei genau dann wenn für alle (abgeschlossenen) Punkte $x \in X$ mit lokalem Ring R_x, Restklassenkörper $k(x)$ und Quotientenkörper $Q(x)$ gilt

$$dim_{Q(x)}(L_x \otimes_{R_x} Q(x)) = dim_{k(x)}(L_x \otimes_{R_x} k(x)) \ .$$

<u>Beweis:</u> ObdA $X = Spec(R), R = O_{X,x}$ und $L_x = M$ nach Lemma 1. Wie im Beweis von Lemma 2 erhält man eine Sequenz

$$0 \to K \to R^r \to M \to 0 \quad , \quad r = dim_{k(x)}(M \otimes_R k(x)) \ .$$

Nach Annahme gilt aus Dimensionsgründen dann $dim_{Quot(R)}(K \otimes_R Quot(R)) = 0$. Also $K \otimes_R Quot(R) = 0$ und somit wird jedes Element in K annuliert von einem Element $f \in R$. Aus $K \subset R^r$ und der Nullteilerfreiheit von R folgt $K = 0$ und somit $M \cong R^r$.

Appendix

Nakayama Lemma: $M \otimes_R k = 0$ – mit anderen Worten $M = mM$ – impliziert $M = 0$ unter den Voraussetzungen von Lemma 2.

Der entscheidende Punkt ist folgende Eigenschaft lokaler Ringe: $\mu \in m \Rightarrow 1 - \mu \notin m \Rightarrow (1-\mu)R = R$ (sonst existiert ein maximales Ideal über $1-\mu$) $\Rightarrow 1 - \mu \in R^*$.

Beweis: Wähle ein zyklisches $M' \subset M$, so daß M/M' weniger Erzeugende besitzt als M.

$$0 \to M' \to M \to M/M' \to 0 \ .$$

Da $\otimes_R k$ rechtsexakt ist, folgt $(M/M') \otimes_R k = 0$ und $M/M' = 0$ (durch Induktion nach Zahl der Erzeugenden). Somit ist obdA $M = M'$ zyklisch.

Ist M zyklisch (d.h. erzeugt von einem Element x), folgt wegen $x = \mu x, \mu \in m$ $\big(M = mM$ nach Annahme) daher $(1-\mu)x = 0$ und aus der Vorbemerkung $M = 0$.

§2 Die Picardgruppe

Sei X ein Schema und $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ lokalfrei auf X. Dann sind auch

$$\mathcal{H}\mathrm{om}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E},\mathcal{F}) \quad , \quad \mathcal{E}\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{F} \quad , \quad \mathcal{E}\oplus\mathcal{F}$$

lokalfrei.

Da die Aussagen lokal auf X sind, kann man zum Beweis o.B.d.A. annehmen $\mathcal{E}\cong\mathcal{O}_U^r$, $\mathcal{F}\cong\mathcal{O}_U^s$. Man reduziert nun die Aussagen auf $\mathcal{H}\mathrm{om}_{\mathcal{O}_U}(\mathcal{O}_U^r,\mathcal{O}_U^s)\cong\mathcal{O}_U^{rs}$, $\mathcal{O}_U^r\otimes_{\mathcal{O}_U}\mathcal{O}_U^s\cong\mathcal{O}_U^{rs}$, $\mathcal{O}_U^r\oplus\mathcal{O}_U^s\cong\mathcal{O}_U^{r+s}$.

Spezialfall: Ist $\mathcal{E}$ lokalfrei, dann auch die duale Garbe

$$\mathcal{E}^* := \mathcal{H}\mathrm{om}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E},\mathcal{O}_X)$$

Lemma: Sind $\mathcal{F},\mathcal{G}$ lokalfrei, dann gilt

$$\mathcal{F}^*\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{G} := \mathcal{H}\mathrm{om}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F},\mathcal{O}_X)\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{G}\xrightarrow{\sim}\mathcal{H}\mathrm{om}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F},\mathcal{G})$$

Beweis: Man hat eine natürliche $\mathcal{O}_X$-lineare Abbildung von $\mathcal{H}\mathrm{om}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F},\mathcal{O}_X)\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{G}$ nach $\mathcal{H}\mathrm{om}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F},\mathcal{G})$. Daß dies ein Isomorphismus ist, ist eine lokale Aussage. Sie folgt leicht aus $\mathcal{H}\mathrm{om}_{\mathcal{O}_U}(\mathcal{O}_U^r,\mathcal{O}_U)\otimes_{\mathcal{O}_U}\mathcal{O}_U^s\cong\mathcal{O}_U^{rs}\cong\mathcal{H}\mathrm{om}_{\mathcal{O}_U}(\mathcal{O}_U^r,\mathcal{O}_U^s)$.

Man zeigt analog

Lemma: Sind $\mathcal{E},\mathcal{F},\mathcal{G}$ lokalfrei, dann gilt

$$\mathcal{H}\mathrm{om}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E},\mathcal{H}\mathrm{om}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F},\mathcal{G}))\xrightarrow{\sim}\mathcal{H}\mathrm{om}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E}\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{F},\mathcal{G})$$

Korollar: $\mathcal{H}\mathrm{om}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E},\mathcal{F}^*\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{G})\xrightarrow{\sim}\mathcal{H}\mathrm{om}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E}\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{F},\mathcal{G})$ falls $\mathcal{E},\mathcal{F},\mathcal{G}$ lokalfrei sind auf X.

Fakt: $(\mathcal{E}^*)^*\cong\mathcal{E}$.

Beweis: Die natürliche Abbildung $(\mathcal{E}^*)^*\to\mathcal{E}$ ist für $\mathcal{E}=O_X^r$ ein Isomorphismus, also auch für lokalfreie Garben $\mathcal{E}$.

Wir betrachten nun lokalfreie Garben $\mathcal{E}$ vom Rang 1. Für diese ist die natürliche Auswertungsabbildung

$$Spur : \mathcal{E}\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{E}^*\longrightarrow\mathcal{O}_X$$

ein Isomorphismus.

Beweis: Die Aussage ist lokal. Sie folgt daher aus $\mathcal{O}_U \otimes_{\mathcal{O}_U} \mathcal{H}\mathrm{om}_{\mathcal{O}_U}(\mathcal{O}_U, \mathcal{O}_U) \cong \mathcal{O}_U$.

Korollar: Die Isomorphieklassen von lokalfreien Garben vom Rang 1 auf X bilden bezüglich $\otimes_{\mathcal{O}_X}$ eine abelsche Gruppe, die sogenannte Picardgruppe $Pic(X)$ des Schemas X.

Beweis: Einselement ist die Isomorphieklasse von $\mathcal{O}_X$. $\mathcal{E}^*$ ist invers zu $\mathcal{E}$:

$$\mathcal{O}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L} \cong \mathcal{L}$$

$$\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} (\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}) \cong (\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F}) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}$$

$$\mathcal{E}^* \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E} \cong \mathcal{O}_X$$

Beispiel: Sei K Zahlkörper (d.h. $[K : \mathbb{Q}] < \infty$), $\mathcal{O}_K$ Ring der ganzen Zahlen in K (= ganzer Abschluß von $\mathbb{Z}$ in K) und $X = Spec(\mathcal{O}_K)$. Dann ist $Pic(X)$ eine endliche (!!) abelsche Gruppe, die sogenannte Klassengruppe von K.

$$\#Pic(X) = h_K \text{ (Klassenzahl von } K)$$

Bemerkung: Die Fermatgleichung $X^n + Y^n = Z^n$ hat nur triviale Lösungen. Gilt $h_K = 1$ für den Kreiskörper $K = \mathbb{Q}(\xi_n)$ der n-ten Einheitswurzeln ξ_n kann man dies recht einfach zeigen.

Sei G eine lokalfreie Garbe auf X vom Rang n. Dann existiert per Definition eine offene Überdeckung $X = \cup_{i \in I} U_i$ von X, welche G trivialisiert

$$\psi_i : G|_{U_i} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}^n|_{U_i}.$$

Dies definiert Kartenwechsel–Garbenisomorphismen

$$\psi_{ji} : \mathcal{O}^n_{U_i \cap U_j} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}^n_{U_i \cap U_j}$$

durch $\psi_{ji} = \psi_j|_{U_i} \circ \psi_i^{-1}|_{U_j}$ mit der offensichtlichen Kozyklenbedingung

$$(*) \qquad \psi_{ji} \circ \psi_{ik} = \psi_{jk} \text{ (auf } U_i \cap U_j \cap U_k \text{)}$$

für alle i, j, $k \in I$.

Ist U eine offene Teilmenge von X, so gilt wegen der Garbenaxiome (!)

$$G(U) = \{s = (s_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} \mathcal{O}^n(U \cap U_i) | \psi_{ji}(res_{U_j}(s_i)) = res_{U_i}(s_j)\}.$$

Sei umgekehrt eine offene Überdeckung $X = \cup_{i\in I} U_i$ gegeben zusammen mit irgendwelchen Garbenisomorphismen ψ_{ji} der Garben $\mathcal{O}^n_{U_i\cap U_j}$ für alle $i,\ j \in I$, welche die Kozyklenbedingung $(*)$ erfüllen. Dann definiert der obige Ansatz

$$G(U) = \{s = (s_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} \mathcal{O}^n(U\cap U_i) | \psi_{ji}(res_{U_j}(s_i)) = res_{U_i}(s_j)\}$$

eine $\mathcal{O}_X$ Modulgarbe auf X.
Übungsaufgabe: Prüfe die Garbenaxiome G1) und G2)!
Es gilt $G|_{U_i} \cong \mathcal{O}^n_{U_i}$, denn die Kenntniss des Schnittes s_i legt wohldefiniert alle anderen Schnitte fest (Kozyklenbedingung $(*)$). Somit ist G lokalfrei.

<u>Bemerkung:</u> Die obige Beschreibung lokalfreier Garben gestattet es nun Konstruktionen der multilinearen Algebra auf lokalfreie Garben anzuwenden.
Die Kartenwechsel ψ_{ji} stellen wir uns vor als $n\times n$ Matrizen mit Einträgen im Ring $R = \mathcal{O}(U_i \cap U_j)$. Man definiert zum Beispiel <u>symmetrische</u> und <u>äußere</u> Potenzen

$$Symm^\nu G \ , \ \Lambda^\nu G$$

durch die Kartenwechselmatrizen $Symm^\nu(\psi_{ij})$ bzw $\Lambda^\nu(\psi_{ij})$.
Zur Erinnerung: $\Lambda^\nu\psi_{ij}$ ist hierbei die $\binom{n}{\nu}\times\binom{n}{\nu}$ Matrix, deren Einträge bis aufs Vorzeichen die Determinanten der $\nu\times\nu$ Untermatrizen von ψ_{ij} sind. Bekanntlich gilt $\Lambda^\nu(u\circ v) = \Lambda^\nu(u)\circ\Lambda^\nu(v)$. Somit gilt die Kozyklenbedingung.

<u>Bemerkung:</u> Ein wichtiger Spezialfall ist der Fall $\nu = n$. Die Garbe $\Lambda^n G$ ist dann lokalfrei vom Rang 1 und wird auch <u>Determinantenbündel</u> $det(G)$ von G genannt.

§3 Allgemeine Bemerkungen zum Spalten von Sequenzen:

Sei

$$0 \to \mathcal{E}_0 \to \mathcal{E}_1 \xrightarrow{p} \mathcal{E}_2 \to 0$$

eine kurze exakte Sequenz quasikohärenter Garben (oder allgemeiner von Objekten in einer abelschen Kategorie C mit genügend vielen injektiven Objekten).

Problem: Wann gilt $\mathcal{E}_1 \cong \mathcal{E}_0 \oplus \mathcal{E}_2$, so daß p die Projektion auf den Summanden $\mathcal{E}_2$ ist?

Äquivalent: Wann existiert eine Splittung $s : \mathcal{E}_2 \to \mathcal{E}_1$ (in C) mit

$$p \circ s = id_{\mathcal{E}_2}$$

Sprechweise: Wann zerfällt die Extension E von $\mathcal{E}_0$ und $\mathcal{E}_2$ definiert durch die exakte Sequenz?

Beachte: Die lange exakte Sequenz der Derivierten des Funktors

$$Hom(\mathcal{E}_2, -) : C \longrightarrow Ab$$

liefert als Hindernissequenz

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \to Hom(\mathcal{E}_2, \mathcal{E}_0) \to & Hom(\mathcal{E}_2, \mathcal{E}_1) & \to & Hom(\mathcal{E}_2, \mathcal{E}_2) & \xrightarrow{\delta} & Ext^1(\mathcal{E}_2, \mathcal{E}_0) \\ & \in & & \in & & \\ & s & \mapsto p \circ s \ ; & id_{\mathcal{E}_2} & \mapsto & \delta(id_{\mathcal{E}_2}) \end{array}$$

Aus der Exaktheit bei $Hom(\mathcal{E}_2, \mathcal{E}_2)$ folgt die Existenz einer Splittung s mit $p \circ s = id_{\mathcal{E}_2}$ daher genau dann, wenn gilt

$$\delta(id_{\mathcal{E}_2}) = 0 \qquad (\text{in } Ext^1(\mathcal{E}_2, \mathcal{E}_0)) \ .$$

Das heißt: Die Extension E zerfällt genau dann wenn die soeben definierte Extensionsklasse

$$[E] = \delta(id_{\mathcal{E}_2})$$

in $Ext^1(\mathcal{E}_2, \mathcal{E}_0)$ null ist.

Bemerkung: Im allgemeinen sind Ext-Gruppen schwer zu berechnen! Sind $\mathcal{E}_0$, $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$ lokalfrei, argumentiert man geschickter wie folgt:

Da $\mathcal{E}_2^*$ lokalfrei ist, ist $\mathcal{E}_2^* \otimes_{\mathcal{O}_X} -$ ein exakter Funktor. Wegen $\mathcal{E}_2^* \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F} \cong \mathcal{H}\mathrm{om}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E}_2, \mathcal{F})$ erhält man die exakte Garbensequenz

$$o \to \mathcal{H}\mathrm{om}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E}_2, \mathcal{E}_0) \to \mathcal{H}\mathrm{om}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E}_2, \mathcal{E}_1) \to \mathcal{H}\mathrm{om}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E}_2, \mathcal{E}_2) \to 0$$

Wegen (siehe I, §6 bzw II, §2)

$$H^0(X, \mathcal{H}\mathrm{om}_{\mathcal{O}_X}(A,B)) = Hom_{\mathcal{O}_X}(A,B)$$

erhält man die lange exakte Sequenz

$$0 \to Hom_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E}_2, \mathcal{E}_0) \to Hom_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E}_2, \mathcal{E}_1) \to Hom_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E}_2, \mathcal{E}_2) \to H^1(X, \mathcal{E}_2^* \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E}_0)$$

Insbesondere splittet daher eine Extension E <u>lokalfreier</u> Garben, falls die <u>Extensionsklasse</u>

$$[E] \in H^1(X, \mathcal{E}_2^* \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E}_0)$$

verschwindet (selbes Argument wie oben!)

<u>Korollar:</u> Ist X <u>affin</u>, dann zerfällt jede Extension $0 \to \mathcal{E}_0 \to \mathcal{E}_1 \to \mathcal{E}_2 \to 0$ <u>lokalfreier</u> Garben auf X (affiner Verschwindungssatz!)

§4 Basiswechsel

Ziel dieses Abschnittes sind Vergleichsaussagen zwischen der Kohomologie des Totalraumes und der Kohomologie der Fasern in einer durch ein affines Schema $Spec(R)$ parametrisierten Familie projektiver Räume.

Wir machen zunächst einige allgemeine Vorbemerkungen über flache R-Moduln. Dazu jagen wir in folgendem Diagramm gebildet zu einem endlichen Komplex

$$0 \to K_0 \to ... \to K_n \to 0$$

von R-Moduln mit Kohomologiemoduln $H_i, i = 0, ..., n$. Man erhält durch Aufsplitten

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[d] & & & & 0 \arrow[dr] & & & & & & & & & & 0 \\
H_0 \arrow[dr] & & & 0 \arrow[r] & B_2 \arrow[r] \arrow[u] & Z_2 \arrow[rr] \arrow[dr] & & H_2 \arrow[rr] & & 0 & & & & H_n \arrow[ur] & \\
& K_0 \arrow[dr] & & & K_1 \arrow[u] & & K_2 & & \cdots\ \cdots & K_{n-1} \arrow[dr] & & & K_n \arrow[ur] & & \\
0 \arrow[rr] & & B_1 \arrow[r] \arrow[d] & Z_1 \arrow[r] \arrow[ur] & H_1 \arrow[r] & 0 & & & 0 \arrow[rr] & & B_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & Z_{n-1} \arrow[rr] \arrow[ur] & & H_{n-1} \arrow[r] & 0 \\
& & 0 \arrow[ur] & & & & & & & & 0 \arrow[ur] & & & &
\end{tikzcd}$$

Durch absteigende (!) Induktion folgert man aus der

Annahme: $H_1, ..., H_n$ und $K_0, .., K_n$ seien flache R-Moduln und alle Abbildungen seien R-linear

die

1.Folgerung: Alle verbleibenden Moduln $Z_{n-1}, B_{n-1}, ..., Z_1, B_1$ sowie H_0 sind flache R-Moduln.

Dies wiederum impliziert

2.Folgerung: $H^i(K^\cdot \otimes_R M) \cong H^i(K^\cdot) \otimes_R M$ für beliebige R-Moduln M (alle i).

Bemerkung: Wegen der Rechtsexaktheit des Tensorfunktors gilt ohne Vorraussetzungen immer $H^i(K^\cdot \otimes_R M) \cong H^i(K^\cdot) \otimes_R M$ für $i = n$ bzw. als Variante $H^i(K^\cdot \otimes_R M) \cong H^i(K^\cdot) \otimes_R M$ für $i = r$ falls $H_{r+1}, K_{r+1}, ..H_n, K_n$ flache R-Moduln sind.

Basiswechsel: Sei nun $X = \mathbb{P}^n_R$ und L eine lokalfreie Garbe auf X. Für jeden abgeschlossenen Punkt $x \in X$ und jede Körpererweiterung $k(x) \hookrightarrow k$ des Restklassenkörpers $k = k(x)$

erhält man abgeschlossene Immersionen i (induziert von dem graduierten Ringhomomorphismus $R[X_0,..,X_n] \twoheadrightarrow k[X_0,..,X_n]$)

$$\begin{tikzcd} \mathbb{P}^n_k \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathbb{P}^n_R = X \arrow[d, "\pi"'] \\ Spec(k) \arrow[r, "i"] & Spec(R) \end{tikzcd}$$

Wir sind interessiert an der Kohomologie der Einschränkungen $i^*(L)$ auf die Fasern $\mathbb{P}^n_k$. Man erhält für diese Faser-Kohomologiegruppen in Termen von $X = \mathbb{P}^n_R$

$$H^j(\mathbb{P}^n_k, i^*(L)) \cong H^j(X, i_*i^*(L)) \ .$$

Wegen der Projektionsformel $i_*i^*(L) = i_*(O_{\mathbb{P}^n_k}) \otimes_{O_{\mathbb{P}^n_R}} L$ und dann $O_{\mathbb{P}^n_k} = \pi^*(O_{Spec(k)})$ sowie dem trivialen (flachen) Basiswechsel $i_*\pi^* = \pi^* i_*$ für die Strukturgarbe ergibt sich dafür

$$H^j(X, L \otimes_{O_X} i_*(O_{\mathbb{P}^n_k})) \cong H^j(X, L \otimes_{O_X} \pi^*(i_* O_{Spec(k)})) \ .$$

<u>Frage:</u> Wie hängt nun aber $H^j(X, L \otimes_{O_X} \pi^*(M))$ ab von $H^j(X, L)$ und für (beliebige) R-Moduln M sowie für die Moduln $M = R/p_x = k(x)$ und $M = k$ im speziellen?

Die <u>Antwort</u> ist folgende: Die Kohomologie von L auf $X = \mathbb{P}^n_R$ berechnet sich mit Hilfe des Cech-Komplexes (oder des Tensorkomplexes aus III §5 tensoriert mit L).

<u>1.Lemma:</u> Dies liefert eine Γ-azyklische Auflösung der <u>lokalfreien</u> Garbe L mit <u>R-flachen</u> (!) Garben $\mathcal{K}_0, ..., \mathcal{K}_n$ (d.h. alle Schnittmoduln sind flache R-Moduln bezüglich des Basisrings)

$$0 \to L \to \mathcal{K}_0 \to \mathcal{K}_1 \to ... \to \mathcal{K}_n \to 0 \ .$$

(Übungsaufgabe!)

Betrachte nun den tensorierten Komplex

$$0 \to L \otimes_{O_X} \pi^*(M) \to \mathcal{K}_0 \otimes_{O_X} \pi^*(M) \to \mathcal{K}_1 \otimes_{O_X} \pi^*(M) \to ... \to \mathcal{K}_n \otimes_{O_X} \pi^*(M) \to 0$$

auf $X = \mathbb{P}^n_R$. Wegen der allgemeinen Formel $(F \otimes_{O_X} G)_x = F_x \otimes_{O_{X,x}} G_x$ zur Berechnung der Halme von Tensorprodukten ist dieser neue Komplex wieder exakt! (Wende nämlich obige Folgerung 2 an auf $R = O_{X,x}$ und den R-Modul $\pi^*(M)_x$; alle Flachheitsvoraussetzungen der Annahme sind erfüllt). Man erhält somit eine Auflösung der Garbe $L \otimes_{O_X} \pi^*(M)$ auf X.

In unserem Fall zeigt man nun (durch Überprüfen in den Standardkarten des projektiven Raumes X und Folgerung 1), daß dies eine Auflösung ist, deren Terme Γ-azyklisch sind (benutze z.B die Cech-Auflösung)! Die Kohomologie $H^j(X, L \otimes_{O_X} \pi^*(M))$ berechnet sich also als Kohomologie des Schnittkomplexes der globalen Schnitte $(\mathcal{K}_i \otimes_{O_X} \pi^*(M))(X)$. Benutzt man nun das

<u>2.Lemma</u>: $(G \otimes_{O_X} \pi^*(k))(X) = G(X) \otimes_R k$ (Übungsaufgabe !)

so ergibt sich für obige Frage (im Fall $M = k$)

$$H^j(X, L \otimes_{O_X} \pi^*(k)) \cong H^j(\mathcal{K}^\cdot(X) \otimes_R k) \ .$$

Hierbei ist $K^\cdot = \mathcal{K}^\cdot(X)$ obiger Komplex von <u>flachen</u> R-Moduln $K_i = \mathcal{K}_i(X)$ mit den Kohomologiegruppen $H^\cdot(X, L)$.

Man würde nun am liebsten schließen

$$H^j(\mathcal{K}^\cdot(X) \otimes_R k) \overset{?}{=} H^j(\mathcal{K}^\cdot(X)) \otimes_R k = H^j(X, L) \otimes_R k \ .$$

Dies ist im allgemeinen aber nicht möglich. Im Hinblick auf Folgerung 2 genügen allerdings die Voraussetzungen der Annahme, um so schließen zu können. Das bedeutet, daß zusätzlich zu obigen Betrachtungen angenommen werden muß, daß die $H^j(X, L)$ flache R-Moduln sind (d.h: $R^j\pi_*(L)$ <u>lokalfrei</u>).

Fassen wir zusammen, so erhalten wir aus Folgerung 1 und 2 als

<u>Korollar:</u> Sei L eine <u>lokalfreie</u> Garbe auf $\pi : \mathbb{P}^n_R \to Spec(R)$ (oder allgemeiner eine R-flache Garbe). Sind alle höheren direkten Bilder für $j \geq 1$

$$R^j\pi_*(L) \qquad i = 1, ..., n$$

<u>lokalfreie</u> Garben auf $Spec(R)$, dann ist auch

$$\pi_*(L)$$

lokalfrei auf $Spec(R)$ und es gilt

$$H^j(\mathbb{P}^n_k, i^*(L)) \cong H^j(\mathbb{P}^n_R, L) \otimes_R k \cong R^j\pi_*(L)_x \otimes_{R_x} k \qquad (j \geq 0)$$

für alle abgeschlossenen Punkte $x \in Spec(R)$, alle Körpererweiterungen und alle $j \geq 0$.

<u>Zusatz:</u> Sind die $R^j\pi_*(L)$ lokalfrei für alle $j = r+1, r+2, .., n$, dann gilt

$$H^r(\mathbb{P}^n_k, i^*(L)) \cong R^r\pi_*(L)_x \otimes_{R_x} k \ .$$

<u>Beweis des Korollars:</u> Die Aussage ist lokal, daher obdA $R = R_x$. Dann sind nach Annahme die

$$R^j(\pi_*(L))_x \overset{!}{=} H^j(\mathbb{P}^n_R, L)$$

freie (also flache) R-Moduln für $i > 0$ und berechnen sich als Kohomologiegruppen $H_1, H_2, ..$ aus dem Komplex $K^\cdot$ flacher R-Moduln K_i wie oben. Aus den Folgerungen 1 und 2 ergibt sich, daß dann auch $H_0 = \pi_*(L)_x$ ein flacher $R = R_x$-Modul ist sowie

$$H^j(K^\cdot \otimes_R k) = H^j(K^\cdot) \otimes_R k \ .$$

Die linke Seite ist nach obigen Ausführungen gerade $H^j(\mathbb{P}^n_k, i^*(L))$, die rechte Seite ist $H^j(\mathbb{P}^n_R, L) \otimes_R k$. Da $\pi_*(L)_x$ flach ist, gilt $Tor_1^{R_x}(\pi_*(L)_x, k) = 0$. Somit ist $\pi_*(L)_x$ ein freier R_x-Modul (siehe §1). Also ist $\pi_*(L)$ lokalfrei!

<u>Bemerkung:</u> Anders formuliert besagt der Zusatz, daß die Bildung des r-ten direkten Bildes $R^r\pi_*(-)$ mit dem Basiswechsel i^* vertauscht

$$R^r\pi_*(i^*(L)) \ \cong \ i^*(\mathbb{R}^r\pi_*(L)) \ .$$

<u>Bemerkung:</u> Im allgemeinen "springen" die Kohomologiegruppen der Fasern und lassen sich nicht durch die Halme der direkten Bilder kontrollieren. Die oben gemachten Annahmen erlauben eine solche Kontrolle. Die gemachten Annahmen lassen sich allerdings weiter abschwächen. Dies ist oft sehr nützlich! Siehe Hartshorne.

§5 Reguläre Ringe

Sei R ein noetherscher, lokaler Ring. Wir betrachten Komplexe $K(x_i)$

$$0 \to R \stackrel{x_i}{\to} R \to 0 \qquad \text{(mult. mit } x_i \text{ aus } R\text{)}$$

sowie die iterierten Tensorkomplexe (Koszulkomplexe)

$$K(x_1, ..., x_i) = K(x_1) \otimes_R K(x_2) \otimes_R ... \otimes_R K(x_i) \ .$$

Reguläre Sequenzen: $x_1, .., x_n$ heißt reguläre Sequenz, falls Multiplikation mit x_i Injektionen auf $R/(x_1, ..., x_{i-1})$ induziert, d.h.

$$H^0(R/(x_1, ..., x_{i-1}) \otimes_R K(x_i)) = 0$$

für alle $i = 1, .., n$. Insbesondere ist der Koszulkomplex $K^\cdot = K(x_1, .., x_n)$ eine freie Auflösung von

$$H^n(K^\cdot) = R/(x_1, .., x_n)$$

ist. Beweis: Folgt aus III, §6 durch Induktion nach n!

Definition: Der lokale Ring R heißt regulär, falls das maximale Ideal m von einer regulären Sequenz $x_1, .., x_n$ erzeugt wird

$$m = (x_1, ..., x_n) \ .$$

Die Zahl der Parameter n heißt Dimension des regulären Rings.

1.Folgerung: Sei $x_1, ..., x_n$ eine reguläre Sequenz, welche das maximale Ideal eines regulären Rings R erzeugt. Dann ist der Koszulkomplex $K^\cdot = K(x_1, .., x_n)$ eine freie Auflösung von

$$H^n(K^\cdot) = R/(x_1, .., x_n) = k$$

der Länge n.

Bemerkung: Die Umkehrung für $K^\cdot = K(x_1, .., x_n)$ gilt auch. Azyklizität von $K(x_1, ..., x_n)$ bis auf Stelle n impliziert die Regularität der Sequenz $x_1, ..., x_n$.
Beweis: Man möchte induktiv schließen und zeigen, daß die Annahme bereits das Verschwinden der $M^\nu = H^\nu(K(x_1, ..., x_{n-1}))$ für alle $\nu < n-1$ impliziert. Dazu verwendet man III, §6

$$0 \to Kokern(M^\nu \circlearrowleft x_n) \to H^\nu(K^\cdot) \to Kern(M^\nu \circlearrowleft x_n) \to 0.$$

Es folgt, daß Multiplikation mit x_n auf M^ν für alle $\nu \leq n-2$ ein Isomorphismus ist. Somit gilt wegen $x_n \in m$ also $M^\nu = mM^\nu$ für alle $\nu \leq n-2$. Wegen Nakayama (für R) folgt das Verschwinden $M^0 = ... = M^{n-2} = 0$. Mit Induktion folgt obdA die Regularität der Sequenz $x_1, ..., x_{n-1}$. Aus $H^{n-1}(K^\cdot) = 0$ folgt dann aber $Kern(M^\nu \quad x_n) = 0$, d.h. $x_1, ..., x_n$ ist regulär, denn $M^{n-1} = R/(x_1, ..., x_{n-1})$. Schließlich folgt aus $H^n(K^\cdot) = k$ die Aussage $m = (x_1, ..., x_n)$. Somit ist der Ring R regulär.

Wegen $K(x_1, .., x_n) \cong K(x_{\sigma(1)}, .., x_{\sigma(n)})$ folgt daher

2.Folgerung: Ist $x_1, ..., x_n$ reguläre Sequenz wie in Folgerung 1, dann auch jede Permutation $x_{\sigma(1)}, .., x_{\sigma(n)}$.

Korollar: Ist R regulär, dann ist die Dimension $n = dim_k(m/m^2)$ eine Ringinvariante $m/m^2 \ \cong \ kx_1 \oplus ... \oplus kx_n$.

Beweis: Nach Annahme erzeugen die x_i den Modul m bzw. m/m^2. Gäbe es eine nichttriviale Abhängigkeit, dann obdA (durch Permutation!) von der Form

$$x_n = \lambda_1 x_1 + ... + \lambda_{n-1} x_{n-1} \ mod \ m^2 \ .$$

Es folgt

$$x_n = 0 \ mod \ \overline{m}^2$$

für das maximale Ideal $\overline{m} = x_n \overline{R}$ von $\overline{R} = R/(x_1, .., x_{n-1})$. Nakayama impliziert $\overline{m} = 0$. Dies ist ein Widerspruch zur Regularität (x_n-Multiplikation injektiv auf $\overline{R}$!), da $\overline{R} \neq 0$. Letzteres, da k Quotient von $\overline{R}$ ist.

3.("Taylorentwicklung"): Analog zeigt man

$$m^i/m^{i+1} \cong Symm^i(m/m^2) \qquad \text{(hom.Polyome vom Grad i)} \ .$$

Hinweis: $x_1, .., x_n$ regulär impliziert $a_1 x_1, a_2 x_1 + x_2, .., a_n x_1 + x_n$ regulär, falls $a_1 \in R^*$ und $a_2, .., a_n \in R$. Offensichtlich wird m^i/m^{i+1} von den Monomen in $x_1, ..., x_n$ vom Grad i mit "Koeffizienten" in $k = R/m$ erzeugt. Zu zeigen ist die k-lineare Unabhängigkeit dieser Monome $mod \ m^{i+1}$. Mit anderen Worten: wäre P ein homogenes Polynom mit Koeffizienten in R vom Grad i mit $P(x_1, ..., x_n) \in m^{i+1}$, dann sind alle Koeffizienten in m.
Beweis: Angenommen es gäbe $a_1, ..., a_n \in R$ (nicht alle $\bar{a}_i \equiv 0 \ mod \ m$) mit $P(a_1, ..., a_n) \not\equiv 0 \ mod \ m$, dann reduziert man durch Permutation und obige Modifikation obdA auf den Fall $P = x_n^i +$ andere Monome und schließt wie im Fall $i = 1$.

Ein Tupel $\bar{a}_1, ..., \bar{a}_n \in k^n$ existiert nicht immer. Ein solches Tupel existiert aber immer in einer endlichen Körpererweiterung $k[X]/f(X)$ von k. ObdA ist dabei $f(X)$ Normiertes. Wähle normierten Lift $f \in R[X]$ und ersetze R durch $\tilde{R} = R[X]/f(X)$. Dann ist $x_1, ..., x_n$ wieder eine reguläre Sequenz des Ringes $\tilde{R}$, welche ein maximales Ideal von $\tilde{R}$ erzeugt und man schließt wie gehabt.

<u>Krull-Lemma:</u> $I = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} m^i = 0$

<u>Beweis:</u> Nakayama! $(mI = I,\ I$ ist endlich erzeugt)

Es folgt aus dem Krull-Lemma, daß der natürliche Ringhomomorphismus

$$R \hookrightarrow \check{R} = \lim_{\substack{\leftarrow \\ i}} \left(R/m^i\right)$$

eine Inklusion ist. Es folgt nun leicht, daß ein regulärer lokaler Ring R nullteilerfrei sein muß!

<u>4.Folgerung:</u> Sei R ein regulärer lokaler Ring der Dimension $\leq n$. Für jeden R-Modul M gilt dann

$$Tor_i(M,k) = 0 \qquad\qquad (i \geq n+1)\ .$$

Beweis: k besitzt einen freie (= projektive) Auflösung der Länge $\leq n$ (den Koszulkomplex)!

<u>Definition:</u> Ein noethersches Schema X heißt regulär (von der Dimension $\leq n$), falls alle lokalen Ringe $O_{X,x},\ x \in X$ reguläre lokale Ringe (der Dimenssion $\leq n$) sind. Ein Ring heißt regulär, falls $Spec(R)$ regulär ist.

<u>Bemerkung:</u> Man kann zeigen, R regulär impliziert $R[X]$ regulär. Insbesondere impliziert also Y regulär dasselbe für $\mathbb{P}_Y(E)$.

§6 Der Syzygiensatz

Satz: Sei X ein reguläres (noethersches) Schema der Dimension $\leq n$ und L ein amples Linienbündel auf X. Dann besitzt jede kohärente Garbe G eine lokalfreie Auflösung endlicher Länge

$$0 \to F_n \to F_{n-1} \to ... \to F_0 \to G \to 0 \ .$$

Bemerkung: Es folgt $[G] = [F_0] - [F_1] \pm ... + (-1)^n [F_n]$ in $K.(X)$.

Beweis des Syzygiensatzes: Wähle lokalfreie Auflösung bis zur Stelle F_{n-1} (via Summen von Potenzen der amplen Garbe L). Betrachte Kern und Bild von d_{n-1}

$$0 \to K_n \to F_{n-1} \to K_{n-1} \to 0 \qquad (etc...) \ .$$

Daraus erhält man (durch Lokalisieren für jeden abgeschlossenen Punkt $x \in X$) aus den langen Tor-Sequenzen

$$Tor_1((K_n)_x, k(x)) \ \cong \ Tor_2((K_{n-1})_x, k(x)) \ \cong \ ... \ \cong Tor_{n+1}(G_x, k(x)) \ ,$$

da alle $(F_i)_x$ freie $O_{X,x}$-Moduln sind! Da X regulär ist gilt (§5, Folgerung 4)

$$Tor_{n+1}(G_x, k(x)) = 0 \ .$$

Somit ist K_n lokalfrei auf X nach §1. Die Behauptung folgt indem man $F_n = K_n$ setzt.

Korollar: Sei die Situation wie im Syzygiensatz. Dann gilt

$$\mathcal{T}or_i^{O_X}(M, N) = 0 \qquad\qquad (i \geq n+1)$$

für alle kohärenten Garben M, N auf X.

Beweis: Dies folgt aus der Existenz von endlichen azyklischen Auflösungen. Beachte: $\mathcal{T}or_i^{O_X}(M, N)$ ist definiert durch Verkleben von den affinen Tor's. Man muß dazu die charakteristische Quasikohärenz Eigenschaft für die Tor's nachweisen (Übungsaufgabe!).

VI VEKTORBÜNDEL AUF DEM $\mathbb{P}^n$

§1 Elementarsymmetrische Funktionen

Wir zeigen, daß $\pi: \mathbb{P}_Y(\mathcal{E}) \to Y$ abgeschlossene Punkte x in abgeschlossene Punkte $\pi(x)$ abbildet. Die Aussage ist lokal in Y, also o.B.d.A. $Y = Spec(R)$ und $\mathcal{E}$ ist trivial.

$$\begin{tikzcd} p: \mathbb{P}^1_R \times_{Spec(R)} ... \times \mathbb{P}^1_R \arrow[rr] \arrow[dr] & & \mathbb{P}^n_R \arrow[dl] \\ & Spec(R) & \end{tikzcd}$$

Man hat eine natürliche Abbildung p. Auf dem Niveau der graduierten Ringe ist p definiert durch

$$R[X_0, X_1, .., X_n] \to R[u_o, v_0] \otimes_R \cdots \otimes_R R[u_n, v_n] \ ,$$

mit $X_i \mapsto \sigma_i(u_0, v_0, .., u_n, v_n)$, wobei

$$\prod_{i=0}^n (u_i - tv_i) = \sum_{i=0}^n \sigma_i(u,v)t^i = \sum_{i=0}^n X_i t^i \ .$$

Bemerkung: Auf $\mathbb{P}^1_R \times_{Spec(R)} \cdots \times \mathbb{P}^1_R$ operiert die Permutationsgruppe S_n in natürlicher Weise mit "Quotient" (s. Mumford GIT)

$$(\mathbb{P}^1_R \times_{Spec(R)} \cdots \times_{Spec(R)} \mathbb{P}^1_R)/S_n \cong \mathbb{P}^n_R$$

Dies folgt aus dem Satz über elementarsymmetrische Funktionen.

Bemerkung: Durch mühsame Inspektion in lokalen Karten zeigt man, daß p auf Urbildern affiner Karten durch ganze Ringerweiterungen beschrieben wird. Wegen "going up" (Algebra II) ist somit p surjektiv und jeder abgeschlossene Punkt von $\mathbb{P}^n_R$ besitzt einen abgeschlossenen Urbildpunkt.

Dies reduziert durch schrittweise Projektion $(\mathbb{P}^1_R)^n \to (\mathbb{P}^1_R)^{n-1} \to \cdots$ auf den Fall

$$\pi : \mathbb{P}^1_R \to SpecR$$

Aber $\mathbb{P}^1_R = \mathbb{A}^1_R \cup \mathbb{A}^1_R \ = \ (\mathbb{P}^1_R \setminus (\infty)_R) \ \cup \ (\mathbb{P}^1_R \setminus (0)_\infty)$ mit den beiden Standardkarten $x_0 \neq 0$ und $x_1 (= x_\infty) \neq 0$ von $\mathbb{P}^1_R = ProjR[x_0, x_1]$. ObdA gilt $x \notin (\infty)_R = ProjR[x_0] = SpecR$ und $x \notin (0)_R = ProjR[x_1] = SpecR$. Anderenfalls ist die Aussage trivial. (Restriktion von π auf $(0)_R$ bzw. $(\infty)_R$ ist die Identität). Daher obdA

$$(*) \qquad\qquad x \in \mathbb{A}^1_R \cap \mathbb{A}^1_R = U$$

(d.h. x liegt weder im Nullschnitt noch im ∞ fernen Schnitt). Zu zeigen ist: $\pi(x)$ ist abgeschlossen in $SpecR$.

<u>Umformulierung in die Ringsprache:</u>

Betrachte

$$\mathbb{A}^1_R \hookleftarrow U \hookrightarrow \mathbb{A}^1_R$$

$$SpecR[Y] \hookleftarrow SpecR[Z, Z^{-1}] \hookrightarrow SpecR[X]$$

mit $X = x_0/x_1$ bzw. $Y = x_1/x_0$ und $X \mapsto Z$ respektive $Y \mapsto Z^{-1}$ als Kartenwechsel. In Termen von Ringen lautet das Problem wie folgt: Gegeben sei

$$R[Y] \hookrightarrow R[Z, Z^{-1}] \hookleftarrow R[X]$$

$$Y \mapsto \; Z^{-1} \; ; \; Z \; \hookleftarrow\!\!\!\dashv X$$

und ein <u>maximales</u> Ideal p_x von $R[Z, Z^{-1}]$, dessen Urbilder $p_x \cap R[X]$ in $R[X]$ bzw. $p_x \cap R[Y]$ in $R[Y]$ <u>maximal</u> bleiben. Dies ist Bedingung $(*)$. <u>Zeige:</u> $p_{\pi(x)} = p_x \cap R$ ist dann ein maximales Ideal von R.

Ersetzt man R durch $R/p_x \cap R$ kann man obdA $p_x \cap R = 0$ annehmen. Durch anschließendes Lokalisieren ist obdA R ein integrer, lokaler Ring mit maximalem Ideal m.

$$\begin{array}{ccccc} k(x) & \twoheadleftarrow & R[Y] & \longleftarrow & p_x \cap R[Y] \text{ max} \\ & \nwarrow \text{inj.} & \uparrow \text{inj.} & & \vdots \\ & & R & \cdots & p_x \cap R = 0 \text{ R lokal integer!} \end{array}$$

Zu zeigen ist $m = 0$, d.h. R Körper. Wir führen einen Widerspruchsbeweis.

<u>Annahme:</u> $m \neq 0$.

Es folgt dann $mR[Y] \not\subseteq p_x \cap R[Y]$ wegen $p_x \cap R = 0$. Somit

$$R[Y] = mR[Y] + p_x \cap R[Y] \; ,$$

da p_x maximales Ideal ist. Das heißt

$$1 = \sum_{i=0}^{l} m_i Y^i + Q(Y)$$

mit $m_i \in m$, $Q(Y) \in p_x \cap R[Y]$. Der nullte Koeffizient a_0 von $Q(Y) = a_0 + a_1 Y + ...$ ist somit in $1 - m$, also eine Einheit von R.

<u>Kartenwechseltrick:</u> Beachte $Y = Z^{-1}$ und $X = Z$. Das Element

$$Q(Z^{-1}) \cdot Z^{deg(Q)} = a_0 X^{deg(Q)} + ... + a_{deg(Q)}$$

aus $p_x \subset R[Z, Z^{-1}]$ liegt sogar in $p_x \cap R[X]$ und erfüllt $a_0 \in R^*$. Es folgt, daß

$$k(x) = R[X]/p_x \cap R[X] \twoheadleftarrow R[X]/(X^{deg(Q)} + ... + \frac{a_{deg(Q)}}{a_0}) \cong R^{deg(Q)}$$

als Quotient des endlich erzeugten R-Moduls $R^{deg(Q)}$ <u>endlich erzeugt</u> ist. Andererseits gilt

$$m \cdot k(x) = 0$$

und wegen Nakayama daher

$$k(x) = 0 \quad \text{(Widerspruch zur Annahme!)}$$

Es folgt $m = 0$, d.h. $\pi(x)$ ist abgeschlossen in Y.

<u>Bemerkung:</u> Ohne das Kartenwechselargument und der endlichen Erzeugtheit von $k(x)$ als R-Modul ist kein Widerspruch möglich. Betrachte dazu das Gegenbeispiel $k(x) = \mathbb{Q}$, $R = \mathbb{Z}_{(p)}$ (Lokalisierung nach p) mit $k(x) = R[Y]$ und $Y \mapsto p^{-1} \in \mathbb{Q}$.

<u>Bemerkung:</u> Für eine Darstellung unseres "ad hoc" Argumentes in allgemeinerem Rahmen, sollte man das Kapitel über "proper maps" im Buch von Hartshorne konsultieren!

$\S 2$ Filtrationen auf Vektorbündeln des $\mathbb{P}_Y(E)$

Sei $G \neq 0$ lokalfrei auf $\mathbb{P}_Y(E)$. Serre Dualität und die Endlichkeitssätze implizieren

$$\pi_*(G(j)) \cong Hom_{O_Y}(R^n\pi_*(G^*(-j-n-1), O_Y) = 0 \qquad (j << 0) \ .$$

Aus $\Gamma_*(G) \neq 0$ (III, $\S 4$) folgt aber $\pi_*(G(j)) \neq 0$ für mindestens ein j aus $\mathbb{Z}$.

G heißt normiert, falls gilt

$$\pi_*(G) \neq 0 \ , \ \pi_*(G(-1)) = \pi_*(G(-2)) = ... = 0 \ .$$

Jedes lokalfreie $G \neq 0$ kann durch einen geeigneten Twist $G = G_{norm}(k_G)$ normiert werden!

Beachte, daß $\pi_*(G) = 0$ immer $\pi_*(G(-1)) = \pi_*(G(-2)) = ... = 0$ nach sich zieht. Denn π_* ist linksexakt und es gilt $\pi_*(G(-j)) \hookrightarrow \pi_*(G)$ wegen $O_{\mathbb{P}_Y(E)}(-j) \hookrightarrow O_{\mathbb{P}_Y(E)}$ für $j \geq 0$.

Ziel des Abschnittes ist der

Satz: ($Rang(E) = n+1$)

Für lokalfreie normierte Garben G auf $\mathbb{P}_Y(E) \xrightarrow{\pi} Y$ sind äquivalent:

(i) Die Garben $R^n\pi_*(G(j-n))$ sind für alle j lokalfrei und es gilt

$$R^1\pi_*(G(j-2)) = ... = R^{n-1}\pi_*(G(j-n)) = 0$$

für alle $j \geq 0$ (falls $n \geq 2$).

(ii) G besitzt eine (eindeutige) endliche aufsteigende Filtration

$$0 = G_{-1} \subset G_0 \subset ... \subset G_m \subset ... \subset G$$

($G_m = G$ für $m >> 0$) mit

$$G_m/G_{m+1} \ \cong \ \pi^*(F_m)(-m)$$

für lokalfreie Garben F_m auf Y (mit $F_0 = \pi_*(G)$).

1.Bemerkung: Ist $Y = Spec(R)$ affin, so folgt aus V,$\S 3$ daß die Bedingung (ii) des Satzes äquivalent ist zu

$$G = \bigoplus_{m=m_0}^{m=m_1} \pi^*(F_m)(-m) \ .$$

2.Bemerkung: Im allgemeinen besitzen lokalfreie normierte Garben keine Filtration (ii). Zum Beispiel ist der Kern G

$$0 \to G \to O^{n+1}_{\mathbb{P}^n_R} \to O_{\mathbb{P}^n_R}(1) \to 0$$

$$(s_0, .., s_n) \mapsto \sum_{i=0}^{n} f_i s_i \ .$$

normiert und lokalfrei, erfüllt aber nicht (i).

Beweis des Satzes (ii) impliziert (i): Aus

$$0 \to G_{m-1} \to G_m \to \pi^*(F_m)(-m) \to 0$$

folgt die lange exakte Sequenz

$$... \xrightarrow{\delta} R^\nu \pi_*(G_{m-1}(j)) \to R^\nu \pi_*(G_m(j)) \to R^\nu \pi_*(\pi^*(F_m)(-m+j)) \to ...$$

Die Projektionsformel gibt

$$R^\mu \pi_*(\pi^* F_m(-m+j)) \ \cong \ F_m \otimes_{O_Y} R^\mu \pi_*(O(-m+j)) = 0$$

falls $\mu \neq 0, n$. Aufsteigende Induktion beginnend mit $G_{-1} = 0$ liefert daher

$$R^\nu \pi_*(G_m(j)) = 0$$

für alle m, j und alle $\nu \neq 0, n$. Somit

$$0 \to R^n \pi_*(G_{m-1}(j)) \to R^n \pi_*(G_m(j)) \to F_m \otimes_{O_Y} R^n \pi_*(O(-m+j)) \to 0 \ .$$

Aufsteigende Induktion zeigt $R^n(G_m(j))$ lokalfrei für alle j. Die Behauptung (i) folgt wegen $G_m = G$ für $m >> 0$ und - nebenbei bemerkt - für alle $j \in \mathbb{Z}$.

Beweisstrategie von (i) impliziert (ii):

Wir reduzieren den Beweis auf zwei Behauptungen (Beh 1) und (Beh 2). Wir zeigen nämlich, daß die Adjunktionsabbildung

$$ad : \pi^*(\pi_*(G)) \to G$$

injektiv ist (Beh 1) mit lokalfreiem Kokern Q (Beh 2)

$$0 \to \pi^*(\pi_*(G)) \xrightarrow{ad} G \xrightarrow{\psi} Q \to 0 \ .$$

Wir nehmen an, dies sei gezeigt. Es genügt dies im übrigen lokal auf Y zu zeigen, d.h. obdA im Fall $Y = Spec(R)$ affin, $E = O_Y^{n+1}$.

Die lange exakte Kohomolgiesequenz sowie die Projektionsformel zeigt $\pi_*(Q) = 0$ wegen $R^1\pi_*(\pi^*(F_0)) = F_0 \otimes_{O_Y} R^1\pi_*O = 0$ und wegen $\pi_*(ad) : \pi_*\pi^*\pi_*(G) \cong \pi_*(G)$

$$0 \to \pi_*(G) \ \cong \ \pi_*(G) \to \pi_*(Q) \to F_0 \otimes_{O_Y} R^1\pi_*O = 0 \ ,$$

also $\pi_*(Q) = \pi_*(Q(-1)) = ... = 0$ und somit $Q = Q_{norm}(k_Q)$ mit $k_Q > 0$.

Annahme (i) und Basiswechsel impliziert $F_0 := \pi_*(G)$ lokalfrei! Aus Annahme (i) für G folgt

$$... \to R^1\pi_*(G(k_Q + j)) \to R^1\pi_*(Q_{norm}(j)) \to F_0 \otimes_{O_Y} R^2\pi_*O(k_Q + j) \to ...$$

sowie

$$... \to F_0 \otimes_{O_Y} R^n\pi_*(O(k_Q + j)) \to R^n\pi_*(G(k_Q + j)) \ \cong \ R^n\pi_*(Q_{norm}(j)) \to 0 \ .$$

Somit erfüllt die normierte Garbe Q_{norm} alle Annahmen von (i). Man schließt daher rekursiv durch Induktion nach dem Rang von G auf die Gültigkeit von (ii). Beachte $Rang(Q_{norm}) < Rang(G)$. Ist $Q_.$ die entsprechende Filtration von Q_{norm}, dann ist $G_{i+k_Q} = \psi^{-1}(Q_i)$ und $G_0 = G_1 = ... = G_{k_Q-1} = \pi_*(G)$ die gesuchte Filtration von G.

§3 Beweis der Behauptungen

Es bleibt der Nachweis von (Beh 1) und (Beh 2). Wir behandeln zuerst den Fall $n = 1$ und $\mathbb{P}_Y(E) = \mathbb{P}^1_R$.

Ist $\phi : L \to L'$ ein O_X-linearer Garbenhomomorphismus zwischen lokalfreien Garben L und L', dann ist ϕ injektiv mit lokalfreiem Kokern, falls für alle abgeschlossenen Punkte x

$$L_x \otimes k(x) \overset{\phi_x \otimes k(x)}{\longrightarrow} L'_x \otimes k(x)$$

punktuell injektiv ist (siehe V, §1).

Wir wenden dies an für $L = \pi^*\pi_*G$, $L' = G$ und $\phi = ad$. In diesem Fall implizieren die punktuellen Injektionen die Behauptungen (Beh 1) und (Beh 2).

Wir geben eine konkrete Deutung von $\phi_x \otimes k(x)$ in diesem Fall. Offensichtlich ist

$$\pi^*(\pi_*G)_x \otimes_{O_{\mathbb{P}^1_k}} k(x) \;\cong\; \pi^*(H^0(\mathbb{P}^1_R, G))_x \otimes k(x)$$

$$= H^0(\mathbb{P}^1_R, G) \otimes_R O_{\mathbb{P}^1_R,x} \otimes_{O_{\mathbb{P}^1_R,x}} k(x) = H^0(\mathbb{P}^1_R, G) \otimes_R k(x) \ .$$

Die Abbildung $ad_x \otimes k(x)$ ist dabei gegeben durch "Einsetzen des Punktes x"

$$H^0(\mathbb{P}^1_R, G) \otimes_R k(x) \to G_x \otimes k(x)$$

$$s \otimes_R 1 \mapsto s_x \otimes_{O_{\mathbb{P}^1_R,x}} 1$$

in die Schnitte $s \in H^0(\mathbb{P}^1_R, G)$.

Es ist die Injektivität aller $ad_x \otimes k(x)$ für alle abgeschlossenen Punkte x zu zeigen. Setze $y = \pi(x)$ und $k = k(y)$. Wegen Basiswechsel und §4 (verwende Annahme (i)) reduziert man sofort auf den absoluten Fall $R = k$.

Sei also von nun an $R = k$. Die abgeschlossenen Punkte x von $\mathbb{P}^1_k$ sind uns aber bekannt

$$\{x \in \mathbb{P}^1_k \mid x \text{ abgeschlossen}\} = \infty \cup \{\text{irr. Polynome } f_x \text{ in } k[X] \text{ vom Grad } l_x \geq 1\} \ .$$

Die zum abgeschlossenen Punkt x gehörige Idealgarbe $J_x \cong O_{\mathbb{P}^1_k}(-l_x)$ gibt die Sequenz

$$0 \to O_{\mathbb{P}^1_k}(-l_x) \overset{f_x}{\to} O_{\mathbb{P}^1_k} \to i_*k(x) \to 0$$

bzw.

$$0 \to G(-l_x) \to G \to (i_x)_*(i_x)^*(G) \to 0 \ .$$

Bildet man globale Schnitte, erhält man

$$0 \to H^0(\mathbb{P}^1_k, G(-l_x)) \to H^0(\mathbb{P}^1_k, G) \overset{ev_x}{\to} G_x \otimes_{O_{\mathbb{P}^1,x}} k(x)$$

$$s \mapsto s_x \otimes_{O_{\mathbb{P}^1,x}} 1$$

Wäre $ad \otimes k(x)$ nicht injektiv, gäbe es einen nichttrivialen Schnitt $s \in H^0(\mathbb{P}^1_k, G(-l_x))$ mit $l_x \geq 1$ im Kern von ev_x. Dies ist wegen der Normierung von G aber ausgeschlossen. Der Beweis von (Beh 1) und (Beh 2) im Fall $n = 1$ ist damit erbracht.

Nun zum allgemeinen Fall $n > 1$:

ObdA können wir wieder annehmen $Y = Spec(R)$ affin, $E = O_Y^{n+1}$. Mit Basiswechsel (!!) reduzieren wir von R auf k auf $\overline{k}$ (alg.abg.Körper). Dann schließen wir wie im Fall $n = 1$. Um zu zeigen, daß ev_x injektiv ist, benutzt man einen exakten Komplex

$$0 \to G(-n) \to G^n(-n+1) \to ... \to G^n(-1) \to G \overset{ev_x}{\to} G_x \otimes_{O_{\mathbb{P}^n_{\overline{k}}}} \overline{k}(x) \to 0 \ .$$

Benutze dazu den Koszulkomplex, G lokalfrei und den Hilbertschen Nullstellensatz, welcher die abgeschlossenen Punkte von $\mathbb{P}^n_{\overline{k}}$ beschreibt. Aufsplittern gibt

$$0 \to K_0 \to G \overset{ev_x}{\to} G_x \otimes_{O_{\mathbb{P}^n_{\overline{k}}}} \overline{k}(x)$$

$$0 \to K_1 \to G^n(-1) \to K_0 \to 0$$

$$...$$

$$G(-n) \ \cong \ K_{n-1} \ ,$$

d.h. $Kern(ev_x) \cong H^0(\mathbb{P}^n_{\overline{k}}, K_0) \cong H^1(\mathbb{P}^n_{\overline{k}}, K_1) \cong H^2(\mathbb{P}^n_{\overline{k}}, K_2) \cong ... \cong H^{n-1}(\mathbb{P}^n_{\overline{k}}, K_{n-1}) \cong H^{n-1}(\mathbb{P}^n_{\overline{k}}, G(-n)) = 0$ wegen der Annahmen von (i)! Damit kann man wie im Fall $n = 1$ den Beweis zu Ende führen.

§4 Reguläre Garben

Eine kohärente Garbe G auf $\mathbb{P}_Y(E) \to Y$ heißt regulär, falls gilt

$$R^i\pi_*(G(-i)) = 0 \qquad \text{für alle } i > 0 \ .$$

1.Lemma: Für reguläre G ist die natürliche Abbildung

$$E \otimes_{O_Y} \pi_*(G) \to \pi_*(G(1))$$

surjektiv.

Beweis: Betrachte den mit G tensorierten Komplex aus IV, §5

$$0 \to \pi^*(\bigwedge^{n+1} E) \otimes_{O_{\mathbb{P}_{Y(E)}}} G(-n-1) \to ... \to \pi^*(E) \otimes_{O_{\mathbb{P}_{Y(E)}}} G(-1) \to G \to 0 \ .$$

Aufsplittern liefert nach Twisten mit $O(1)$

$$0 \to K_1 \to \pi^*(E) \otimes_{O_{\mathbb{P}_{Y(E)}}} G \to G(1) \to 0$$

$$0 \to K_2 \to \pi^*(\bigwedge^2 E) \otimes_{O_{\mathbb{P}_{Y(E)}}} G(-1) \to K_1 \to 0$$

$$...$$

$$\pi^*(\bigwedge^{n+1} E) \otimes_{O_{\mathbb{P}_{Y(E)}}} G(-n) \ \cong \ K_n \ .$$

Zu zeigen ist $R^1\pi_*(K_1) = 0$. Regularität impliziert $R^i\pi_*(\pi^*(?) \otimes G(-i)) = 0$ für $i > 0$. Also

$$R^1\pi_*(K_1) \hookrightarrow R^2\pi_*(K_2) \hookrightarrow ..... \hookrightarrow R^n\pi_*(K_n) = 0 \ .$$

2.Lemma: G regulär impliziert $G(1)$ regulär.

Beweis: Wie in Lemma 1 folgt aus G regulär

$$R^1\pi_*(G) \hookrightarrow R^2\pi_*(K_1(-1)) \hookrightarrow ..... \hookrightarrow R^n\pi_*(K_{n-1}(-1)) \hookrightarrow R^{n+1}\pi_*(K_n(-1)) = 0$$

sowie

$$R^2\pi_*(G(-1)) \hookrightarrow R^3\pi_*(K_1(-2)) \hookrightarrow ..... \hookrightarrow R^n\pi_*(K_{n-2}(-2)) \hookrightarrow R^{n+1}\pi_*(K_{n-1}(-2)) = 0 \ ,$$

und so weiter ...

1.Korollar: Ist G regulär, dann ist die Adjunktionsabbildung

$$\pi^*(\pi_*(G)) \to G \to 0$$

surjektiv. Zusatz: Ist G lokalfrei, dann auch $\pi_*(G)$.

Beweis: Der Zusatz folgt mittels Basiswechsel V, §4.

Iteration (via Lemma 2) des obigen Lemmas 1 liefert

$$
\begin{tikzcd}
E \otimes_{O_Y} E \; ... \; \otimes_{O_Y} \pi_*(G) \arrow[rr] \arrow[dr] & & Symm^j(E) \otimes_{O_Y} \pi_*(G) \arrow[r] \arrow[dl, dotted, "\exists!"] & 0 \\
& \pi_*(G(j)) & &
\end{tikzcd}
$$

für alle $j \geq 0$. Somit wegen $\Gamma_*(O_{\mathbb{P}_Y(E)}) = \bigoplus_j Symm^j(E)$ (siehe III, §4 und IV §6)

$$\Gamma_*(O_{\mathbb{P}_Y(E)}) \otimes_{O_Y} \pi_*(G) \to \Gamma_*(G) \to 0$$

und durch Vergarben $\pi^*(\pi_*(G)) \to G \to 0$.

<u>2.Korollar:</u> G regulär und $\pi_* G = 0$ impliziert $G = 0$.

<u>Satz:</u> $(rang(E) = n + 1)$

Für eine kohärente (lokalfreie) Garbe G auf $\mathbb{P}_Y(E)$ sind äquivalent

i) G ist regulär: $R^i\pi_*(G(-i)) = 0$ für alle $i > 0$.

ii) G besitzt eine Auflösung der Art

$$0 \to \pi^*(F_n)(-n) \to ... \to \pi^*(F_1)(-1) \to \pi^*(F_0) \to G \to 0$$

für kohärente (lokalfreie) Garben F_i auf Y.

<u>Beweis:</u> (i) impliziert (ii). Setze $F_0 = \pi_*(G)$. Man erhält

$$0 \to K_0 \to \pi^*(F_0) \to G \to 0$$

und K_0 ist kohärent (lokalfrei). Weiterhin ist $K_0(1)$ wieder <u>regulär</u> (lange exakte Kohomologiesequenz und $\pi_*(ad) = id$). Iteriert man dies für $F_1 = \pi_*(K_0(1))$ etc., erhält man

$$0 \to K_1 \to \pi^*(F_1) \to K_0(1) \to 0$$

$$0 \to K_2 \to \pi^*(F_2) \to K_1(1) \to 0$$

$$...$$

$$0 \to K_n \to \pi^*(F_n) \to K_{n-1}(1) \to 0 \; .$$

Andererseits gilt $\pi_*(K_i) = 0$ für alle $i = 0, .., n$ wegen $\pi_*\pi^*F_i = \pi_*\pi^*(\pi_*K_{i-1}(1)) \cong \pi_*K_{i-1}(1)$.

<u>K_n ist zusätzlich regulär</u>: Aus $R^i\pi_*(O(j)) = 0$ für $i > 0, j \geq -n$ folgt nämlich daraus

$$R^1\pi_*K_n(-1) = \pi_*K_{n-1} = 0$$

$$R^2\pi_*K_n(-2) = R^1\pi_*K_{n-1}(-1) = \pi_*K_{n-2} = 0$$

$$...$$

$$R^n\pi_*K_n(-n) = R^{n-1}\pi_*K_{n-1}(-n+1) = ... = \pi_*K_0 = 0 \; .$$

Wegen $\pi_*K_n = 0$ und Korollar 1 folgt das Abrechen der Auflösung, d.h. $K_n = 0$.

Umkehrung (ii) nach (i) verbleibt als Übungsaufgabe!

VII CHERNKLASSEN

§1 Die K-Gruppen $K^\bullet(X)$ und $K_\bullet(X)$

Es sei $K^\bullet(X)$ die Grothendieck Gruppe der Kategorie der lokalfreien Garben auf X und $K_\bullet(X)$ die Grothendieckgruppe der Kategorie der kohärenten Garben auf X. Die Relationen zwischen den Erzeugern sind jeweils definiert durch die kurzen exakten Sequenzen in den Kategorien. Es folgt leicht, daß dann jeder exakte Komplex

$$0 \to K_n \to K_{n-1} \to ... \to K_1 \to K_0 \to 0$$

(durch Aufsplitten) eine Relation liefert

$$[K_0] - [K_1] + ... + (-1)^n [K_n] = 0 \ .$$

$K^\bullet(X)$:

$K^\bullet(X)$ ist in natürlicher Weise ein komm. Ring mit $1 = [O_X]$. Multiplikation ist definiert durch $[F] \cdot [G] = [F \otimes_X G]$. Beachte, daß $F \otimes_{O_X} -$ für lokalfreies F ein exakter Funktor ist. Man erhält einen kontravarianten Funktor

$$\underline{\text{Schemen}} \ \to \ \underline{\text{Ringe}}$$

$$X \ \mapsto \ K^\bullet(X)$$

Einem Morphismus $f : X \to Y$ wird zugeordnet der Ringhomomorphismus

$$f^K : K^\bullet(Y) \to K^\bullet(X) \ ,$$

definiert durch $f^K([F]) = [f^*(K)]$.

$K_\bullet(X)$:

Ist $f : X \to Y$ ein Schema über Y, dann ist $K_\bullet(X)$ in offensichtlicher Weise ein $K^\bullet(Y)$-Modul via $[F] \cdot [G] = [f^*(F) \otimes_{O_Y} G]$ für $[F] \in K^\bullet(Y)$ und $[G] \in K_\bullet(X)$. Man erhält einen kovarianten Funktor von der Kategorie der Schemata über Y

$$\underline{\text{Schemen}}_Y \ \to \ K^\bullet(Y) - \underline{\text{Moduln}}$$

$$X \ \mapsto \ K_\bullet(X)$$

mit zulässigen Morphismen. Ein Morphismus f heißt zulässig, falls für alle kohärenten Garben G auf X die höheren direkten Bilder $R^i f_*(G)$ wieder kohärent sind sowie verschwinden für $i > i(G)$. Dann ist

$$f_K([G]) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i [R^i f_*(G)]$$

wohl definiert (fast alle $R^if_*(G)$ verschwinden!).

Beispiel: Jede abgeschlossene Immersion ist zulässig. Die kanonische Projektion $f : Proj_X(\mathcal{S}) \to X$ ist zulässig. Besitzt X ein amples Linienbńdel, dann faktorisiert diese Abbildung $f = \pi \circ i$ in eine abgeschlossene Immersion $i : Proj(\mathcal{S}) \hookrightarrow \mathbb{P}_X(E)$ und die kanonische Projektion $\pi : \mathbb{P}_X(E) \to X$.

Die Komposition zulässiger Morphismen ist zulässig und es gilt die Funktoreigenschaft $(f \circ g)_K = f_K \circ g_K$. Wir beweisen dies nicht, bemerken jedoch daß wir diese Eigenschaft nur im trivialen Fall benötigen, wo g eine abgeschlossene Immersion ist. Siehe VIII, §5 mit $\pi_K \circ f_K = id_K = id$ sowie $\pi_K \circ f_K \circ i'_K = i_K$.

Der Cartanhomomorphismus: Die triviale Zuordnung $[G] \mapsto [G]$ definiert einen Gruppenhomomorphismus

$$\phi : K^\bullet(X) \to K_\bullet(X) \ .$$

Satz: Ist X regulär (von der Dimension $\leq n$) und besitzt X ein amples Linienbündel, dann ist der Cartanhomomorphismus ein Isomorphismus

$$\phi : K^\bullet(X) \ \cong \ K_\bullet(X) \ .$$

Beweis: Wegen des Syzygiensatzes ist die Cartanabbildung ϕ surjektiv. Wir konstruieren eine umgekehrte Abbildung χ mit $\chi \circ \phi = id$. Dies zeigt die Injektivität von ϕ.

Sei G kohärent und $0 \to F_m \to ...F_0 \to G \to 0$ eine lokalfreie endliche Auflösung von G (Syzygiensatz). Wir setzen

$$\chi([G]) = [F_0] - [F_1] + ... \pm [F_m] \ .$$

Es ist zu zeigen, daß dies nicht von der Auflösung abhängt. $\chi \circ \phi = id$ ist dann automatisch erfüllt.

Seien zwei lokalfreie Auflösungen mit Surjektionen

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & F'_m \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & F'_1 \arrow[r] & F'_0 \arrow[r] & G \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & F_m \arrow[r] \arrow[u, two heads] & \cdots \arrow[r] & F_1 \arrow[r] \arrow[u, two heads] & F_0 \arrow[r] \arrow[u, two heads] & G \arrow[r] \arrow[u, equal] & 0
\end{tikzcd}$$

gegeben.

Sprechweise: $F^\cdot \to G$ dominiert $(F^\cdot)' \to G$

Die Einschränkung der d's auf die lokalfreien (!) Kerne $K_i = Kern(F_i \to F'_i)$ definiert einen azyklischen (!) Komplex (lange exakte Kohomologiesequenz). Es folgt $\sum(-1)^i[K_i] = 0$ in $K^\bullet(X)$. Aus $[F_i] = [F'_i] + [K_i]$ folgt daher $\sum(-1)^i[F_i] = \sum(-1)^i[F'_i]$. Wir reduzieren den allgemeinen Fall auf diesen durch Vergleich mit einer gemeinsamen dominierenden Auflösung.

Pullback: Ist ein Diagramm

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\phi_A"] & B \\ A \oplus_B C \arrow[u, "\psi_C"] \arrow[r, "\psi_A"] & C \arrow[u, "\phi_C"'] \end{tikzcd}$$

von O_X-Garbenhomomorphismen gegeben, dann ist der Pullback (Fasernsumme) definiert als der Kern von $p = \phi_A \circ pr_A - \phi_C \circ pr_C$

$$0 \to (A \oplus_B C) \to A \oplus C \xrightarrow{p} B \ .$$

Ist ϕ_A surjektiv, dann auch ψ_A und die definierende Sequenz ist kurzexakt. In diesem Fall ist für A, B, C lokalfrei auch die Fasernsumme $A \oplus_B C$ lokalfrei.

Behauptung: Für zwei lokalfreie endliche Auflösungen $(F')^{\cdot}, (F'')^{\cdot}$ von G existiert eine gemeinsame dominierende. Wir konstruieren diese induktiv: An der nullten Stelle wähle $F_0 \twoheadrightarrow F_0 \oplus_G F_0'$ lokalfrei.

Alle Terme $F_{i-1}, .., F_0$ seien nun bereits konstruiert. Sei $K' = Kern(d'_{i-1})$, $K'' = Kern(d''_{i-1})$ und $K = Kern(d_{i-1})$. Ersetze nun F_{i-1} durch $\tilde{F}_{i-1} = F_{i-1} \oplus K' \oplus K''$ (und damit K durch $\tilde{K} = K \oplus K' \oplus K''$). Dann gilt

$$\begin{tikzcd} \dots \arrow[r] & F_i' \arrow[r, two heads] & K' \arrow[r, hook] & F'_{i-1} \arrow[r] & \cdots \\ & & \tilde{K} \arrow[u, two heads] \arrow[d, two heads] \arrow[r, hook] & \tilde{F}_{i-1} \arrow[u, two heads] \arrow[d, two heads] \arrow[r] & \cdots \\ \dots \arrow[r] & F_i'' \arrow[r, two heads] & K'' \arrow[r, hook] & F''_{i-1} \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

Man bildet nun die Pullbacks $P = F_i'' \oplus_{K''} \tilde{K}$ und $Q = F_i' \oplus_{K'} P$ und wählt F_i lokalfrei mit $F_i \twoheadrightarrow Q$ und erhält

$$\begin{tikzcd} & & F_i' \arrow[r, two heads] & K' \\ F_i \arrow[urr] \arrow[drr] \arrow[r, two heads] & Q \arrow[ur, two heads] \arrow[r, two heads] & P \arrow[ur, two heads] \arrow[d, two heads] \arrow[r, two heads] & \tilde{K} \arrow[u, two heads] \arrow[d, two heads] \\ & & F_i'' \arrow[r, two heads] & K'' \end{tikzcd}$$

Falls $F_i' = F_i'' = 0$ $(i > m)$, Setzt man schließlich $F_{m+1} = Kern(F_m \to F_{m-1})$ und $F_{m+2} = 0$, und erhält die gewünschte dominierende Sequenz. Beachte: $K_i := Kern(F_i \to F_i')$ definiert einen für $i < m$ azyklischen Komplex $K^{\cdot}$ lokalfreier Garben (!). Wegen $F_{m+1} \cong Kern(K_m \to K_{m-1})$ (lange Kohomologiesequenz) ist F_{m+1} lokalfrei. Nach Induktion ist nämlich $Kern(K_m \to K_{m-1})$ lokalfrei (iteratives Anwenden von V, §1, Korollar (1)).

Additivität von χ:

Schließlich muß χ die Relationen der Grothendieckgruppe respektieren. Sei $0 \to G' \to G \to G'' \to 0$ eine kurze exakte Sequenz kohärenter Garben. Wir konstruieren induktiv eine kurze exakte Sequenz von lokalfreien endlichen Auflösungen.

Wähle $F_0'' \twoheadrightarrow G''$ lokalfrei. Wähle $\tilde{F}_0 \twoheadrightarrow G \oplus_{G''} F_0''$ und $\tilde{F}_0' = Kern(\tilde{F}_0 \to F_0'')$. Wähle $F \twoheadrightarrow G'$ lokalfrei und setze $F_0' = F \oplus \tilde{F}_0'$ und $F_0 = F \oplus \tilde{F}_0$.

Seien nun Auflösungen $F_{i-1}' \to ... \to G'$, $F_{i-1} \to ... \to G$ und $F_{i-1}'' \to ... \to G''$ konstruiert. Die lange exakte Kohomologiesequenz zeigt für die Kerne der Abbildungen $d_{i-1}', d_{i-1}, d_{i-1}''$ (= nullte Kohomologie der mit Null verlängerten Komplexe)

$$0 \to K' \to K \to K'' \stackrel{!}{\to} 0$$

Man kann also die Anfangsskonstruktion wörtlich wiederholen. Abschneiden an der Stelle n liefert die gewüschte kurze exakte Sequenz von Auflösungen.

Aus den resultierenden kurzen exakten Sequenzen folgt $[F_i] = [F_i'] + [F_i'']$ und somit

$$\chi([G]) = \chi([G']) + \chi([G'']) \ .$$

Bemerkung: Hat man projektive Generatoren mit einer Eigenschaft E, welche sich auf direkte Summen und Kerne vererbt, dann gibt es projektive Auflösungen mit der Eigenschaft E.

§2 Bestimmung von $K(\mathbb{P}_Y(E))$

Betrachte $\pi : \mathbb{P}_Y(E) \to Y$. Aus der Projektionsformel folgt $\pi_K(\pi^K(x)) = x\pi_K(1) = x$. Benutze $\pi_K(1) = \pi_K([O_{\mathbb{P}_Y(E)}]) = \sum(-1)^i[R^i\pi_* O_{\mathbb{P}_Y(E)}] = [O_Y] = 1$. Insbesondere gilt

$$\pi^K : K^\bullet(Y) \hookrightarrow K^\bullet(\mathbb{P}_Y(E)) \ .$$

Ist G lokalfrei auf $\mathbb{P}_Y(E)$, dann ist nach den Endlichkeitssätzen ein geeigneter Twist $G(i)$ regulär. Aus VI, §4 folgt daher, daß $K^\bullet(\mathbb{P}_Y(E))$ von $K^\bullet(Y)$ und den Elementen $X = [O_{\mathbb{P}_Y(E)}(1)]$ sowie $X^{-1} = [O_{\mathbb{P}_Y(E)}(-1)]$ als Ring erzeugt wird. Nach IV, §5 hat man eine Relation

$$X^{n+1} - \lambda_1(E)X^n + ... + (-1)^{n+1}\lambda_{n+1}(E) = 0$$

oder durch Anwenden des Automorphismus $[F] \mapsto [F^*]$ von $K^\bullet(X)$

$$(X^{-1})^{n+1} - \lambda_1(E^*)(X^{-1})^n + ... + (-1)^{n+1}\lambda_{n+1}(E^*) = 0 \ .$$

Die Elemente X^i für $i = 0, ..., n$ erzeugen somit den $K^\bullet(Y)$-Modul $K^\bullet(\mathbb{P}_Y(E))$. Es handelt sich sogar um eine Modulbasis, denn jede nichttriviale Relation hätte (nach Multiplikation mit einem geeigneten $X^{-\nu}$) die Gestalt

$$c_i X^{-i} + ... + c_1 X^{-1} + c_0 = 0 \qquad , \qquad c_0 \neq 0$$

mit $0 \leq i \leq n$ und $c_\nu \in K^\bullet(Y)$. Wegen III, §6 gilt

$$\pi_K(X^{-1}) = ... = \pi_K(X^{-n}) = 0 \ .$$

Daraus folgt der Widerspruch $\pi_K(c_0) = c_0\pi_K(1) = c_0 = 0$. Wir fassen zusammen

Satz: $(Rang(E) = n + 1)$ Es gilt

$$K^\bullet(\mathbb{P}_Y(E)) = K^\bullet(Y)[X]/\big(X^{n+1} - \lambda_1(E)X^n + ... + (-1)^{n+1}\lambda_{n+1}(E)\big)$$

bzw.

$$K^\bullet(\mathbb{P}_Y(E)) = K^\bullet(Y)[X^*]/\big((X^*)^{n+1} - \lambda_1(E^*)(X^*)^n + ... + (-1)^{n+1}\lambda_{n+1}(E^*)\big) \ .$$

Die Abbildung π_K ist gegeben durch

$$K^\bullet(\mathbb{P}_Y(E)) = \bigoplus_{i=0}^{n} K^\bullet(Y)(X^*)^i \xrightarrow{pr_0} K^\bullet(Y) \ .$$

§3 Symmetrische und äußere Potenzen

Sei X ein (noethersches) Schema und $K^\bullet(X)$ die Grothendieckgruppe der lokalfreien Garben auf X.

Ist G lokalfrei auf X, dann auch die i-te äußere Potenz $\bigwedge^i G$. Ist n der Rang von G, dann ist $\binom{n}{i}$ der Rang von $\bigwedge^i G$.

Jede kurze exakte Sequenz lokalfreier Garben

$$0 \to G_1 \to G \to G_2 \to 0$$

definiert eine Filtration $\nu = 0,..,i$

$$0 \subset \ldots \subset F_{\nu-1}(G) \subset F_\nu(G) \subset \ldots \subset \bigwedge^i G \ .$$

Lokal auf trivialisierenden Karten wird $F_\nu(G)(U)$ definiert als O_U-Untermodul erzeugt von allen $\bigwedge_{i\in I} e_i$, $\#I = i$ für die mindestens $i-\nu$ der Schnitte $e_i \in G(U)$ in $G_1(U)$ liegen. Man zeigt leicht

$$F_\nu(G)/F_{\nu-1}(G) \cong \bigwedge^\nu G_2 \ \otimes_{O_X} \ \bigwedge^{i-\nu} G_1$$

Für die Klasse von $\bigwedge^i G$ folgt wegen $[\bigwedge^i G] = \sum_{\nu=0}^i [F_\nu/F_{\nu-1}]$

$$[\bigwedge^i G] = \sum_{\nu=0}^i \ [\bigwedge^\nu(G_2)] \cdot [\bigwedge^{i-\nu}(G_1)] \ .$$

Umformuliert für die Potenzreihe

$$\lambda_t(G) = \sum_{i=0}^n \ [\bigwedge^i G] t^i$$

mit Koeffizienten in $K^\bullet(Y)$ bedeutet dies

$$\lambda_t(G) = \lambda_t(G_2)\lambda_t(G_1) \ .$$

λ_t induziert daher einen wohldefinierten Homomorphismus von der additiven Gruppe von $K^\bullet(X)$ in die multiplikative Gruppe $1 + tK^\bullet(Y)[[t]]$ des Potenzreihenringes.

Folgerung: Es existieren Abbildungen

$$\lambda^i : K^\bullet(X) \to K^\bullet(X) \qquad (i \geq 0)$$

mit folgenden Eigenschaften:

1) Setzt man $\lambda_t(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i(x) t^i$, dann gilt

$$\lambda_t(x+y) = \lambda_t(x)\lambda_t(y)$$

für alle $x, y \in K^\bullet(X)$

2) Ist $x = [G]$ die Klasse einer lokalfreien Garbe G, dann ist $\lambda_t(x)$ ein Polynom mit Koeffizienten

$$\lambda^i(x) = [\bigwedge^i(G)] \ .$$

3) $\lambda_0 = 1$ und $\lambda_1 = id$.

4) Es gilt $f^K \circ \lambda^i = \lambda^i \circ f^K$ für Morphismen $f : X \to Y$.

1.Bemerkung: Analog definiert man σ_t bzw. σ^i mit Hilfe von symmetrischen Potenzen und zeigt leicht

$$\sigma_t(x+y) = \sigma_t(x)\sigma_t(y) \ .$$

2.Bemerkung: Die Operatoren λ^i haben kein ganz einfaches Verhalten bezüglich der multiplikativen Struktur auf $K^\bullet(X)$. Das Verhalten der λ-Operatoren wie auch der später definierten γ-Operatoren, kann man aber extrahieren (durch mühevolle Umrechnungen) aus dem einfachen Verhalten der Adamscharaktere (siehe §4)!

§4 Die Adams Charaktere

Bessere Eigenschaften als die Bildungen λ_t und σ_t des letzten Abschnittes haben die Bildungen $log(\lambda_t)$ bzw. $log(\sigma_t)$, welche Addition in Addition überführen. Wir setzen

$$\psi_t(x) = \psi^0(x) + t\frac{d}{dt}log(\sigma_t(x))$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \psi^i(x)t^i \ ,$$

wobei

$$\psi^0 : K^\bullet(Y) \to \mathbb{Z}^{\pi_0(X)}$$

der Rang Homomorphismus ist: $\psi^0([G]) = n$ für G lokalfrei vom Rang n und X zusammenhängend. Offensichtlich gilt $log(\sigma_t(x+y)) = log(\sigma_t(x)) + log(\sigma_t(y))$ sowie dann $\psi_t(x+y) = \psi_t(x) + \psi_t(y)$, also per Definition

$$\psi^i(x+y) = \psi^i(x) + \psi^i(y) \ .$$

Weniger evident sind die Formeln (*)

$$\psi^i(x \cdot y) = \psi^i(x) \cdot \psi^i(y) \ .$$

Diese ergeben sich aus der Verträglichkeit mit Pullbacks

$$f^K \circ \psi^i = \psi^i \circ f^K$$

und dem

Splittingprinzip:

Es genügt die Formeln (*) auf Erzeugenden $x = [E]$ und $y = [F]$ nachzuweisen für E, F lokalfrei (Distributivgesetz).

Beachte: Auf $\mathbb{P}_X(E)$ besitzt E eine Filtration $0 \to \tilde{E} \to E \to O_{\mathbb{P}_X(E)}(1) \to 0$ mit $\tilde{E}$ lokalfrei vom Rang $< rang(E)$.

Wegen der Verträglichkeit mit Pullbacks kann man durch iterierte Einbettungen $K^\bullet(X) \hookrightarrow K^\bullet(\mathbb{P}_X(E) \hookrightarrow ...$ daher obdA annehmen, daß E und F eine direkte Summe von Linienbündeln ist. Wiederum wegen des Distributivgesetzes reduziert man somit auf den Fall, wo E und F Linienbündel sind (Splittingprinzip!).

Für Linienbündel F zeigt eine explizite Rechnung (obdA für X zusammenhängend)

$$\sigma_t(y) = 1 + yt + y^2t^2 + ...$$

und somit

$$\psi_t(y) = 1 + yt + y^2t^2 + ...$$

wegen $t\frac{d}{dt}log\frac{1}{1-yt} = yt + y^2t^2 + ...$ Es folgt

$$\psi^i(xy) = (xy)^i = x^iy^i = \psi^i(x)\psi^i(y)$$

im <u>Linienbündelfall</u>.

Damit ist gezeigt, daß die ψ^i <u>Ringhomomorphismen</u> des Ringes $K^\bullet(X)$ definieren mit der Eigenschaft

$$\psi^i \circ \psi^j = \psi^{ij} \qquad , \qquad \psi^1 = id \ .$$

Es genügt insbesondere die Operatoren für Primexponenten zu kennen.

<u>Bemerkung:</u> Mit Hilfe des Splittingprinzips zeigt man

$$\sigma_t(x) = 1/\lambda_{-t}(x)$$

analog durch Reduktion auf den Linienbündelfall. Man erhält als alternative Definition

$$\psi_t(x) = \psi^0(x) - t\frac{d}{dt}log(\lambda_{-t}(x)) \ .$$

§5 Die γ – Filtration:

Für ein Schema X mit Zusammenhangskomponenten X_i gilt

$$K^\bullet(X) = \prod_{X_i \in \pi_0(X)} K^\bullet(X_i) \ .$$

Wir nehmen daher o.B.d.A. im folgenden X zusammenhängend an.

Eine Umparametrisierung der λ^i Operatoren definiert die γ^i Operatoren

$$\gamma_t(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \gamma^i(x) t^i = \lambda_{\frac{t}{1-t}}(x) = \sum \lambda^i(x)(t + t^2 + ...)^i \ .$$

Offensichtlich erfüllen die $\gamma^i : K^\bullet(X) \to K^\bullet(X)$

$$(1) \qquad \gamma_t(x+y) = \gamma_t(x)\gamma_t(y)$$

$$(2) \qquad \gamma_t(1) = \lambda_{t/1-t}(1) = 1 + (t/1-t) = \frac{1}{1-t} \quad \text{und somit wegen (1) } \gamma_t(-1) = 1-t$$

$$(3) \qquad \gamma_t([L]-1) = \gamma_t([L])\gamma_t(-1) = (1+[L]t/1-t)(1-t) = 1 + t([L]-1)$$

$$(4) \qquad \gamma_t((1-[L])) = \sum t^i(1-[L])^i \qquad \text{wegen (1) und (3)}$$

Motivation: Sei $E = L_0 \oplus \cdots \oplus L_n$, dann ist $\lambda_t(E) = \prod \lambda_t(L_i) = \prod(1+[L_i]t)$ sowie $\gamma_t([E] - rangE) = \prod \gamma_t([L_i]-1) = \prod(1+t([L_i]-1))$. Somit sind die $\lambda^i(E)$ resp. die $\gamma^i([E]-rangE)$ die jeweils i-ten elementarsymmetrischen Funktionen in den $[L_i]$ resp. $([L_i]-1)$.

Wir definieren nun die γ-Filtration auf $K^\bullet(X)$. Setze dazu

$$F^1K^\bullet(X) = Kern(deg : K^\bullet(X) \to \mathbb{Z})$$

sowie für $\nu \geq 1$ (mit $\gamma_i := \gamma^i$)

$$F^\nu K^\bullet(X) = \mathbb{Z}\text{–Modul erzeugt von Elementen} \quad \gamma_{\mu_1}(x_1) \cdot \cdots \cdot \gamma_{\mu_l}(x_l)$$

$$\text{mit } x_i \in F^1K^\bullet(X) \text{ und } \mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_l \geq \nu.$$

Dies definiert eine Ringfiltration $F^\cdot$, d.h. man erhält eine absteigende Kette von Untergruppen $F^\nu K^\bullet(X)$ des Rings $K^\bullet(X)$. mit der Eigenschaft

$$F^\nu K^\bullet(X) \cdot F^\mu K^\bullet(X) \subset F^{\nu+\mu} K^\bullet(X) \ .$$

Da die λ^i und somit die γ^i mit Pullbacks vertauschen, gilt für Morphismen $\pi : X \to Y$

$$\pi^K : F^i K^\bullet(Y) \to F^i K^\bullet(X) \ .$$

Der projektive Fall: Sei nun speziell $X = \mathbb{P}_Y(E) \xrightarrow{\pi} Y$ und $rang(E) = n+1$. Setze

$$\Delta = 1 - [O_X(-1)] \in F^1 K^\bullet(X)$$

Dann definiert neben $F^i K^\bullet(X)$ auch

$$\tilde{F}^k K^\bullet(X) = \bigoplus_{i=0}^{n} F^{k-i} K^\cdot(Y) \cdot \Delta^i$$

eine Ringfiltration auf $K^\bullet(X)$!

Beweis: Es gilt (siehe auch IV, §5 Differenzengleichung)

$$(*) \qquad \Delta \cdot \Delta^n = \gamma_1(E^* - n - 1)\Delta^n + \cdots + \gamma_{n+1}(E^* - n - 1)$$

und somit $\Delta \cdot \tilde{F}^k \subseteq \tilde{F}^{k+1}$. Andererseits gilt $F^\nu K^\bullet(Y) \cdot \tilde{F}^\mu K^\bullet(X) \subset \tilde{F}^{\nu+\mu} K^\bullet(X)$, denn F ist eine Ringfiltration auf $K^\bullet(Y)$!). Es folgt $\tilde{F}^\nu \cdot \tilde{F}^\mu \subseteq \tilde{F}^{\nu+\mu}$.

Bemerkung zu (*): Beachte, daß nach §3 das Polynom $t^{n+1}\lambda_{-t^{-1}}(E^*)$ die Nullstelle $t_0 = [O_X(-1)]^{-1} \in K^\bullet(X)$ besitzt. Der Beweis von (*) resultiert daher aus der Übungsaufgabe

$$\sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \lambda^i(E^*) t_0^{n+1-i} = 0 \Longleftrightarrow \sum_{i=0}^{n+1} \gamma^i(E^* - n - 1)(1 - t_0)^{n+1-i} = 0.$$

(Folgt aus $t = (1-t_0)^{-1} \mapsto t/(1-t) = -t_0^{-1}$).

Lemma: In der obigen Situation $X = \mathbb{P}_Y(E)$ gilt

$$F^k K^\cdot(X) = \bigoplus_{i=0}^{n} F^{k-i} K^\cdot(Y) \cdot \Delta^i$$

1.Korollar: $\pi_K(F^k K^\bullet(X)) \subseteq F^{k-n} K^\bullet(Y)$, wobei formal $F^0 = F^{-1} = F^{-2} = ..$ zu setzen ist.

Beweis: Folgt aus $F^k \subset \cdots \subset F^{k-n}$, der Projektionsformel und dem Lemma!

2.Korollar: $K^\bullet(Y) \cap F^k K^\bullet(X) = F^k K^\bullet(Y)$.

Mit anderen Worten: Aussagen über Filtrationen sind verträglich mit dem Splittingprinzip!

Beweis des Lemmas: $\supseteq$ ist trivial wegen $\Delta \in F^1K^\bullet(X)$ und $F^iK^\bullet(Y) \subset F^iK^\bullet(X)$.

Zum Beweis der Umkehrung beachte, daß die rechte Seite wie oben gezeigt eine Ringfiltration $\tilde{F}^k$ von $K^\cdot(X)$ definiert. Somit genügt zum Beweis der Inklusion $\subseteq$

$$\gamma^k(x) \in \tilde{F}^k K^\bullet(X)$$

für alle k und alle $x \in F^1K^\bullet(X)$.

Man reduziert sofort auf die beiden trivialen Fälle $x \in K^\bullet(Y)$ beziehungsweise $x = \Delta$ (Ringerzeuger von $F^1K^\bullet(X)$) mit Hilfe der

Übungsaufgabe: Es gibt universelle ganzzahlige Polynome P und Q vom Gewicht k (!) mit der Eigenschaft $\gamma^k(x+y) = P(\gamma^1(x), ..., \gamma^k(x), \gamma^1(y), ..., \gamma^k(y))$ und $\gamma^k(x \cdot y) = Q(\gamma^1(x), ..., \gamma^k(x), \gamma^1(y), ..., \gamma^k(y))$ für alle $x, y \in F^1K^\bullet(X)$. Hinweis: Die analoge Aussage für die Adamsoperaotoren ψ^i ist klar nach $\S 4$. Forme dies in die Sprache der γ^i um!

§6 Topologische Filtration:

Sei X ein topologischer Raum, $Y \hookrightarrow X$ ein nichtleerer, irreduzibler abgeschlossener Teilraum. Dann ist die Kodimension

$$cod(Y : X)$$

die maximale Länge einer Kette von irreduziblen, abgeschlossenen Teilräumen in X, welche Y enthalten. Für $Y = \emptyset$ sei $cod(Y : X) = \infty$ und allgemein für abgeschlossene Y in X mit $Y = \bigcup_i Y_i$, Y_i irreduzibel sei $codim(Y : X) = \inf_i codim(Y_i : X)$. Ist X nicht leer, dann ist die Dimension $d = d(X)$ von X das Supremum aller $cod(Y : X)$ für $Y \neq \emptyset$ in X.

Auf $K(X)$ definiert man eine Ringfiltration $F^i_{top}K^\bullet(X)$ wie folgt: Es sei

$$x \in F^i_{top}K^\bullet(X)$$

genau dann, wenn gilt: Für alle abgeschlossenen Teilmengen Y in X gebe es einen Komplex lokalfreier Garben

$$L^\cdot : 0 \to L_0 \to L_1 \to \cdots \to L_n \to 0$$

auf X von endlicher Länge (abhängig von Y) mit

$$x = \chi(L^\cdot) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i [L_i]$$

und

$$cod(suppH^*(L^\cdot) \cap Y : Y) \geq i.$$

Beachte: Die Kohomologiegarben $H^i(L^\cdot)$ sind kohärent und die endliche Vereinigung $suppH^*(L^\cdot)$ der Träger der Garben,$H^i(L^\cdot)$, $i = 0, ..., n$ ist daher abgeschlossen in X.

Eigenschaften von F^i_{top}:

1) Besitzt X endliche Dimension d, dann gilt

$$F^{d+1}_{top}K^\bullet(X) = 0 \; .$$

2) $F^i_{top}K^\bullet(X)$ definiert eine Ringfiltration auf $K^\bullet(X)$

$$F^i_{top}K^\bullet(X) \cdot F^j_{top}K^\bullet(X) \subseteq F^{i+j}_{top}K^\bullet(X)$$

Beweis:

Zu 1: $cod(suppH^*(L^{\cdot}) \cap X, X) \geq d+1$ impliziert $suppH^*(L^{\cdot}) = \emptyset$, somit ist $L^{\cdot}$ exakt. Dann folgt aber $x = \chi(L^{\cdot}) = 0$ in $K^{\bullet}(X)$.

Zu 2: Fixiere ein $Y \subseteq X$ abgeschlossen. Sei $x \in F^i_{top}K^{\bullet}(X)$ repräsentiert durch $x = \sum(-1)^i[L_i]$ mit

$$cod(suppH^*(L^{\cdot}) \cap Y, Y) \geq i.$$

und $y \in F^j_{top}K^{\cdot}(X)$ durch $y = \sum(-1)^j[K_j]$ mit

$$cod(suppH^*(K^{\cdot}) \cap \tilde{Y}, \tilde{Y}) \geq j$$

und $\tilde{Y} := suppH^*(L^{\cdot}) \cap Y \subseteq Y$.

Dann wird $x \cdot y$ repräsentiert durch den Tensorkomplex $K^{\cdot} \otimes L^{\cdot}$

$$\begin{aligned} x \cdot y &= \sum_i (-1)^i [L_i] \sum_j (-1)^j [K_j] \\ &= \sum_k (-1)^k [\sum_{i+j=k} K_i \otimes_{O_X} L_j] \\ &= \sum_k (-1)^k (K^{\cdot} \otimes L^{\cdot})_k \end{aligned}$$

Zum Beweis von $x \cdot y \in F^{i+j}_{top}K^{\bullet}(X)$ genügt daher $suppH^*(K^{\cdot} \otimes L^{\cdot}) \subseteq suppH^*(K^{\cdot}) \cap suppH^*(L^{\cdot})$ wegen

$$codim(suppH^*(U^{\cdot}) \cap suppH^*(L^{\cdot}) \cap Y, Y) \leq cod(suppH^*(U^{\cdot}) \cap \tilde{Y}, \tilde{Y}) + cod(\tilde{Y}, Y) = i + j \ .$$

Die obige Trägerinklusion von $suppH^*(K^{\cdot} \otimes L^{\cdot})$ ergibt sich aus dem

Lemma: $H^*(L^{\cdot})_x = 0$ oder $H^*(K^{\cdot})_x = 0$ impliziert $H^*(L^{\cdot} \otimes_{O_{X,x}} K^{\cdot})_x = 0$.

Beweis: Da der Halmfunktor exakt ist, reduziert man sofort auf den Fall endlicher Komplexe freier R – Moduln $L^{\cdot}$ und $K^{\cdot}$ über dem lokalen Ring $R = O_{X,x}$. Gilt dann zum Beispiel

$$H^*(L) = 0 \ ,$$

so folgt leicht durch absteigende Induktion

$$L_i \cong Bild(d_{i-1}) \oplus Bild(d_i)$$

$$d_i = pr_2 \ .$$

Den Beweis des Lemmas reduziert man daher auf den Fall von Komplexen

$$L^{\cdot} : 0 \to L_i \overset{\sim}{\to} L_{i+1} \to 0$$

der Länge ≤ 2. Aus III, §6 folgt dann $H^*(L^{\cdot} \otimes_R K^{\cdot}) = 0$ aus $H^*(L^{\cdot}) = 0$.

§7 Trigonalisierung der Adamscharaktere:

1.Satz: Sei X ein (noethersches) Schema endlicher Dimension $d = d(X) < \infty$ versehen mit einem amplen Linienbündel. Dann gilt

$$F^{d+1}K^{\cdot}(X) = 0 \ .$$

Beweis: Es genügt zu zeigen, daß alle

$$x = \gamma_{\mu_1}(x_1) \cdots \gamma_{\mu_l}(x_l) \qquad , \qquad \sum_j \mu_j \geq d+1$$

für $x_1, .., x_l \in F^1K^{\bullet}(X)$ verschwinden.

Wir können wegen des Splittingprinzips annehmen

$$\pm x_i = [L_i] - 1 \quad , \quad L_i \in Pic(\tilde{X}) \ .$$

Dies gilt über einem Raum $\tilde{X}$, der Einfachheit halber oBdA $\tilde{X} = \mathbb{P}^n_X(E)$. Sei dann

$$\Delta = 1 - [O_{\tilde{X}}(-1)] \in K^{\cdot}(\tilde{X}) \ ,$$

so folgt für $x \in K^{\bullet}(X)$ aus $x \cdot \Delta^n = 0$ bereits $x = 0$ (siehe VII, §2).

Ersetzt man X durch $\tilde{X}$ und berücksichtigt

$$d(\tilde{X}) = d(\mathbb{P}^n_X(E)) = n + d(X)$$

(Algebra II Vorlesung), so reduziert man auf den Fall $\pm x_i = [L_i] - 1$. Beachte: Besitzt X ein amples Linienbündel $\mathcal{L}$, dann auch $\tilde{X} = \mathbb{P}^n_X(E)$, nämlich (!!) $\pi^*(\mathcal{L}) \otimes O_{\mathbb{P}^n_X(E)}(1)$.

Wegen dem nächsten Lemma (!)

$$[L_i] - 1 \in F^1_{top}K^{\bullet}(\tilde{X})$$

folgt für die Ringfiltration $F^*_{top}K^{\bullet}(\tilde{X})$ und unser $x = \pm \prod_{i=1}^{d+1}([L_i] - 1)$

$$x \cdot \Delta^n \in K^{n+d+1}_{top}(\tilde{X})$$

und somit wegen

$$F^{d(\tilde{X})+1}_{top}K^{\bullet}(\tilde{X}) = 0$$

also $\Delta^n \cdot x = 0$ bzw die Behauptung $x = 0$.

Lemma: Sei X ein Schema und L_1 ein amples Linienbündel auf X. Dann gilt für alle $L \in Pic(X)$

$$[L] - 1 \in F^1_{top}(X).$$

Beweis: Wegen

$$[L] - 1 = ([L][L_1]^n - 1) - [L]([L_1]^n - 1)$$

kann man o.B.d.A L durch LL_1^n für $n \in \mathbb{Z}$ ersetzen. Wir lassen dies als Übungsaufgabe!

2.Satz: Für $x \in F^n K^\bullet(X)$ gilt $\psi^i(x) - i^n \cdot x \in F^{n+1}K^\bullet(X)$.

Beweis: Mittels des Splittingprinzips und §5 reduziert man sofort auf den Fall

$$x = ([L_1] - 1) \cdots ([L_i] - 1) \quad , \quad L_i \in Pic(X)$$

Es genügt dann zu zeigen $\psi^i([L] - 1) - i([L] - 1) \in F^2 K^\bullet(X)$. Beachte $\psi^i([L]) = [L]^i$ nach §4

$$\psi^i([L] - 1) = \psi^i([L]) - \psi^i(1) = [L]^i - 1 \ .$$

Aber

$$[L]^i - 1 = \big(1 + ([L] - 1)\big)^i - 1 = i([L] - 1) + O(([L] - 1)^2) \ .$$

Wir setzen

$$G^n(X) = F^n K^\bullet(X)/F^{n+1}K^\bullet(X)$$

und erhalten den graduierten Ring

$$G(X) = \bigoplus_{n=0}^{d} G^n(X)$$

gebildet zu $(K^\bullet(X), F^n K^\bullet(X))$. Analog ist $G(X) \otimes \mathbb{Q}$ der graduierte Ring gebildet zu $(K^\bullet(X) \otimes \mathbb{Q}, F^n K^\bullet(X) \otimes \mathbb{Q})$. Wir sind nun in folgender Situation

Annahme: Sei V ein (nicht notwendig endlich dimensionaler) $\mathbb{Q}$-Vektorraum versehen mit einer endlichen absteigenden Kette von $\mathbb{Q}$-Untervektorräumen $0 = F^{d+1} \subset F^d \subset ...F^1 \subset F^0 = V$. Sei Ψ ein Endomorphismus von V und seien $\lambda_i \in \mathbb{Q}$ paarweise verschiedene Zahlen mit der Eigenschaft $(\Psi - \lambda_n id)(F^n) \subset F^{n+1}$. Dann besitzt (V, Ψ) eine Eigenraumzerlegung

$$\varphi : \bigoplus_{n=0}^{d} F^n/F^{n+1} \cong V \ .$$

Auf dem direkten Summand $V_n = \varphi(F^n/F^{n+1})$ operiert Ψ durch Multiplikation mit dem Eigenwert λ_n.

Beweis: Der Isomorphismus φ wird definiert mit Hilfe der Eigenwertprojektionen

$$P_m : V \to V$$

$$P_m = \prod_{n \neq m} (\Psi - \lambda_n id)) / \prod_{n \neq m} (\lambda_n - \lambda_m)$$

Offensichtlich gilt

$$P_0 + P_1 + \cdots P_d = id$$

$$P_i \circ P_j = 0 \qquad i \neq j$$

$$P_i \circ P_i = P_i$$

Dies folgt aus $\prod_{n=0}^{d} (\Psi - \lambda_n) = 0$. Beachte $\prod_{n=0}^{d} (\Psi - \lambda_n id)(V) \subset \prod_{n=1}^{d} (\Psi - \lambda_n id)(F^1) \subset ... \subset F^{d+1} = 0$.

Dann ist $\varphi(\overline{x})$ für $\overline{x} \in F^n/F^{n+1}$ definiert als der eindeutig bestimmte Eigenvektor von Ψ zum Eigenwert λ_n in F^n, welcher zu $\overline{x}$ kongruent ist mod F^{n+1}. Eindeutigkeit ist klar. Existenz folgt zum Beispiel durch den Ansatz

$$\varphi(\overline{x}) = P_n(x) \ .$$

Hierbei sei

$$x \in F^n$$

beliebig mit

$$x \equiv \overline{x} \ mod \ F^{n+1} \ .$$

Zusatzannahme: V sei ein $\mathbb{Q}$-Ring und $F^{\cdot}$ eine Ringfiltration. Sei weiter Ψ ein Ringhomomorphismus und sei $\lambda_n = \lambda^n$, $\lambda \in \mathbb{Q}$.

Dann definiert φ sogar einen Ringisomorphismus zwischen dem graduierten Ring $\bigoplus F^n/F^{n+1}$ und dem Ring V. Dies ist trivial. Zum Beispiel sei $\overline{x} \in F^n/F^{n+1}$ und $\overline{y} \in F^m/F^{m+1}$. Dann ist $\varphi(\overline{x})\varphi(\overline{y}) \in F^{n+m}$ und ein Eigenvektor von Ψ zum Eigenwert λ_{n+m} mit Restklasse $\overline{xy}$ in F^{n+m}/F^{n+m+1}. Es folgt $\varphi(\overline{x})\varphi(\overline{y}) = \varphi(\overline{xy})$.

Korollar: Sei X ein Schema der Dimension $d < \infty$ versehen mit einem amplen Linienbündel. Dann gibt es einen Ringisomorphismus

$$\varphi : G(X) \otimes \mathbb{Q} \xrightarrow{\sim} K^{\bullet}(X) \otimes \mathbb{Q}.$$

§8 Der Cherncharakter

Sei X ein noethersches Schema endlicher Dimension d und X besitze ein amples Linienbündel. Sei $\varphi : G(X) \otimes \mathbb{Q} \xleftarrow{\sim} K^{\bullet}(X) \otimes \mathbb{Q}$ wie in §7.

Man erhält durch Komposition einen natürlichen Ringhomomorphismus

$$ch : K^{\bullet}(X) \to K^{\bullet}(X) \otimes \mathbb{Q} \cong G(X) \otimes \mathbb{Q} \ ,$$

den Cherncharakter.

Für $x = [L]-1 \ mod \ F^2K^{\bullet}(X)$ in $G^1(X)$ gilt für den Isomorphismus $\varphi : G(X)\otimes\mathbb{Q} \to K^{\bullet}(X)\otimes\mathbb{Q}$

$$\varphi(x) \ = \ \sum_{\nu=1}^{d} \frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu}([L]-1)^{\nu} \quad " = " \ ln([L]) \ ,$$

denn die Summe ist kongruent zu $x = [L]-1$ mod $F^2K^{\bullet}(X)$ und es gilt die Eigenwertgleichung

$$\begin{aligned} &\psi^i\big(ln([L])\big) \\ &= \psi^i\big(\sum_{\nu=1}^{d} \frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu}([L]-1)^{\nu}\big) = \sum_{\nu=1}^{d} \frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu}(\psi^i([L])-1)^{\nu} \\ &=_{§4} \ \sum_{\nu=1}^{d} \frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu}([L]^i-1)^{\nu} \quad " = " ln([L]^i) \\ &= i \cdot \sum_{\nu=1}^{d} \frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu}([L]-1)^{\nu}) \quad " = " i \cdot ln([L]) \ . \end{aligned}$$

Es folgt für den Cherncharakter

Korollar: $ch([L]) = \sum\limits_{\mu=0}^{d} \frac{c_1([L]^{\mu}}{\mu!} \quad " = " exp(c_1([L]))$ für Linienbündel L auf X. Hierbei ist

$$c_1(L) := [L]-1 \ mod \ F^2K^{\bullet}(X) \in G^1(X) \ .$$

Bemerkung: $c_1(L) \in G^1(X)$ wird Chernklasse von L genannt.

Beweis: Folgt aus $\varphi\big(exp(c_1([L]))\big) = exp(\varphi(c_1([L]))) \overset{!}{=} exp(ln([L])) = [L]$.

Korollar: Die Cherncharaktere ch_X definieren die eindeutig bestimmte Familie mit Pullback kompatibler Ringhomomorphismen (Splittingprinzip!) von $K^{\bullet}(X)$ nach $G(X) \otimes \mathbb{Q}$ mit der Eigenschaft

$$ch([L]) = exp(c_1(L)) \quad , \quad L \in Pic(X) \ .$$

$$ch_X : K^\bullet(X) \to G(X) \otimes \mathbb{Q}$$

$$ch_Y : K^\bullet(Y) \to G(Y) \otimes Q$$

Bemerkung: Um den Cherncharakter für Vektorbündel E zu berechnen benutzt man das Splittingprinzip. Dies zeigt mit Hilfe des Satzes über die elementarsymmetrischen Funktionen sehr schnell die Existenz einer universellen Formel für $ch([E])$ in Termen der höheren Chernklassen der lokalfreien Garbe E

$$c_i(E) = \gamma_i([E] - rang(E)) \ mod \ F^{i+1}K^\bullet(X) \in G^i(X) \ .$$

für $i = 0, ..., rang(E)$ und Null sonst. Es gilt

$$ch(E) = rang(E) + c_1(E) + \frac{1}{2}[c_1^2(E) - 2c_2(E)]$$

$$+\frac{1}{6}[c_1(E)^3 - 3c_1(E)c_2(E) + 3c_3(E)]$$

$$+\frac{1}{24}[c_1(E)^4 - 4c_1(E)^2c_2(E) + 4c_1(E)c_3(E) + 2c_2(E)^2 - 4c_4(E)]$$

$$+ ... \ .$$

§9 $Pic(X)$ und $G^1(X)$

Sei X ein zusammenhängendes Schema.

Man hat natürliche Abbildungen (!) α, β mit $\beta \circ \alpha = id$

$$(Pic(X), \otimes) \qquad\qquad (K^\bullet(X), +)$$

$$L \mapsto [L]$$

$$det(E) \qquad [E] \ .$$

<u>Beachte:</u> β ist wohldefiniert und definiert einen Gruppenhomomorphismus (!) von $(K^\bullet(X), +)$ in die Gruppe $Pic(X)$. Nämlich $0 \to E_1 \to E_2 \to E_3 \to 0$ für lokalfreie Garben E_1, E_2, E_3 impliziert $\lambda_t(E_2) = \lambda_t(E_1)\lambda_t(E_3)$ sowie durch Vergleich der höchsten Koeffizienten $det(E_2) \cong det(E_1)det(E_3)$.

<u>Lemma:</u> $F^2K^\bullet(X)$ liegt im Kern von β.

<u>Beweis:</u> Da α und β mit Pullbacks vertauschen, gilt für $\tilde{X} = \mathbb{P}_X(E)$ etc.

$$Pic(\tilde{X}) \hookrightarrow K^\bullet(\tilde{X})$$

$$Pic(X) \hookrightarrow K^\bullet(X) \ ,$$

also $Pic(X) \hookrightarrow Pic(\tilde{X})$. Via Splittingprinzip genügt es daher zu zeigen $\beta(x) = 0$ für $x = (1-[L_1])(1-[L_2])$ und Linienbündel L_1, L_2. Aber $\beta(x) = \beta(1-[L_1]-[L_2]+[L_1 \otimes_{O_X} L_2]) = O_X \otimes L_1^{-1} \otimes L_2^{-1} \otimes L_1L_2 = O_X$.

Unter Verwendung derselben Bezeichnungen erhalten wir die Injektivität der Chernklassenabbildung $c_1 \circ \alpha : Pic(X) \hookrightarrow G^1(X)$ via

$$\alpha : Pic(X) \quad \hookrightarrow \quad 1 + F^1K^\bullet(X) \ mod \ F^2K^\bullet(X) \ ,$$

$$L \mapsto 1 + ([L] - 1) = 1 + c_1([L]) \ .$$

<u>Satz:</u> Die Abbildung $L \mapsto c_1([L])$ definiert einen Gruppenisomorphismus $(Pic(X), \otimes) \cong (G^1(X), +)$.

<u>Beweis:</u> Es genügt die Surjektivität zu zeigen. Dazu genügt

$$(*) \qquad\qquad [E] - rang(E) = [det(E)] - 1 \ mod \ F^2K^\bullet(X) \ .$$

Das Splittingprinzip reduziert auf den Fall $[E] = \sum\limits_{i=1}^{n} [L_i]$. Dann gilt $det(E) = \bigotimes\limits_{i=1}^{n} L_i$ und (*) folgt aus

$$\prod_i [L_i] = \prod_i (1 + ([L_i] - 1)) \equiv 1 + \sum_i ([L_i] - 1) \ mod \ F^2K^\bullet(X) \ .$$

Als Spezialfall von (*) erhält man $[L_1L_2] = [L_1] + [L_2] - 1$ modulo $F^2K^\bullet(X)$, d.h. die Homomorphieeigenschaft

$$[L_1L_2] - 1 \equiv ([L_1] - 1) + ([L_2] - 1) \ mod \ F^2K^\bullet(X)$$

der Abbildung.

Wegen $G^0(X) = F^0K^\bullet(X)/F^1K^\bullet(X) = \mathbb{Z}$ folgt

<u>Korollar:</u> Sei X ein zusammenhängendes noethersches Schema der Dimension 1 versehen mit einem amplen Linienbündel, dann gilt

$$K^\bullet(X) \cong \mathbb{Z} \oplus Pic(X) \ .$$

§10 Appendix

Über die höheren $G^i(X)$ ist im allgemeinen nicht viel bekannt. Es gibt allerdings über die topologische Filtration einen Zusammenhang mit den abgeschlossenen Unterschemata von X der Kodimension i. Speziell im Fall wo X irreduzibel und von endlichem Typ über einem Körper k sowie versehen mit einem amplen Linienbündel ist, kann man für $d = dim(X)$ leicht zeigen, daß $G^d(X)$ ein Quotient der freien Gruppe $\bigoplus_{x \in |X|} \mathbb{Z}$ ist. Hierbei sei $|X|$ die Menge der abgeschlossenen Punkte. Die Einschränkung der Eulercharakteristik auf $G^d(X)$ hat in diesem Fall die einfache Gestalt

$$K^\bullet(X) \qquad F^d K^\bullet(X) = G^d(X) \qquad \bigoplus_{x \in |X|} \mathbb{Z}$$

$$K^\bullet(Spec(k)) = K^\bullet(Spec(k)) \cong \mathbb{Z} \ ,$$

wobei die rechte vertikale Abbildung gegeben ist durch

$$\#(\sum n_i Spec(k_i)) = \sum n_i grad(k_i : k) \ .$$

Wir gehen auf diese (einfachen) Zusammenhänge hier nicht weiter ein. Man sollte aber im Auge behalten, daß die Eulercharakteristik auf dem letzten Filtrationsschritt eine sehr elementare Deutung besitzt. Man erhält weiter die klassischen Schnittpaarungen

$$G^i(X) \times G^{d-i}(X) \to \mathbb{Z}$$

$$(x, y) \mapsto \#(x \cdot y)$$

sowie allgemeinere Paarungen auf $G^{i_1}(X) \times ... \times G^{i_r}(X)$ für $i_1 + ... + i_r = d$.

VIII DER SATZ VON RIEMANN-ROCH

§1 Reguläre Einbettungen

Eine abgeschlossene Immersion
$$i : Y \hookrightarrow X$$
heißt reguläre Einbettung der Kodimension r, wenn die Idealgarbe
$$J_Y \subset O_X$$
für alle $\eta \in Y$ lokal durch eine reguläre Sequenz $y_1, .., y_r (r \geq 1)$ des lokalen Ringes $O_{X,\eta}$ gegeben ist
$$J_{Y,\eta} = (y_1, .., y_r) \subset O_{X,\eta} \ .$$

Sei $i : Y \hookrightarrow X$ eine reguläre abgeschlossene Einbettung, dann ist die Garbe
$$i^*(J_Y) = J_Y / J_Y^2 \qquad \text{(Konormalenbündel)}$$
sowie ihre duale Garbe
$$N_{Y/X} \qquad \text{(Normalenbündel)}$$
lokalfrei auf Y vom Rang r. (Beweis analog zu V,§5, Korollar)

1.Beispiel: Ein abgeschlossener Punkt $\eta = Spec(k) \in X$ definiert eine reguläre Einbettung $i : \eta \hookrightarrow X$ genau dann, wenn $O_{X,\eta}$ ein regulärer lokaler Ring ist.

2.Beispiel (Nullstellenort von Schnitten): Sei E eine lokalfreie Garbe auf X und $s : O_X \to E$ ein nichttrivialer Schnitt $s \in H^0(X, E)$. Betrachte den dualen Schnitt $s^* : E^* \to O_X$ und sein Bild $J = s^*(E^*) \subset O_X$. Die Idealgarbe J definiert eine Immersion von Y "=" $Spec(O_X/J)$ nach X. Diese ist regulär falls der Koszulkomplex
$$0 \to \bigwedge^r E^* \to ... \to \bigwedge^i E^* \to \bigwedge^{i-1} E^* \to ... \to \bigwedge^1 E^* \xrightarrow{s^*} O_X$$
$$d : s_1^* \wedge ... s_i^* \mapsto \sum_{j=1}^{i} (-1)^{j-1} s_1^* \wedge ... s_i^* \cdot \langle s_j^*, s \rangle$$
exakt ist. In der Tat ist dies lokal gerade die kohomologische Charakterisierung regulärer Sequenzen (V, §5).

Sei nun $i : Y \to X$ regulär. Anwenden des rechtsexakten Funktors i^* auf
$$\bigwedge^2 E^* \xrightarrow{d} E^* \to J_Y \to 0$$
liefert $i^*(E^*) \cong i^*(J_Y)$ wegen $i^*(d) = 0$ $\big(s$ verschwindet auf $Y!\big)$ Es folgt $i^*(E^*) \cong J_Y/J_Y^2$ bzw.
$$N_{Y/X} = i^*(E) \ .$$

3.Beispiel: Wir geben ein konkretes Beispiel zu 2). Sei $X = \mathbb{P}_Y(O_Y \oplus F) \xrightarrow{\pi} Y$ mit $E = \pi^*(F^*)(1)$ und dem kanonischen Schnitt $s \in H^0(X,E) \cong Hom_{O_Y}(F, O_Y \oplus F)$. Die von s definierte Einbettung i ist regulär mit der Eigenschaft $\pi \circ i = id_Y$

$$X$$

$$Y \ .$$

(Leicht nachzuprüfen in lokalen Karten!) Offensichtlich gilt $i^*(E) = F^*$, d.h.

$$N_{Y/X} \ \cong \ F^* \ .$$

§2 Aufblasungen

Sei X ein Schema und Y ein abgeschlossenes Unterschema. Es bezeichne $J_Y \subset O_X$ die Idealgarbe von Y. Dann definiert man die Aufblasung $B_Y(X)$ von Y in X durch

$$B_Y(X) = Proj(O_X \oplus J_X \oplus J_X^2 \oplus ...)$$

$$\pi$$

$$X$$

Sei $U = X \setminus Y$ das offene Komplement, dann gilt $J_X|U \cong O_U$ und daher

$$\pi^{-1}(U) \cong Proj(O_U[X_0]) = \mathbb{P}_U^0 \cong U \ .$$

Außerhalb des Urbildes von Y ist daher π ein Isomorphismus. Das Urbild von Y ist dagegen in der Regel nicht isomorph zu Y.

Ist speziell $i : Y \hookrightarrow X$ eine reguläre Einbettung der Kodimension r, dann ist

$$i^*(J_Y) \cong J_Y/J_Y^2 = N_{Y/X}^*$$

lokalfrei auf Y und es gilt

$$i^*(J_Y^k) \cong J_Y^k/J_Y^{k+1} \cong Symm^k(N_{Y/X}^*)$$

auf Y. (Analogon zu V,§5 Taylorentwicklung). Die Einschränkung $\pi : \pi^{-1}(Y) \to Y$ ist daher gegeben durch

$$\pi^{-1}(Y) \cong \mathbb{P}_Y(N_{Y/X}^*) \to Y \ .$$

Beachte: $\pi^*(J_X)$ wird zu der lokalfreien Garbe $O_{B_Y(X)}(1)$ auf $B_Y(X)$ und

$$\mathbb{P}_Y(N_{Y/X}^*) \hookrightarrow B_Y(X)$$

ist regulär eingebettet, wobei $\mathbb{P}_Y(N_{Y/X})$ Nullstelle eines Schnittes

$$s : O_{B_Y(X)} \to O_{B_Y(X)}(1)$$

ist.

§3 Riemann-Roch (Formulierung)

Seien X, Y reguläre noethersche Schemata endlicher Dimension versehen mit amplen Linienbündel und sei $f : Y \to X$ ein Morphismus von Schemata. Auf Grund unserer Annahme ist dann $K^{\bullet}(X) \cong K_{\bullet}(X)$ oder kurz $K(X)$ ein endlich gefilterter Ring. Analoges gilt für $K(Y)$. Wir machen jetzt noch die Annahme, daß fast alle höheren direkten Bilder $R^{\nu} f_*(G)$ jeder kohärenten Garbe G auf Y verschwinden. Dann ist der $K(X)$-Modulhomomorphismus

$$f_K : K(Y) \to K(X)$$

wohldefiniert (Eulercharakteristik) und gibt einen Funktor von der Kategorie der regulären Schemata mit obigen Morphismen in die Kategorie der abelschen Gruppen. Zur Erinnerung: Obwohl $K(X)$ etc. Ringe sind, sind die f_K nur Gruppenhomomorphismen bezüglich der Addition.

Beachte: Die Ringhomomorphismen ψ^p (Adamscharaktere) und ch (Cherncharakter) vertauschen mit den Basiswechsel Ringhomomorphismen f^K, wie wir in Kapitel VII gesehen haben. Dies ist nicht der Fall für die Abbildungen f_K. Bestenfalls kann man erreichen, eine Beschreibung der Abweichung in Termen der multiplikativen Struktur der Ringe zu finden!

Definition: Wir sagen $f : Y \to X$ erfüllt den Satz von Adams-Riemann-Roch bezüglich des Adamsmultiplikators $\theta_{f,p} \in K(Y) \otimes \mathbb{Z}[1/p]$ und der relativen Dimension $r \in \mathbb{Z}$, falls

$$\theta_{f,p} \cdot \psi^p : K(Y) \to K(Y) \otimes \mathbb{Z}[1/p]$$

$$\psi^p : K(X) \to K(X) \otimes \mathbb{Z}[1/p]$$

bezüglich der Abbildungen $\theta_{f,p} \cdot \psi^p$ resp. ψ^p für alle $x \in K(Y)$ kommutiert:

$$f_K(\theta_{f,p} \cdot \psi^p(x)) = \psi^p(f_K(x)) \ .$$

Wir fordern zusätzlich

$$deg(\theta_{f,p}) = p^r$$

auf jeder Zusammenhangskomponente. Insbesondere ist $\theta_{f,p}$ eine Einheit in $K(Y) \otimes \mathbb{Z}[1/p]$.

1.Lemma: Aus dem Satz von Adams-Riemann-Roch für $f : Y \to X$ bezüglich $(\theta_{f,p}, r)$ folgt

$$f_K(F^i K(Y) \otimes \mathbb{Q}) \subset F^{i+r} K(X) \otimes \mathbb{Q} \ .$$

Beweis: Wegen $deg(\theta_{f,p}/p^r) = 1$ existiert (!) eine Einseinheit $z \in 1 + F^1 K(Y) \otimes \mathbb{Q}$ (eindeutig) mit

$$\psi^p(z)/z = p^r/\theta_{f,p} \ .$$

Es folgt
$$\psi^p(f_K(zx)) = f_K(\theta_{f,p}\psi^p(zx)) = p^r f_K(z\psi^p(x)) \ .$$
Also respektiert der additive Homomorphismus

$$x \mapsto f_K(zx)$$

von $K(Y) \otimes \mathbb{Q}$ nach $K(X) \otimes \mathbb{Q}$ die <u>Eigenwertzerlegung</u> der <u>Adamscharaktere</u>.

$$p^r\psi^p : K(Y) \otimes \mathbb{Q} \ \rightarrow \ K(Y) \otimes \mathbb{Q}$$

$$K(Y) \otimes \mathbb{Q} \qquad\qquad K(Y) \otimes \mathbb{Q}$$

$$\psi^p : K(X) \otimes \mathbb{Q} \ \rightarrow \ K(X) \otimes \mathbb{Q} \ .$$

Die Behauptung folgt nun aus der Eigenwertbeschreibung der Filtration ($F^i \otimes \mathbb{Q} =$ Summe der ψ^p-Eigenräume zu den Eigenwerten $p^i, p^{i+1}, .., p^d$) und der Tatsache, daß z eine Einheit ist!

Insbesondere folgt daher aus dem Satz von Adams-Riemann-Roch, daß f_K einen Homomorphismus gefilterter $(K(X), F^\cdot)$-Moduln definiert. Man erhält einen funktoriell zugeordneten <u>Homomorphismus</u> f_G <u>graduierter</u> $G(X) \otimes \mathbb{Q}$-Moduln

$$f_G : G^i(Y) \otimes \mathbb{Q} \rightarrow G^{i+r}(X) \otimes \mathbb{Q} \ ,$$

welcher den <u>Grad</u> jeweils um r <u>shiftet</u>!

Die Existenz dieses Morphismus ist die Voraussetzung für die Formulierung des Satzes von Riemann-Roch.

<u>Definition:</u> Wir sagen $f : Y \rightarrow X$ erfüllt den Satz von <u>Riemann-Roch</u> bezüglich (τ_f, r), falls gilt

1) $$f_K(F^iK(Y) \otimes \mathbb{Q}) \subset F^{i+r}K(X) \otimes \mathbb{Q}$$

2)

$$\tau_f \cdot ch_Y : K(Y) \rightarrow G(Y) \otimes \mathbb{Q}$$

$$ch_X : K(X) \rightarrow G(X) \otimes \mathbb{Q}$$

kommutiert bezüglich der Abbildungen $\tau_f \cdot ch$ resp. ch

$$f_G(\tau_f \cdot ch_Y(x)) = ch_X(f_K(x))$$

für alle $x \in K(Y)$. $\tau_f \in G(Y) \otimes \mathbb{Q}$ heißt dann Todd-Klasse von f und $r \in \mathbb{Z}$ heißt relative Dimension von f.

Funktorialität: Gilt der Satz von (Adams)-Riemann-Roch für Morphismen $f : Z \to Y$ und $g : Y \to X$, dann offensichtlich auch für $g \circ f : Z \to X$ mit $\tau_{g\circ f} = \tau_f \cdot f^G(\tau_g)$ und $r_{g\circ f} = r_g + r_f$ (bzw. $\theta_{g\circ f,p} = \theta_{f,p} \cdot f^K(\theta_{g,p})$.)

2.Lemma: Adams-Riemann-Roch impliziert Riemann-Roch.

Beweis: Wie bereits gezeigt impliziert ARR Eigenschaft 1). Setze $\tau_f = ch(z^{-1})$. Dann ist Eigenschaft 2)

$$ch_X(f_K(y)) = f_G(ch_Y(z^{-1})ch_Y(y))$$

äquivalent zu

$$ch_X(f_K(zx)) = f_G(ch_Y(x)) \quad , \quad x \in K(X) \otimes \mathbb{Q}$$

wegen der Substitution $y = zx$.

Es genügt dies für Eigenvektoren x von ψ^p zu beweisen. Für solche y ist auch $f_K(zx)$ ein Eigenvektor von ψ^p!

Zur Erinnerung: Für Eigenvektoren ξ von ψ^p zum Eigenwert p^ν ist $ch(\xi) =_{Def} \xi \ mod \ F^{i+1}$.

Es genügt daher zu zeigen

$$f_G\big(x \ mod \ F^{i+1}K(Y)\big) \ = \ f_K(zx) \ mod \ F^{i+r+1}K(X) \quad (x \in F^iK(Y)) \ .$$

Dies folgt aus $f_K(zx) \equiv f_K(x) \ mod \ F^{i+r+1}$ wegen $z = 1 \ mod \ F^1$ und da f_K Eigenschaft 1) des Satzes von Riemann-Roch erfüllt.

Bemerkung: Wir werden später die Existenz von τ_f mit Hilfe von Lemma 2 zeigen. τ_f berechnet sich später explizit in Termen von Todd-Klassen gewisser Vektorbündel.

Definition: Sei E ein Vektorbündel auf X. Die Todd-Klasse von E ist definiert durch

$$Todd(E) = 1 + \frac{1}{2}c_1(E) + \frac{1}{12}(c_1(E)^2 + c_2(E)) + \frac{1}{24}c_1(E)c_2(E) + ... \ \in \ G(X) \otimes \mathbb{Q} \ .$$

Sie ist vollständig charakterisiert (Satz über elementarsymmetrische Funktionen!) durch die Eigenschaften

1) $Todd(E \oplus F) = Todd(E)Todd(F)$

2) Kompatibilität mit Pullbacks $Todd(\pi^*(E)) = \pi^G(Todd(E))$.

3) Für Linienbündel gilt
$$Todd(L) = \frac{c_1(L)}{1 - exp(-c_1(L))} \ .$$

§4 Ein Spezialfall

Wir betrachten einen einfachen Spezialfall der Situation des vorigen Paragraphen.

Annahme:

$$i : Y \to X$$

sei eine reguläre abgeschlossene Immersion i der Kodimension r, welche durch einen Schnitt $s \in H^0(X,E)$ definiert ist (Beispiel 2, §1).

Wir beweisen in diesem Fall den Satz Riemann-Roch. Wir beschränken uns auf die Berechnung der Bilder des Einselementes $1 \in K(Y)$. Dies genügt zum Beweis des Satzes von (Adams)-Riemann-Roch, falls die Abbildung $i^K : K(X) \to K(Y)$ surjektiv ist. $K(Y)$ ist dann nämlich als $K(X)$-Modul erzeugt von 1. Dies ist im Beispiel 3, §1 mit

$$i : Y \to X = \mathbb{P}_Y(O_Y \oplus F)$$

der Fall wegen der Existenz eines π mit $\pi \circ i = id_Y$!

Berechnung von $i_K(1)$ durch $\lambda_{-1}(E)$:

Da abgeschlossene Immersionen affine Morphismen sind, verschwinden alle höheren direkten Bilder. Es folgt

$$i_K(1) = \sum_\nu (-1)^\nu [R^\nu i_*(O_Y)] = [i_*(O_Y)] \ .$$

Beachte

$$0 \to J_Y \to O_X \to i_*(O_Y) \to 0 \ .$$

Somit ist der Koszulkomplex wegen $O_X/s^*(E^*) = O_X/J_Y$ eine Auflösung (Regularität!) von $i_*(O_Y)$. Es folgt nach §1

$$[i_*(O_Y)] = [O_X] - [\bigwedge^1 E^*] + ... \pm [\bigwedge^n E^*] = \lambda_{-1}([E^*]) \ .$$

Adams-Riemann-Roch: (obdA $E = \bigoplus L_\nu$ wegen Splittingprinzip)

Man muß ein Element $\theta_{i,p} = i^K(\tilde{\theta}_{i,p})$ finden mit

$$\tilde{\theta}_{i,p} \cdot i_K(1) = \psi^p(i_K(1)) \ .$$

Benutze dazu $i_K(1) = \lambda_{-1}(E^*) = \prod_\nu \lambda_{-1}(L_\nu^*) = \prod_\nu (1 - L_\nu^*)$. Beachte $\psi^p(\prod_\nu (1 - L_\nu^*)) = \prod_\nu (1 - (L_\nu^*)^p)$. Somit hat

$$\tilde{\theta}_{i,p} = \prod_\nu (1 + L_\nu^* + ... + (L_\nu^*)^{p-1})$$

die gewünschte Eigenschaft mit

$$deg(\theta_{i,p}) = deg(\tilde{\theta}_{i,p}) = \prod_\nu p = p^r \ .$$

Grothendieck-Riemann-Roch: (obdA $E = \bigoplus L_\nu$) Dies folgt natürlich aus dem Satz von Adams-Riemann-Roch §3. Wir geben einen unabhängigen Beweis im vorliegenden Fall: Zum einen gilt

$$ch_X(i_K(1)) = ch_X(\lambda_{-1}([E^*])) = ch_X(\lambda_{-1}(\sum [L_\nu^*])) = ch_X(\prod \lambda_{-1}(L_\nu^*))$$

$$= \prod_\nu ch_X(1 - L_\nu^*) = \prod_\nu (1 - ch_X(L_\nu^*))$$

$$= \prod_\nu (1 - exp(c_1([L_\nu^*]))) = \prod_\nu (1 - exp(-c_1(L_\nu))) \ .$$

Andererseits verschiebt i_K den Filtrationsgrad um r (Adams-Riemann-Roch!). Es folgt

$$i_G(ch_Y(1)) = i_G(1) =_{Def} \ i_K(1) \ mod \ F^{r+1}K(X) \otimes \mathbb{Q} \in G^r(X) \otimes \mathbb{Q}$$

wegen $1 \in G^0(Y)$. Also

$$i_G(1) = \lambda_{-1}([E^*]) \ mod \ F^{r+1}K(X) \otimes \mathbb{Q}$$

$$= \prod_\nu \lambda_{-1}(L_\nu^*) \ mod \ F^{r+1}K(X) \otimes \mathbb{Q}$$

$$= \prod_\nu (1 - [L_\nu]^*) \ mod \ F^{r+1}K(X) \otimes \mathbb{Q}$$

$$= \prod_\nu -c_1(L_\nu^*) = \prod_\nu c_1(L_\nu) \ \in G^r(X) \otimes \mathbb{Q}$$

oder äquivalent dazu $i_G(1) = c_r(E)$. Die Todd-Klasse $\tau_i \in G(Y) \otimes \mathbb{Q}$ muß daher die Gestalt $\tau_i = i^G(\tilde{\tau}_i)$ besitzen mit

$$\tilde{\tau}_i = (\prod_\nu \frac{c_1(L_\nu)}{1 - exp(-c_1(L_\nu))})^{-1}$$

$$= \prod_\nu Todd(L_\nu)^{-1} = Todd(E)^{-1}$$

Beachte: Die Toddklasse eines Vektorbündels ist per Definition immer eine Einheit. Es folgt also

$$\tau_i = Todd(i^*E)^{-1} = Todd(N_{Y/X})^{-1} \ .$$

Korollar: Für $i : Y \hookrightarrow X = \mathbb{P}_Y(O_Y \oplus F)$ konstruiert zu $s \in H^0(X, E), E = \pi^*(F^*)(1)$ gilt der Satz von (Adams)-Riemann-Roch mit der relativen Dimension

$$r = rang(F)$$

und der Todd-Klasse

$$\tau_i = Todd(i^*(E))^{-1} = Todd(F)^{-1} = Todd(N_{Y/X})^{-1} \ .$$

§5 Riemann-Roch für reguläre Einbettungen

Sei X regulär und sei

$$i : Y \hookrightarrow X$$

eine reguläre abgeschlossene Einbettung der Kodimension r und Konormalengarbe $N^*_{Y/X}$.

Betrachte

Sei $X' = \mathbb{P}_Y(O_Y \oplus N^*_{Y/X})$ und sei $\tilde{X} = B_Y(X)$ sowie $\check{X} = \tilde{X} \cap X' = \mathbb{P}_Y(N^*_{Y/X})$. Dann gilt

<u>1.Lemma:</u> $\mathbb{P}^1_Y \cap \tilde{X} = \emptyset$

<u>2.Lemma:</u> $[f_*(O_X)] = [\tilde{f}_*(O_{\tilde{X}})] + [f'_*(O_{X'})] - [\check{f}_*(O_{\check{X}})]$.

Die Beweise folgen direkt aus den Definitionen!

Wir zeigen nun den Satz von (Adams)-Riemann-Roch.

Betrachte:

Sei y das direkte Bild in $B_Y(\mathbb{P}^1_X)$ des Pullbacks von x auf $\mathbb{P}^1_Y$! Dann gilt $i_K(x) = f^K(y)$ sowie $i'_K(x) = (f')^K(y)$. Es folgt

$$\begin{aligned}
&f_K \circ \psi^p \circ i_K(x)\\
&= f_K \circ \psi^p \circ f^K(y) = f_K(f^K \circ \psi^p(y)) = f_K(1) \cdot \psi^p(y)\\
&= (f'_K(1) + \tilde{f}_K(1) - \check{f}_K(1)) \cdot \psi^p(y) \quad \text{(Lemma 2)}\\
&= f'_K((f')^K \circ \psi^p(y)) + \tilde{f}_K(\tilde{f}^K \circ \psi^p(y)) - \check{f}_K(\check{f}^K \psi^p(y))\\
&= f'_K \circ \psi^p \circ (f')^K(y) + \tilde{f}_K \circ \psi^p \circ \tilde{f}^K(y) - \check{f}_K \circ \psi^p \circ \check{f}^K(y)\\
&= (f')_K \circ \psi^p \circ (f')^K(y)\\
&= f'_K \circ \psi^p \circ i'_K(x) \ .
\end{aligned}$$

Beachte dabei $\tilde{f}_K \circ \psi^p \circ \tilde{f}^K(y) = 0$ und analog für $\check{f}$ nach Lemma 1! Für die Abbildung $\pi : B_Y(\mathbb{P}^1_X) \to \mathbb{P}^1_X \to X$ gilt $\pi \circ f = id_X$. Es folgt

$$\begin{aligned}
&\psi^p \circ i_K(x) = (\pi_K \circ f_K) \circ \psi^p \circ i_K(x)\\
&= \pi_K \circ f'_K \circ \psi^p \circ i'_K(x) \quad \text{(obige Rechnung)}\\
&= \pi_K \circ f'_K \circ i'_K \circ (\theta_{i',p} \cdot \psi^p(x)) \quad \text{A.-R.-R. für i'}\\
&= i_K \circ (\theta_{i',p} \cdot \psi^p(x))
\end{aligned}$$

wegen $\pi \circ f' \circ i' = i$! Es folgt also der Satz von Adams-Riemann-Roch für $i : Y \hookrightarrow X$ aus dem trivialen Fall $i' : Y \hookrightarrow X' = \mathbb{P}_Y(O_Y \oplus F)$, welcher bereits in §4 behandelt wurde. Weiterhin folgt $\tau_i = \tau_{i'}$ und $r_i = r_{i'} = r$ und $\theta_{i',p} = \theta_{i,p}$. Insbesondere gilt

$$\tau_i = \tau'_i = Todd(N_{Y/X})^{-1} = Todd(F^*)^{-1} = Todd(N_{Y/X})^{-1} \ .$$

§6 Riemann-Roch für reguläre projektive Morphismen

Wir erinnern an den Begriff projektiver Morphismus (IV, §4). Dies ist ein Morphismus, welcher in eine abgeschlossene Immersion $Y \hookrightarrow \mathbb{P}_X(E)$ und die Projektion $\mathbb{P}_X(E) \to X$ faktorisiert. Besitzt X ein amples Linienbündel, dann findet man eine Auflösung $L^{n+1} \to E \to 0$ und damit eine abgeschlossene Immersion $\mathbb{P}_X(E) \hookrightarrow \mathbb{P}^n_X$. Wir können daher obdA E trivial annehmen in diesem Fall.

Ein projektiver Morphismus heißt regulär, wenn er in eine reguläre Immersion $Y \hookrightarrow \mathbb{P}^n_X$ und die Projektion $\mathbb{P}^n_X \to X$ faktorisiert.

Satz: Sei $f : Y \to X$ ein regulärer projektiver Morphismus zwischen (noetherschen) regulären endlichdimensionalen Schemata und besitze X (und damit auch Y) ein amples Linienbündel. Dann gilt der Satz von Riemann-Roch für f. Die zugehörige Toddklasse hat die Gestalt

$$\tau_f = Todd(T)/Todd(N)$$

für gewisse Vektorbündel T und N auf Y, welche dem Morphismus f zugeordnet sind.

Bemerkung: Sind Y und X zusammenhängend, dann berechnet sich die relative Dimension r des Satzes von Riemann-Roch durch $r = dim(X) - dim(Y)$.

Beweis: Wegen §5 genügt es den verbleibenden Fall $f : Y = \mathbb{P}^n_X \to X$ zu behandeln. Wir zeigen, daß dann der Satz von Riemann-Roch gilt mit der relativen Dimension

$$r = -n$$

und dem Toddelement

$$\tau_f = Todd(O_{\mathbb{P}^n_X}(1)^{n+1}) = (x/(1-exp(-x)))^{n+1} \quad , \quad x = c_1(O_{\mathbb{P}^n_X}(1)) \ .$$

Dies folgt ziemlich unmittelbar aus VII, §5. Dort wurde gezeigt

$$F^k K^\bullet(\mathbb{P}^n_X) = \bigoplus_{i=0}^{n} \Delta^i F^{k-i} \mathbb{P}^n_X \quad (\Delta^{n+1} = 0)$$

und somit

$$G^k(\mathbb{P}^n_X) \otimes \mathbb{Q} = \bigoplus_{i=0}^{n} x^i G^{k-i}(X) \otimes \mathbb{Q} \quad (x^{n+1} = 0) \ .$$

Anders formuliert

$$G^{\cdot}(\mathbb{P}^n_X)\otimes\mathbb{Q} \;\cong\; \mathbb{Q}[x]/x^{n+1}\otimes G^{\cdot}(X) \;\hookrightarrow\; \frac{1}{x^{n+1}}\mathbb{Q}[[x]]dx\otimes G^{\cdot}(X)$$

$$G^{\cdot}(X)\otimes\mathbb{Q} \qquad = \qquad G^{\cdot}(X)\otimes\mathbb{Q}\ .$$

Insbesondere verschiebt π_G den Grad um $-n$. Die Abbildung ist gegeben durch

$$\pi_G\big((P(x)\ mod\ x^{n+1})\otimes g)\big) = res_{x=0}\big((P(x)dx/x^{n+1})\big)\otimes g)\ .$$

Umformulierung von dem Resultat in VII, §5! (Da $\pi_G(x^\nu)\in G^{\nu-n}(X)\otimes\mathbb{Q}=0$ für $\nu = 0,1,..,n-1$ und da $x^{n+1}=x^{n+2}=...=0$.)

Um den Satz von Riemann-Roch

$$ch(\pi_K(G)) = \pi_G(\tau_\pi\cdot ch(G)))$$

zu zeigen, kann man sich auf ein Erzeugendensystem $G=O,O(-1),...,O(-n)$ des $K^\bullet(X)$-Moduls $K^\bullet(\mathbb{P}^n_X)$ beschränken. Die linke Seite haben wir bereits in III §6 berechnet. Sie ist Null für $i=-1,..,-n$ und 1 für $i=0$. Es ist zu zeigen, daß die rechte Seite

$$\pi_G\big(exp(x)^i(x/(1-exp(-x))^{n+1}\big)$$

den selben Wert besitzt. Mit obiger Beschreibung von π_G ist dies

$$res_{x=0}\frac{exp(x)^i}{(1-exp(-x))^{n+1}}dx$$

beziehungsweise bezüglich der Substitution $y=1-exp(-x)$ und $dy=exp(-x)dx$

$$res_{y=0}\frac{(1-y)^{-i-1}}{y^{n+1}}dy\ .$$

Dieses Residuum ist 0 oder 1, je nachdem ob $i=-1,...,-n$ oder $i=0$ gilt.

Bemerkung: Die Toddklasse τ_f kann natürlich aus der Faktorisierung des Morphismus in eine abgeschlossene reguläre Immersion $Y\to\mathbb{P}^n_X$ und eine kanonische Projektion $\mathbb{P}^n_X\to X$ explizit berechnet werden. Man kann mehr zeigen, nämlich daß die Toddklasse nur von f aber nicht von der Wahl der Faktorisierung abhängt!

Bemerkung: Im Fall $X=Spec(k)$ und $f=\pi\circ i: Y\hookrightarrow\mathbb{P}^n_k\to Spec(k)$ kann man mehr zeigen.

Erstens: Die Toddklasse τ_f hat in diesem Fall eine geometrische Deutung (Hirzebruch-Riemann-Roch)

$$\tau_f = Todd(T_Y)\ ,$$

wobei T_Y die sogenannte <u>Tangentialgarbe</u> von Y ist. Es gilt nämlich $[T_Y] = [i^*(O(1)^{n+1})] - 1 - [N_{Y/\mathbb{P}^n_k}]$ und $Todd(1) = 1$. Siehe Hartshorne Seite 172-176.

Zweitens: Die relative Dimension ist $r = -dim(Y)$.

Drittens: Die rechte Seite des Satzes von Riemann-Roch hat eine schnitttheoretische Deutung im Sinne von VII, §9. Die Abbildung

$$f_G : G^i(Y) \otimes \mathbb{Q} \to G^{i+r}(Spec(k)) \otimes \mathbb{Q}$$

ist nämlich offensichtlich trivial außer im Fall $i = -r = dim(Y)$. Beachte $G^{\cdot}(Spec(k) \otimes \mathbb{Q} = G^0(Spec(k)) \otimes \mathbb{Q} = \mathbb{Q}$! Die Abbildung $f_G = f_K$ auf $G^{dim(Y)}(Y) = F^{dim(Y)}K^\bullet(Y)$ hat aber eine geometrische Deutung. Siehe VII §10.

<u>Beispiel:</u> Sei Y regulär, projektiv, zusammenhängend von der Dimension 2 über $Spec(k)$, dann gilt für die Eulercharakteristik eines Linienbündels L auf Y

$$\sum_i (-1)^i dim_k H^i(Y, L) = f_G\Big((1 + \frac{1}{2}c_1(T_Y) + \frac{1}{12}(c_1^2(T_Y) + c_2(T_Y)) + ...)(1 + c_1(L) + \frac{1}{2}c_1(L)^2 + ...)\Big)$$

$$= \frac{1}{2}\langle c_1(L), c_1(L)\rangle + \frac{1}{2}\langle c_1(L), c_1(T_Y)\rangle + \frac{1}{12}\Big(c_1^2(T_Y) + c_2(T_Y)\Big) \ .$$

Beachte $c_2(L) = c_3(L) = ... = 0$ für Linienbündel und $c_3(T_Y) = c_4(T_Y) = ... = 0$ da $rang(T_Y) = dim(Y) = 2$!

<u>Beispiel</u>: Für Kurven Y ergibt sich für Linienbündel L analog

$$f_G\Big((1 + \frac{1}{2}c_1(T_Y) + ...)(1 + c_1(L) + ...)\Big) \ = \ \frac{1}{2}c_1(T_Y) + c_1(L) \ = \ 1 - g_Y + c_1(L) \ .$$