

Metabelsche lokale Klassenkörpertheorie

Diplomarbeit

von

Denis Vogel

Betreuer:

Prof. Dr. Kay Wingberg

Fakultät für Mathematik

Universität Heidelberg

April 2001

Einleitung

Lokale Klassenkörpertheorie ist die Theorie der abelschen Erweiterungen lokaler Körper wie etwa der Körper der p -adischen Zahlen \mathbb{Q}_p . Ursprünglich wurde die lokale Klassenkörpertheorie aus der globalen Klassenkörpertheorie abgeleitet, doch es stellte sich bald heraus, dass die lokale Theorie auch unabhängig von der globalen Theorie entwickelt werden kann. Ein sehr allgemeiner Zugang wird durch die Kohomologietheorie gegeben, wie etwa im Buch von Neukirch ([Neu2]). Wir geben an dieser Stelle einige Hauptergebnisse an. Dabei sei K ein lokaler Körper. Es bezeichne \hat{K}^\times die proendliche Komplettierung von K^\times , K^{ab} die maximal abelsche Erweiterung von K , sowie $N(L|K)$ die Gruppe der universellen Normen der Erweiterung $L|K$, vgl. Kap. I, §1.

Reziprozitätsgesetz: Ist $L|K$ galoissch, dann existiert eine exakte Sequenz

$$1 \longrightarrow N(L|K) \longrightarrow \hat{K}^\times \xrightarrow{(\cdot, L|K)} G(L|K)^{\text{ab}} \longrightarrow 1,$$

insbesondere gibt es einen Isomorphismus $\hat{K}^\times \cong G(K^{\text{ab}}|K)$. Die Abbildung $(\cdot, L|K)$ heisst Normrestsymbol.

Existenzsatz: Die Abbildung $L|K \mapsto N(L|K)$ ist eine ordnungsumkehrende Bijektion zwischen der Menge der abelschen Erweiterungen von K und der Menge der abgeschlossenen Untergruppen von \hat{K}^\times . Die Gruppe $N(L|K)$ ist genau dann von endlichem Index in \hat{K}^\times , wenn $L|K$ endlich ist, und dann gilt

$$[L : K] = (\hat{K}^\times : N(L|K)).$$

Funktorialität: Ist $K'|K$ endlich, dann haben wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \hat{K}'^\times & \longrightarrow & G(K'^{\text{ab}}|K') \\ N_{K'|K} \downarrow & & \downarrow \\ \hat{K}^\times & \longrightarrow & G(K^{\text{ab}}|K) . \end{array}$$

Es stellt sich natürlich sofort die Frage, wie man den Reziprozitätsisomorphismus explizit beschreiben kann. Eine solche Beschreibung wurde 1965 von Lubin und Tate unter Zuhilfenahme formaler Gruppen gegeben. Will man die lokale Klassenkörpertheorie auf nichtabelsche Erweiterungen verallgemeinern, so steht man vor dem Problem, dass die absolute Galoisgruppe eines Körpers nur bis auf innere Automorphismen eindeutig bestimmt ist. Eine Möglichkeit, dies in den Griff zu bekommen, stellt das Studium von Darstellungen der absoluten Galoisgruppe dar und wird im sogenannten Langlands-Programm formuliert. Die andere Möglichkeit besteht darin, sich zusätzlich zum lokalen Körper K weitere Daten zu fixieren. Es stellt sich

heraus, dass die Wahl einer Fortsetzung des Frobenius-Automorphismus von K auf einen algebraischen Abschluss von K , eine sogenannte Lubin-Tate-Spaltung, dafür geeignet ist. Eine endliche Galoiserweiterung lokaler Körper ist auflösbar, deswegen ist es sinnvoll, eine nichtabelsche lokale Klassenkörpertheorie induktiv nach dem Grad der Auflösbarkeit aufzubauen. Im Jahre 1996 wurde von Koch und de Shalit in [KdS] eine Klassenkörpertheorie metabelscher Erweiterungen, d.h. von Erweiterungen, bei denen die Kommutatorgruppe der Galoisgruppe abelsch ist, beschrieben. Wir geben die Hauptresultate im folgenden an. Dabei sei eine Lubin-Tate-Spaltung (K, φ) fixiert, und die Gruppen $M(L|K)$ bzw. $\mathfrak{G}(K, \varphi)$ stellen die metabelschen Analoga von $N(L|K)$ bzw. \hat{K}^\times dar, vgl. Kap. II.

Reziprozitätsgesetz: Ist $L|K$ metabelsch, dann existiert eine exakte Sequenz

$$1 \longrightarrow M(L|K) \longrightarrow \mathfrak{G}(K, \varphi) \longrightarrow G(L|K) \longrightarrow 1,$$

insbesondere gibt es einen Isomorphismus

$$\mathfrak{G}(K, \varphi) \cong G((K^{\text{ab}})^{\text{ab}}|K).$$

Ausserdem erhalten wir Isomorphismen

$$\mathfrak{G}_d(K, \varphi) \cong G((K_\infty K_d^{\text{nr}})^{\text{ab}}|K),$$

wobei K_∞ eine ausgezeichnete maximal reinverzweigte abelsche Erweiterung von K ist, K_d^{nr} die unverzweigte Erweiterung von K vom Grad d bezeichne und $\mathfrak{G}_d(K, \varphi)$ in (2.3.1) definiert wird.

Existenzsatz: Die Korrespondenz $L|K \mapsto M(L|K)$ ist eine ordnungsumkehrende Bijektion zwischen allen metabelschen Erweiterungen von K und den abgeschlossenen Untergruppen von $\mathfrak{G}(K, \varphi)$. Die Gruppe $M(L|K)$ ist von endlichem Index, falls $L|K$ endlich ist, und dann gilt

$$[L : K] = (\mathfrak{G}(K, \varphi) : M(L|K)).$$

Funktorialität: Ist $K'|K$ eine endliche galoissche, zu (K, φ) kompatible Erweiterung, dann kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{G}(K', \varphi') & \xrightarrow{\cong} & G((K'^{\text{ab}})^{\text{ab}}|K') \\ M_{K'|K} \downarrow & & \downarrow \text{res} \\ \mathfrak{G}(K, \varphi) & \xrightarrow{\cong} & G((K^{\text{ab}})^{\text{ab}}|K) \end{array} .$$

Zusammenhang zur abelschen Klassenkörpertheorie: Ist $L|K$ metabelsch und kompatibel mit (k, φ) , dann gilt

$$N(L|K) = \text{pr}_1(M(L|K)),$$

und die abelsche Erweiterung, welche Klassenkörper zu $N(L|K)$ ist, ist die maximal abelsche Erweiterung von K innerhalb von L .

Eine zentrale Rolle im Beweis dieser Resultate spielt eine Arbeit von Coleman ([Co]), in welcher ein Zusammenhang zwischen Potenzreihen über dem Restklassenkörper eines lokalen Körpers und normkompatiblen Folgen von Primelementen gewisser Körpererweiterungen desselben hergestellt wird. Die Konstruktion des Reziprozitätsisomorphismus geschieht mittels Lubin-Tate-Theorie, was zur Folge hat, dass man den Reziprozitätsisomorphismus explizit angeben kann.

Die Colemansche Theorie kann als Spezialfall der Theorie der Normenkörper von Wintenberger ([Wi]) angesehen werden, und mit diesen Mitteln gelang es Fesenko in [Fe], eine nichtabelsche Klassenkörpertheorie für reinverzweigte arithmetisch proendliche Erweiterungen anzugeben.

In dieser Arbeit sollen die Ergebnisse von Koch und de Shalit ausführlich und vollständig dargestellt werden. In Kapitel I stellen wir die dafür benötigten Hilfsmittel bereit. Dazu geben wir zunächst einige wichtige Ergebnisse aus der abelschen Klassenkörpertheorie an. Im zweiten Abschnitt beschreiben wir eine verallgemeinerte Lubin-Tate-Theorie im Sinne von [Iw]. Wir beschliessen das Kapitel mit einer ausführlichen Darstellung der Ergebnisse Colemans. In [KdS] wird ein wesentlich allgemeineres Ergebnis als das von Coleman gefundene ohne Beweis angegeben. Wir geben in dieser Arbeit einen Beweis, in dem Methoden aus [Iw],[Co] und [dS] miteinander kombiniert werden. Von entscheidender Bedeutung ist hierbei das Ersetzen von Kompaktheitsargumenten, wie sie etwa in [dS] verwendet werden, durch Vollständigkeitsargumente. Dadurch, dass wir uns im Gegensatz zu [Co] auf Potenzreihen beschränken, gelingt es uns, ausschliesslich mit der Produkttopologie zu arbeiten und kompliziertere Schlüsse aus der p -adischen Analysis zu umgehen. Aus diesem Grunde ist unsere Darstellung viel elementarer als die in [Co].

Im zweiten Kapitel gehen wir zunächst von einer endlichen galoisschen Erweiterung $L|K$ aus und studieren die Galoisgruppe $G(L^{\text{ab}}|K)$. Wir erhalten einen Isomorphismus

$$G(L^{\text{ab}}|K) \cong \mathcal{G}(L|K, \pi) := \{(\gamma, b) \mid \gamma \in G(L^{\text{nr}}|K), b \in U_{\tilde{L}}, b^{\varphi-1} = \pi^{\gamma-1}\},$$

wobei π ein Primelement aus der Kompletzierung \tilde{L} der maximal unverzweigten Erweiterung L^{nr} von L ist und φ der Frobeniusautomorphismus von L . Das zentrale Ergebnis des ersten Abschnittes ist die Kommutativität des Diagramms

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}(L'|K, \pi') & \xrightarrow{r_{L'|L}} & \mathcal{G}(L|K, \pi) \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ G(L'^{\text{ab}}|K) & \xrightarrow{\text{res}} & G(L^{\text{ab}}|K) \end{array}$$

für eine weitere endliche Galoiserweiterung $L'|K$ mit $L' \supseteq L$ sowie eine bestimmte Übergangsabbildung $r_{L'|L}$. Dieser Isomorphismus ist jedoch nicht kanonisch und hängt noch von der Wahl eines weiteren Parameters ab. Im zweiten Abschnitt befassen wir uns intensiv mit Lubin-Tate-Spaltungen. Wie bereits erwähnt, handelt es sich dabei um die Wahl einer Fortsetzung des Frobeniusautomorphismus von K nach K^{sep} . Wir zeigen, dass solch eine Wahl uns für jede endliche Galoiserweiterung $L|K$ einen der obigen Isomorphismen auszeichnet. Im Anschluss daran definieren wir uns im dritten Abschnitt unter Benutzung der Coleman-Theorie ein metabelsches Analogon zur Normabbildung aus der abelschen lokalen Klassenkörpertheorie. Damit haben wir alle Mittel beisammen, um den Hauptsatz der metabelschen Klassenkörpertheorie zu beweisen. Den metabelschen Reziprozitätsisomorphismus zwischen $\mathfrak{G}(K, \varphi)$ und $G((K^{\text{ab}})^{\text{ab}}|K)$ erhalten wir dabei durch Limesbildung aus den kanonischen Isomorphismen – wir haben ja eine Lubin-Tate-Spaltung fixiert – zwischen $G(L^{\text{ab}}|K)$ und $\mathcal{G}(L|K, \pi)$ für endliche Galoiserweiterungen $L|K$. Im Vergleich zu [KdS] gehen wir hier genauer auf topologische Details ein und geben auch einen Beweis der Homöomorphieeigenschaft der Reziprozitätsabbildung.

Ich danke Herrn Prof. Wingberg für das interessante Thema. Bei Otmar Venjakob möchte ich mich an dieser Stelle für zahlreiche Hinweise bedanken, und bei Markus Fenn sowie Gabor Wiese für das Korrekturlesen der Rohfassung.

Anmerkungen zur Methodik der Arbeit im Vergleich zu [KdS] und [Co]

Für diejenigen Leser, welche die Originalarbeiten von Koch und de Shalit studiert haben, geben wir im folgenden einige kurze Erläuterungen zu den Stellen, wo unsere Darstellung deutlich von der in [KdS] abweicht bzw. diese ergänzt.

Kapitel I besteht im wesentlichen aus Aussagen, die in [KdS] implizit verwendet, jedoch nicht bewiesen werden.

§2 verallgemeinert die klassische Lubin-Tate-Theorie und verwendet dafür analoge Techniken zu [Iw], 4.4, 5.1.

(1.3.1)-(1.3.9) funktionieren wie in [Iw], 5.2 und [dS], wir ersetzen die Argumente aus der Standard-Lubin-Tate-Theorie durch die entsprechenden Aussagen aus §2.

(1.3.10) orientiert sich an [Co], Lemma 2a. Dort wird die Konvergenz in einer anderen Topologie nachgewiesen, unser Beweis für die Produkttopologie verläuft analog. Coleman verwendet eine ähnliche Hilfsaussage wie wir; deren Beweis erscheint uns jedoch im Induktionsanfang als nicht schlüssig.

(1.3.13) geht anfangs wie in [dS], unser Existenzbeweis benutzt jedoch statt eines Kompaktheits- ein Vollständigkeitsargument, welches auf (1.3.10) beruht.

(1.3.16)-(1.3.18) ergeben sich wie in [Co], wenngleich das dort nur sehr kurz ausgeführt wird. Wir benutzen im Gegensatz zu Coleman nicht die Stetigkeit des Coleman-Operators, welche in [Co] durch p -adische Analysis bewiesen wird, sondern weisen die Verträglichkeit mit der Limesbildung direkt an unserer Folge nach.

(1.3.22) verallgemeinert Lemma 0.3 aus [KdS]

In Kapitel II gehen wir nun ähnlich vor wie [KdS].

(2.1.7) gibt eine andere Definition von Normkompatibilität als [KdS]. Dort wird gefordert, dass $\tilde{L}^i \subseteq \tilde{L}^j$ stets $\tilde{N}_{L^j|L^i} \omega'_j = \omega_i$ impliziert. Dann steht man jedoch im weiteren Verlauf vor dem Problem, ob $\tilde{L}^i \subseteq \tilde{L}^j$ auch $L^i \subseteq L^j$ impliziert.

(2.1.9) enthält im Gegensatz zu [KdS] noch eine weitere Voraussetzung, die Existenz von \mathcal{L} . Laut [KdS] existiert zu jeder galoisschen Erweiterung $L''|K$ mit $L \subseteq L' \subseteq L''$ ein ω'' , welches zu ω', ω kompatibel ist. Dies scheint jedoch nicht ganz klar zu sein. Betrachten wir dazu das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{L}''^{j(i)} & \xrightarrow{N} & \tilde{L}''^{j(i-1)} \\ N_i \downarrow & & N_{i-1} \downarrow \\ \tilde{L}^i & \xrightarrow{N} & \tilde{L}^{i-1} \end{array} ,$$

wobei die Abbildungen jeweils durch die nach (1.1.3) surjektiven Normabbildungen gegeben sind, und $j(i)$ gegeben sei durch

$$j(i) := \min\{j \in \mathbb{N} \mid L''^j \supseteq L^i\}.$$

Die einzig sinnvolle Definition von $\omega''_{j(i)}$ besteht nun darin, ein Element aus $N_i^{-1}(\omega'_i)$ auszuwählen, und das für alle $i \in \mathbb{N}$. Dann folgt aber nur $N\omega''_{j(i)} \in N_{i-1}^{-1}(\omega'_{i-1})$, nicht unbedingt $N\omega''_{j(i)} = \omega''_{j(i-1)}$. Normalerweise würde jetzt ein Kompaktheitsargument liefern, dass man die Folge der $\omega''_{j(i)}$ normkompatibel machen kann, aber dafür bräuchte man, dass der Kern von N_i kompakt ist.

(2.2.2) Wenn es hier gelingt, zu zeigen, dass $\tilde{M} \supseteq \tilde{L}$ stets $M \supseteq L$ impliziert, dann würde

sich einiges vereinfachen. Dann könnten wir nämlich in (2.1.7) wieder die Originaldefinition von [KdS] einsetzen, und die Rechnung im Beweis zu (2.2.9), welche zeigt, dass $\tilde{L}'_i = \tilde{L}^i$ gilt, würde implizieren, dass man in (2.2.10) auf die Voraussetzung der Kompatibilität mit (K, φ) verzichten kann.

(2.3.3) definiert ein anderes System von Umgebungen der Eins als [KdS], (0.4.3). Die in [KdS] angegebenen Untergruppen sind von unendlichem Index in $\mathfrak{G}(K, \varphi)$. Da sich später ergeben soll, dass $\mathfrak{G}(K, \varphi)$ mit dieser Topologie proendlich wird, funktioniert dieses System nicht.

(2.3.4) ist dementsprechend ein bisschen aufwendiger zu zeigen als bei dem Umgebungssystem aus [KdS]. Der Exponent von π ist jetzt so ermittelt, dass das gewünschte Ergebnis erzielt wird.

(2.3.10) verwendet eine gegenüber [KdS] veränderte Definition von u_n . Die in [KdS] angegebene Abbildung ist nicht wohldefiniert, sie müsste ausserdem von d abhängen.

(2.4.1) enthält im Gegensatz zu [KdS] auch einen Beweis der Homöomorphieeigenschaft von ι_d und damit letztlich des Existenzsatzes.

(2.4.5) verwendet die zusätzliche Voraussetzung, dass $K'|K$ galoissch ist. Der in [KdS] angegebene Beweis, S.101 unten, erscheint uns nicht schlüssig, weil es i.allg. keine Übergangsabbildung zwischen $\mathcal{G}(L'|K', \pi_{L'})$ und $\mathcal{G}(L|K, \pi_L)$ gibt. Unser Beweis benutzt dann auch andere Argumente, wie Auflösbarkeit, Limesbildung nur über ein kofinales System, etc.

(2.4.8)(c) entspricht (2.4.5), braucht also galoissch als Voraussetzung.

(2.4.8)(d) enthält die zusätzliche Voraussetzung, dass L kompatibel mit (K, φ) ist. Diese fehlt in [KdS].

Inhaltsverzeichnis

I. Grundlagen	1
§1. Lokale Klassenkörpertheorie	1
§2. Lubin-Tate-Theorie	3
§3. Coleman-Potenzreihen	8
II. Metabelsche lokale Klassenkörpertheorie	25
§1. Galoisgruppen spezieller Erweiterungen	25
§2. Lubin-Tate-Spaltungen	34
§3. Die Gruppe $\mathfrak{G}(K, \varphi)$ und die metabelsche Normabbildung	37
§4. Der Hauptsatz der metabelschen Klassenkörpertheorie	45
Literaturverzeichnis	55

I. Grundlagen

§1. Lokale Klassenkörpertheorie

In diesem Kapitel sei K stets ein lokaler Körper mit einem endlichen Restklassenkörper der Charakteristik p mit q Elementen. Wir fixieren einen separablen Abschluss K^{sep} und eine Kompletzierung Ω von K^{sep} . Ist L eine separable Erweiterung von K , so bezeichne L_d^{nr} die unverzweigte Erweiterung vom Grad d innerhalb von K^{sep} , sowie L^{nr} die maximal unverzweigte Erweiterung von L in K^{sep} . \tilde{L} sei die Kompletzierung von L^{nr} innerhalb von Ω . Die Galoisgruppe $G(L^{\text{nr}}|L)$ wird topologisch vom Frobeniusautomorphismus $\varphi_L \in G(L^{\text{nr}}|L)$ erzeugt. Die stetige Fortsetzung von φ_L auf \tilde{L} bezeichnen wir ebenfalls wieder mit φ_L . Ist $F|K$ eine endliche algebraische Erweiterung, dann bezeichne \hat{F}^\times die proendliche Kompletzierung von F^\times , d.h.

$$\hat{F}^\times := \varprojlim F^\times / N,$$

wobei N alle offenen Normalteiler von F^\times von endlichem Index durchläuft. Aufgrund von $F^\times \cong \mathbb{Z} \times U_F$ gilt dann $\hat{F}^\times \cong \hat{\mathbb{Z}} \times U_F$; hierbei bezeichne U_F die Einheitengruppe von F . Sei $L|K$ eine algebraische Erweiterung. Die Gruppe der universellen Normen von $L|K$ ist definiert als

$$N(L|K) := \bigcap_{L \supseteq F \supseteq K, [F:K] < \infty} N_{F|K} \hat{F}^\times.$$

Wir führen nun die Hauptergebnisse der lokalen Klassenkörpertheorie an.

(1.1.1) Satz. (a) (Reziprozitätsgesetz) *Ist $L|K$ galoissch, dann existiert eine exakte Sequenz*

$$1 \longrightarrow N(L|K) \longrightarrow \hat{K}^\times \xrightarrow{(\cdot, L|K)} G(L|K)^{\text{ab}} \longrightarrow 1,$$

*insbesondere gibt es einen Isomorphismus $\hat{K}^\times \cong G(K^{\text{ab}}|K)$. Die Abbildung $(\cdot, L|K)$ heisst **Normrestsymbol**.*

(b) (Existenzsatz) *Die Abbildung $L|K \mapsto N(L|K)$ ist eine ordnungsumkehrende Bijektion zwischen der Menge der abelschen Erweiterungen von K und der Menge der abgeschlossenen Untergruppen von \hat{K}^\times . Die Gruppe $N(L|K)$ ist genau dann von endlichem Index in \hat{K}^\times , wenn $L|K$ endlich ist, und dann gilt*

$$[L : K] = (\hat{K}^\times : N(L|K)).$$

(c) (Funktorialität) *Ist $K'|K$ endlich, dann existiert ein kommutatives Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} \hat{K}'^\times & \longrightarrow & G(K'^{\text{ab}}|K') \\ N_{K'|K} \downarrow & & \downarrow \\ \hat{K}^\times & \longrightarrow & G(K^{\text{ab}}|K) . \end{array}$$

Ein Beweis mit kohomologischen Mitteln befindet sich in [Neu2], ein konstruktiver Zugang unter Benutzung formaler Gruppen wird in [Iw] angegeben.

Für den weiteren Fortgang der Theorie benötigen wir einige technische Lemmata über lokale Körper, welche wir an diesem Punkt bereitstellen. Wir definieren die Abbildung

$$\varphi_K - 1 : U_{\tilde{K}} \rightarrow U_{\tilde{K}}, \quad x \mapsto x^{\varphi_K - 1} := \frac{\varphi_K(x)}{x}.$$

Dann gilt:

(1.1.2) Proposition. *Die Sequenz*

$$1 \longrightarrow U_K \longrightarrow U_{\tilde{K}} \xrightarrow{\varphi_K - 1} U_{\tilde{K}} \longrightarrow 1$$

ist exakt.

Ein Beweis dieser Aussage wird in [Iw], Lemma 3.11, gegeben. In [Se], Ch. V, befindet sich die folgende Aussage, die für uns später noch wichtig wird:

(1.1.3) Proposition. *Es sei $L|K$ eine endliche algebraische Erweiterung. Dann sind die Abbildungen*

$$N_{\tilde{L}|\tilde{K}} : \tilde{L}^\times \rightarrow \tilde{K}^\times, \quad N_{\tilde{L}|\tilde{K}} : U_{\tilde{L}} \rightarrow U_{\tilde{K}}$$

surjektiv.

Konvention. Wir werden für die Normabbildung $N_{\tilde{L}|\tilde{K}}$ auch $\tilde{N}_{L|K}$ schreiben.

(1.1.4) Lemma. *Sei $L|K$ eine endliche Galoiserweiterung mit Trägheitsgrad $f = f(L|K)$. Dann gelten:*

(a) *Für jedes $\alpha \in L$ ist*

$$N_{L|K}\alpha = \prod_{0 \leq i < f} \varphi_K^i(\tilde{N}_{L|K}(\alpha)).$$

Ist insbesondere $L|K$ reinverzweigt, dann gilt $\tilde{N}_{L|K}\alpha = N_{L|K}\alpha$.

(b) *Ist φ eine Fortsetzung von φ_K nach L^{nr} mit $\varphi_L = \varphi^f$, so existiert zu jedem $x \in U_{\tilde{L}}$ ein $y \in U_{\tilde{L}}$ mit*

$$\prod_{0 \leq i < f} \varphi^i(y) = x.$$

Beweis. Wir betrachten zunächst den Fall, dass die Erweiterung $L|K$ reinverzweigt ist. Aufgrund von $G(\tilde{L}|\tilde{K}) \cong G(L|K)$ folgt unmittelbar $\tilde{N}_{L|K}\alpha = N_{L|K}\alpha$ für jedes $\alpha \in L$. Wir wenden uns nun dem allgemeinen Fall zu. K_f^{nr} ist die maximal unverzweigte Teilerweiterung von L , nach obigem gilt also

$$\tilde{N}_{L|K}(\alpha) = \tilde{N}_{L|K_f^{\text{nr}}}(\alpha) = N_{L|K_f^{\text{nr}}}(\alpha)$$

für jedes $\alpha \in L$. Da $G(K_f|K)$ eine zyklische Gruppe der Ordnung f ist und vom Frobeniusautomorphismus erzeugt wird, folgt

$$N_{L|K}(\alpha) = N_{K_f^{\text{nr}}|K} N_{L|K_f^{\text{nr}}}(\alpha) = N_{K_f^{\text{nr}}|K} \tilde{N}_{L|K}(\alpha) = \prod_{0 \leq i < f} \varphi^i(\tilde{N}_{L|K}\alpha),$$

was genau die Behauptung von (a) ist. Sei nun $x \in U_{\bar{L}}$. Nach (1.1.2) existiert ein $u \in U_{\bar{L}}$ mit

$$\frac{\varphi(x)}{x} = \frac{\varphi_L(u)}{u} = \frac{\varphi^f(u)}{u}.$$

Wir erhalten

$$\frac{\varphi^f\left(\prod_{0 \leq i < f} \varphi^i(u)\right)}{\prod_{0 \leq i < f} \varphi^i(u)} = \prod_{0 \leq i < f} \varphi^i\left(\frac{\varphi^f(u)}{u}\right) = \prod_{0 \leq i < f} \varphi^i\left(\frac{\varphi(x)}{x}\right) = \frac{\varphi^f(x)}{x}.$$

Vermöge (1.1.2) ergibt sich

$$\prod_{0 \leq i < f} \varphi^i(u) = xa$$

mit einem $a \in U_L$. Wir berechnen

$$\varphi(a) = \varphi\left(\frac{\prod_{0 \leq i < f} \varphi^i(u)}{x}\right) = \frac{\varphi^f(u)}{\varphi(x)} \prod_{1 \leq i < f} \varphi^i(u) = \frac{u}{x} \prod_{1 \leq i < f} \varphi^i(u) = a.$$

Damit ist $a \in K_\varphi$, wobei K_φ den Fixkörper von φ in L bezeichne. Aus Gradgründen gilt $L = K_\varphi K_f^{\text{nr}}$, die Erweiterung $L|K_\varphi$ ist also unverzweigt vom Grad f . In unverzweigten Erweiterungen lokaler Körper ist die Normabbildung auf den Einheitengruppen jedoch surjektiv, vgl. [Neu2], Kap.II, Kor.(4.4), deswegen existiert ein $b \in U_L$ mit

$$a = N_{L|K_\varphi} b = \prod_{0 \leq i < f} \varphi^i(b).$$

Wir setzen $y := u/b$ und finden

$$\prod_{0 \leq i < f} \varphi^i(y) = \frac{\prod_{0 \leq i < f} \varphi^i(u)}{\prod_{0 \leq i < f} \varphi^i(b)} = \frac{xa}{a} = x,$$

was zu zeigen war. □

§2. Lubin-Tate-Theorie

Zunächst skizzieren wir kurz die von uns benötigte Theorie der formalen Gruppen. Eine ausführlichere Darstellung findet sich z.B. in [Iw], Ch.IV.

Sei R ein kommutativer Ring mit $1 \neq 0$.

(1.2.1) Definition. Eine Potenzreihe $F(X, Y) \in R[[X, Y]]$ heisst **formales Gruppengesetz** über R , falls folgende Aussagen gelten:

- (a) $F(X, Y) \equiv X + Y \pmod{\text{deg } 2}$,
- (b) $F(F(X, Y), Z) = F(X, F(Y, Z))$,
- (c) $F(X, Y) = F(Y, X)$.

Wir erhalten unmittelbar das einfache Lemma, vgl. [Iw], (4.1):

(1.2.2) Lemma. Sei F ein formales Gruppengesetz über R . Dann gelten:

(a) $F(X, 0) = X, F(0, Y) = Y$.

(b) Es existiert eine eindeutig bestimmte Potenzreihe $i_F(X) \in R[[X]]$ mit

$$F(X, i_F(X)) = 0.$$

Für ein formales Gruppengesetz F über R sowie $f, g \in M = XR[[X]]$ setzen wir

$$f \underset{F}{+} g := F(f(X), g(X)).$$

Dann ist $f \underset{F}{+} g \in M$, und M ist eine abelsche Gruppe bzgl. $\underset{F}{+}$, die wir mit M_F bezeichnen.

(1.2.3) Definition. Seien F, G formale Gruppen über R . Ein $f \in M$ heisst **Morphismus** von F nach G (wir schreiben dann auch $f : F \rightarrow G$), falls

$$f(F(X, Y)) = G(f(X), f(Y))$$

gilt. Im folgenden schreiben wir für solch eine Beziehung auch $f \circ F = G \circ f$. Die Menge der Endomorphismen von F wird mit $\text{End}(F)$ bezeichnet. Ist $f \in M$ invertierbar, so ist $f^{-1} : G \rightarrow F$ ebenfalls ein Morphismus. Wir nennen dann f einen **Isomorphismus**.

Ist $f \in M$ invertierbar und $F \in R[[X_1, \dots, X_m]]$ beliebig, dann setzen wir

$$F^f := f \circ F \circ f^{-1} = f(F(f^{-1}(X_1), \dots, f^{-1}(X_m))).$$

Ist ϕ ein Automorphismus von R , dann bezeichne F^ϕ diejenige Potenzreihe, die aus F durch koeffizientenweises Anwenden von ϕ entsteht.

Sei K ein lokaler Körper, π ein Primelement aus \tilde{K} . Wir übernehmen die Bezeichnungen aus §1 und definieren

$$\mathcal{F}_{\pi, \tilde{K}} := \{f \in \mathcal{O}_{\tilde{K}}[[X]] \mid f \equiv \pi X \pmod{X^2}, f \equiv X^q \pmod{\pi}\},$$

$$\mathcal{F}_{\pi, K} := \mathcal{F}_{\pi, \tilde{K}} \cap \mathcal{O}_K[[X]].$$

Im folgenden schreiben wir stets φ für den Frobeniusautomorphismus φ_K von K .

(1.2.4) Proposition. Zu jeder Potenzreihe $h \in \mathcal{F}_{\pi, \tilde{K}}$ existiert genau ein formales Gruppengesetz $F_h(X, Y)$ über $\mathcal{O}_{\tilde{K}}$ mit $h \circ F_h = F_h^\varphi \circ h$. Ist γ ein Automorphismus von $\mathcal{O}_{\tilde{K}}$ mit $\gamma \circ \varphi = \varphi \circ \gamma$, dann gilt $F_h^\gamma = F_{h\gamma}$.

Diese Aussage ist der Inhalt von [Iw], Prop. (4.2). Über die Endomorphismen von F_h gibt [Iw], Prop. (4.4), genauere Auskunft:

(1.2.5) Proposition. Sei $h \in \mathcal{F}_{\pi, \tilde{K}}$ und $a \in \mathcal{O}_K$. Dann existiert eine eindeutig bestimmte Potenzreihe $[a]_h \in \mathcal{O}_{\tilde{K}}[[X]]$ mit

$$[a]_h \equiv aX \pmod{X^2}, h \circ [a]_h = [a]_h^\varphi \circ h.$$

Die Abbildung

$$[\cdot]_h : \mathcal{O}_K \rightarrow \text{End}(F_h), a \mapsto [a]_h$$

ist ein injektiver Ringhomomorphismus. Ist γ ein Automorphismus von $\mathcal{O}_{\tilde{K}}$ mit $\gamma \circ \varphi = \varphi \circ \gamma$, dann gilt für jedes $a \in \mathcal{O}_K$:

$$[\gamma a]_{h^\gamma} = [a]_h^\gamma.$$

Insbesondere ist $[a]_{h^\varphi} = [a]_h^\varphi$. Sind $\pi \in \mathcal{O}_K, h \in \mathcal{F}_{\pi, K}$, dann ist $F_h \in \mathcal{O}_K[[X, Y]]$, und für jedes $a \in \mathcal{O}_K$ ist $[a]_h \in \mathcal{O}_K[[X]]$. Ausserdem gilt in diesem Fall: $h = [\pi]_h$.

Es seien π, π' Primelemente von \tilde{K} sowie $h \in \mathcal{F}_{\pi, \tilde{K}}, h' \in \mathcal{F}_{\pi', \tilde{K}}$. Nach (1.1.2) finden wir ein $u \in U_{\tilde{K}}$ mit $\pi'/\pi = u^{\varphi^{-1}}$. Es gilt die folgende Proposition, siehe [Iw], Prop. (4.5):

(1.2.6) Proposition. *Es gibt eine eindeutig bestimmte Potenzreihe $[u]_{h, h'} \in \mathcal{O}_{\tilde{K}}[[X]]$ mit*

$$[u]_{h, h'}(X) \equiv uX \pmod{X^2}, \quad h' \circ [u]_{h, h'} = [u]_{h, h'}^{\varphi_K} \circ h.$$

Die Potenzreihe $[u]_{h, h'}$ ist ein Isomorphismus zwischen F_h und $F_{h'}$, insbesondere ist

$$[u]_{h, h'} \circ F_h = F_{h'} \circ [u]_{h, h'}.$$

Ausserdem gilt für jedes $a \in \mathcal{O}_K$:

$$[a]_h \circ [u]_{h, h'} = [u]_{h, h'} \circ [a]_{h'}.$$

Ist $u \in U_K$, dann ist $[u]_{h, h} = [u]_h$. Sind $h \in \mathcal{F}_{\pi, \tilde{K}}, h' \in \mathcal{F}_{\pi', \tilde{K}}, h'' \in \mathcal{F}_{\pi'', \tilde{K}}, u, v \in U_{\tilde{K}}$ mit $u^{\varphi_K^{-1}} = \pi'/\pi, v^{\varphi_K^{-1}} = \pi''/\pi'$, dann folgt:

$$[v]_{h', h''} \circ [u]_{h, h'} = [vu]_{h, h''}.$$

Sei $\pi \in \tilde{K}$ ein Primelement, $h \in \mathcal{F}_\pi$. Wir setzen $W_h^0 := \{0\}$, und für $i \geq 1$

$$h^{(i)} := h^{\varphi^{i-1}} \circ \dots \circ h^\varphi \circ h,$$

$$W_h^i := \{\alpha \in \mathfrak{p}_\Omega \mid h^{(i)}(\alpha) = 0\}, \quad \widetilde{W}_h^i := W_h^i \setminus W_h^{i-1}.$$

Hierbei bezeichne \mathfrak{p}_Ω das Bewertungsideal von Ω . W_h^i wird zu einem \mathcal{O}_K -Modul bezüglich $(+, \cdot)_{F_h}$, wobei \cdot_{F_h} gegeben ist durch

$$\cdot_{F_h} : \mathcal{O}_K \times W_h^i \rightarrow W_h^i, \quad a \cdot_{F_h} \alpha := [a]_{h^{\varphi^{1-i}}}(\alpha)$$

Wir zitieren nun den Hauptsatz der klassischen Lubin-Tate-Theorie aus [Iw]:

(1.2.7) Satz. *Es seien $\pi \in K, h \in \mathcal{F}_{\pi, K}, \omega_i \in \widetilde{W}_h^i$. Dann gelten:*

(a) $K_{\pi, i} := K(\omega_i)$ ist eine nur von π und i abhängige reinverzweigte, endliche abelsche Erweiterung von K , und ω_i ist ein Primelement von $K_{\pi, i}|K$.

(b) \widetilde{W}_h^i ist ein vollständiges Konjugiertensystem von ω_i über K , und es gilt:

$$|W_h^i| = q^i, \quad |\widetilde{W}_h^i| = q^{i-1}(q-1).$$

(c) Ein vollständiges System von Konjugierten von ω_i über $K_{\pi, j}$, $1 \leq j \leq i$, ist gegeben durch

$$\{\omega_i +_{F_h} \gamma \mid \gamma \in W_h^{i-j}\}.$$

(d) $N_{K_{\pi,i}|K} K_{\pi,i}^\times = \langle \pi \rangle \times U_K^i$.

(e) *Es existiert ein Homomorphismus*

$$\delta_i : U_K \rightarrow G(K_{\pi,i}|K), \quad \delta_i(u)(\omega_i) = [u]_h(\omega_i).$$

Dieser induziert einen Isomorphismus

$$U_K/U_K^i \cong G(K_{\pi,i}|K),$$

und es gilt:

$$\delta_i(u) = (u^{-1}, K)|_{K_{\pi,i}}.$$

(f) *Sei $K_{\pi,\infty} := \cup_{i \in \mathbb{N}} K_{\pi,i}$. Dann ist*

$$K^{\text{ab}} = K_{\pi,\infty} K^{\text{nr}}.$$

(1.2.8) Definition. *Wir bezeichnen den Klassenkörper zu U_K^i mit K^i .*

Vermöge (1.2.7)(c) sehen wir sofort, dass wir für jedes Primelement $\pi \in K$ die Beziehung $K^i = K_{\pi,i} K^{\text{nr}}$ haben.

Wegen $K^{\text{nr}} \subseteq K^i \subseteq K^{\text{ab}}$ operiert $G(K^{\text{ab}}|K^{\text{nr}}) \cong U_K$ auf \widetilde{K}^i durch stetige Fortsetzung. Um (1.2.7) auf den Fall $\pi \in \widetilde{K}$ verallgemeinern zu können, benötigen wir das folgende Lemma.

(1.2.9) Lemma. *Es seien $\pi, \pi' \in \widetilde{K}$ Primelemente, $h \in \mathcal{F}_{\pi, \widetilde{K}}$, $h' \in \mathcal{F}_{\pi', \widetilde{K}}$, und $\theta : F_h \rightarrow F_{h'}$ sei ein Isomorphismus formaler Gruppengesetze. Dann induziert θ für jedes $i \geq 1$ einen \mathcal{O}_K -Modulisomorphismus*

$$\theta : W_h^i \rightarrow W_{h'}^i, \quad \alpha \mapsto \theta(\alpha)$$

sowie einen \mathcal{O}_K -Modulisomorphismus

$$\theta : \widetilde{W}_h^i \rightarrow \widetilde{W}_{h'}^i, \quad \alpha \mapsto \theta(\alpha).$$

Beweis. Zunächst zeigen wir, dass für $\alpha \in W_h^i$ tatsächlich $\theta(\alpha) \in W_{h'}^i$ ist. Wir erhalten

$$\begin{aligned} h'^{\varphi^{i-1}} \circ \dots \circ h'^{\varphi} \circ h' \circ \theta(\alpha) &= h'^{\varphi^{i-1}} \circ \dots \circ h'^{\varphi} \circ \theta^\varphi \circ h(\alpha) = h'^{\varphi^{i-1}} \circ \dots \circ (h' \circ \theta)^\varphi \circ h(\alpha) \\ &= h'^{\varphi^{i-1}} \circ \dots \circ h'^{\varphi^2} \circ \theta^{\varphi^2} \circ h^\varphi \circ h(\alpha) \\ &= \dots = \theta^{\varphi^i} \circ h^{\varphi^{i-1}} \circ \dots \circ h^\varphi \circ h(\alpha) = \theta^{\varphi^i}(0) = 0. \end{aligned}$$

Sind $a \in \mathcal{O}_K, \alpha \in W_h^i, \beta \in W_{h'}^i$, dann finden wir mittels (1.2.6)

$$\theta(a \underset{F_h}{\cdot} \alpha) = \theta([a]_h(\alpha)) = [a]_{h'}^\theta(\alpha) = a \underset{F_{h'}}{\cdot} \theta(\alpha)$$

sowie

$$\theta(\alpha + \beta) = \theta(F_h(\alpha, \beta)) = F_{h'}(\theta\alpha, \theta\beta) = \theta\alpha + \theta\beta, \quad \underset{F_{h'}}{\quad}$$

d.h. θ ist ein Homomorphismus von \mathcal{O}_K -Moduln. Setzen wir

$$\theta^{-1} : W_{h'}^i \rightarrow W_h^i, \quad \alpha \mapsto \theta^{-1}(\alpha),$$

dann erkennen wir die Wohldefiniertheit von θ^{-1} mit einer ähnlichen Rechnung wie oben, und offensichtlich ist θ^{-1} eine zu θ inverse Abbildung. Damit ist θ ein \mathcal{O}_K -Modulisomorphismus, und die zweite Behauptung folgt unmittelbar aus der eben bewiesenen Aussage. \square

Der nächste Satz stellt die Verallgemeinerung der klassischen Lubin-Tate-Theorie auf den Fall $\pi \in \widetilde{K}$ dar.

(1.2.10) Satz. Es seien $\pi \in \widetilde{K}$, $h \in \mathcal{F}_{\pi, K}$, $\omega_i \in \widetilde{W}_h^i$. Dann gelten:

(a) ω_i ist ein Erzeuger und Primelement der Erweiterung $\widetilde{K}^i | \widetilde{K}$.

(b) \widetilde{W}_h^i ist ein vollständiges Konjugiertensystem von ω_i über \widetilde{K} , und es gilt:

$$|W_h^i| = q^i, \quad |\widetilde{W}_h^i| = q^{i-1}(q-1).$$

(c) Ein vollständiges System von Konjugierten von ω_i über \widetilde{K}^j , $1 \leq j \leq i$, ist gegeben durch

$$\{\omega_i + \gamma \mid \gamma \in W_h^{i-j}\}.$$

(d) Die Operation von $G(K^{\text{ab}} | K^{\text{nr}})$ auf \widetilde{K}^i lässt sich explizit beschreiben durch

$$(u^{-1}, K)(\omega_i) = [u]_h(\omega_i).$$

Beweis. Es seien $\pi' \in K$ ein Primelement, $h' \in \mathcal{F}_{\pi', K}$ und $F_h, F_{h'}$ die zu h, h' gehörigen Lubin-Tate-Gruppengesetze. Sei $\theta : F_{h'} \rightarrow F_h$ ein Isomorphismus formaler Gruppengesetze. Dieser induziert eine Bijektion $\theta : \widetilde{W}_{h'}^i \rightarrow \widetilde{W}_h^i$. Sei $\alpha_i := \theta^{-1}(\omega_i)$. Dann gilt wegen der Vollständigkeit von $\widetilde{K}(\omega_i), \widetilde{K}(\alpha_i)$ und aufgrund von $\theta, \theta^{-1} \in \mathcal{O}_{\widetilde{K}}[[X]]$:

$$\alpha_i = \theta^{-1}(\omega_i) \in \widetilde{K}(\omega_i), \quad \omega_i = \theta(\alpha_i) \in \widetilde{K}(\alpha_i),$$

d.h. $\widetilde{K}(\alpha_i) = \widetilde{K}(\omega_i)$. Nach (1.2.7) ist $K^i = K(\alpha_i)K^{\text{nr}}$, somit also $\widetilde{K}^i = \widetilde{K}(\alpha_i) = \widetilde{K}(\omega_i)$. Unter Beachtung von (1.2.7) ergeben sich die Aussagen (a),(b),(c). Für Aussage (d) berechnen wir

$$[u]_h(\omega_i) = [u]_h(\theta\alpha_i) = ([u]_h \circ \theta)(\alpha_i) = (\theta \circ [u]_f)(\alpha) = \theta((u^{-1}, K)(\alpha_i)).$$

Wegen $\theta \in \mathcal{O}_{\widetilde{K}}[[X]]$ und $(u^{-1}, K)|_{\widetilde{K}} = \text{id}_{\widetilde{K}}$ erhalten wir

$$[u]_h(\omega_i) = (u^{-1}, K)(\theta\alpha_i) = (u^{-1}, K)(\omega_i).$$

□

(1.2.11) Definition. Sei $h \in \widetilde{K}, h \in \mathcal{F}_{\pi, \widetilde{K}}$. Wir definieren den **Tate-Modul** von F_h als

$$T_h := \{\omega = (\omega_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \omega_i \in W_{h\varphi^{1-i}}^i, \quad h\varphi^{1-i}(\omega_i) = \omega_{i-1}\}.$$

Die Menge der **Erzeuger des Tate-Moduls** T_h ist gegeben durch

$$\Omega_h := \{\omega = (\omega_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \omega_i \in \widetilde{W}_{h\varphi^{1-i}}^i, \quad h\varphi^{1-i}(\omega_i) = \omega_{i-1}\}.$$

Nach (1.2.10) operiert die Gruppe $G(K^{\text{ab}} | K^{\text{nr}}) \cong U_K$ auf Ω_h . Ist $\sigma = (u^{-1}, K), \omega = (\omega_i) \in \Omega_h$, dann erhalten wir mit (1.2.10):

$$\sigma(\omega) = ([u]_{h\varphi^{1-i}}(\omega_i))_{i \in \mathbb{N}}.$$

Für dieses Element schreiben wir auch kurz $[u](\omega)$.

(1.2.12) Lemma. *Es seien $\pi, \pi' \in \widetilde{K}$ Primelemente, $h \in \mathcal{F}_{\pi, \widetilde{K}}, h' \in \mathcal{F}_{\pi', \widetilde{K}}, \theta : F_h \rightarrow F_{h'}$ ein Isomorphismus formaler Gruppengesetze. Dann induziert θ einen U_K -Modulisomorphismus*

$$\theta : \Omega_h \rightarrow \Omega_{h'}, (\omega_i) \mapsto (\theta^{\varphi^{1-i}}(\omega_i)).$$

Beweis. Mit Hilfe von (1.2.9) erkennen wir, dass die $\theta^{\varphi^{1-i}} : \widetilde{W}_{h^{\varphi^{1-i}}}^i \rightarrow \widetilde{W}_{h'^{\varphi^{1-i}}}$ jeweils U_K -Modulisomorphismen sind. Wir müssen noch verifizieren, dass

$$h'^{\varphi^{1-i}} \circ \theta^{\varphi^{1-i}}(\omega_i) = \theta^{\varphi^{2-i}}(\omega_{i-1})$$

gilt. Dies erkennen wir an der Rechnung

$$h'^{\varphi^{1-i}} \circ \theta^{\varphi^{1-i}}(\omega_i) = (h' \circ \theta)^{\varphi^{1-i}}(\omega_i) = (\theta^{\varphi} \circ h)^{\varphi^{1-i}}(\omega_i) = \theta^{\varphi^{2-i}}(h^{\varphi^{1-i}}(\omega_i)) = \theta^{\varphi^{2-i}}(\omega_{i-1}).$$

□

§3. Coleman-Potenzreihen

Die Theorie der Coleman-Potenzreihen spielt eine zentrale Rolle in der metabelschen Klassenkörpertheorie. Aus diesem Grund geben wir an dieser Stelle eine ausführliche Darstellung dieser Theorie. Insbesondere werden wir eine Verallgemeinerung der Ergebnisse von Coleman unter Verwendung der verallgemeinerten Lubin-Tate-Theorie des letzten Abschnittes behandeln. Doch zunächst treffen wir einige Vorbereitungen. Wir erinnern daran, dass wir weiterhin eine Kompletierung Ω eines algebraischen Abschlusses des lokalen Körpers K fixiert haben, und die Betragsfunktion auf Ω wird mit $|\cdot|$ bezeichnet. Sie sei so normiert, dass $|\pi| = 1/q$ für ein Primelement aus K ist, wobei q die Elementanzahl des Restklassenkörpers von K bezeichne. Das Bewertungsideal von Ω bezeichnen wir mit \mathfrak{p}_Ω . Wir werden im folgenden mit den Ringen $\mathcal{O}_\Omega[[X]]$ und $\mathcal{O}_{\widetilde{K}}[[X]]$ arbeiten. Diese fassen wir als direkte Produkte abzählbar unendlich vieler Kopien von \mathcal{O}_Ω bzw. $\mathcal{O}_{\widetilde{K}}$ auf und statten sie mit der Produkttopologie aus. Eine Folge von Potenzreihen $f_n = \sum a_{n,i} X^i \in \mathcal{O}_\Omega[[X]]$ konvergiert also genau dann gegen $f = \sum b_i X^i \in \mathcal{O}_\Omega[[X]]$, wenn die Folgen $(a_{n,i})_n$ für jedes $i \in \mathbb{N}$ gegen b_i konvergieren.

(1.3.1) Lemma. *Sei $f \in \mathcal{O}_\Omega[[X]]$, $a \in \mathfrak{p}_\Omega$. Dann existiert ein $g \in \mathcal{O}_\Omega[[X]]$, so dass*

$$f = f(a) + (X - a)g$$

gilt.

Beweis. Sei $f = \sum_{j \geq 0} b_j X^j$. Wir definieren

$$c_j := \sum_{i \geq 0} b_{i+j+1} a^i, \quad g := \sum_{j \geq 0} c_j X^j.$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} f(a) + (X - a)g &= \sum_{j \geq 0} b_j a^j + \sum_{j \geq 0} c_j X^{j+1} - \sum_{j \geq 0} a c_j X^j = \left(\sum_{j \geq 0} b_j a^j - a c_0 \right) + \sum_{j \geq 1} (c_{j-1} - a c_j) X^j \\ &= b_0 + \sum_{j \geq 1} \left(\sum_{i \geq 0} b_{i+j} a^i - \sum_{i \geq 0} b_{i+j+1} a^{i+1} \right) X^j = b_0 + \sum_{j \geq 1} b_j X^j = f, \end{aligned}$$

was zu zeigen war. □

(1.3.2) Lemma. *Es sei $h = \prod_{i=1}^m (X - \alpha_i) \in \mathcal{O}_{\tilde{K}}[X]$ mit $\alpha_i \in \mathfrak{p}_\Omega$. Ist $g \in \mathcal{O}_{\tilde{K}}[X]$ mit $g(\alpha_i) = 0$ für alle $1 \leq i \leq m$, dann existiert ein $f \in \mathcal{O}_{\tilde{K}}[X]$ mit $g = hf$.*

Beweis. Die Erweiterung $L := \tilde{K}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ist eine endliche Galoiserweiterung von \tilde{K} . Aufgrund von $g(\alpha_i) = 0$ für alle $1 \leq i \leq m$ erhalten wir durch mehrfaches Anwenden von (1.3.1)

$$g = f \prod_{i=1}^m (X - \alpha_i) = fh$$

mit einem $f \in \mathcal{O}_\Omega[X]$. Am Beweis von (1.3.1) sehen wir, dass sogar $f \in \mathcal{O}_L[X]$ gilt. Für alle $\sigma \in G(L|\tilde{K})$ finden wir $hf = g = g^\sigma = hf^\sigma$ und somit $h = h^\sigma$. Dies impliziert $f \in \mathcal{O}_{\tilde{K}}[X]$. \square

Wir fixieren von jetzt an ein Primelement $\pi \in \tilde{K}$.

(1.3.3) Proposition. *Es seien $h \in \mathcal{F}_{\pi, \tilde{K}}$, $g \in \mathcal{O}_{\tilde{K}}[X]$. Gilt dann $g(\omega) = 0$ für alle $\omega \in W_h^1$, so existiert ein $f \in \mathcal{O}_{\tilde{K}}[X]$ mit $g = hf$.*

Beweis. Sei $\tilde{h} = \pi X + X^q$ sowie $\tilde{g} \in \mathcal{O}_{\tilde{K}}[X]$ mit $\tilde{g}(W_{\tilde{h}}^1) = 0$. Ist $\theta = [1]_{\tilde{h}, h}$ (vgl.(1.2.6)), so folgt nach (1.2.9)

$$(g \circ \theta)(W_{\tilde{h}}^1) = g(W_h^1) = 0.$$

Vermöge (1.3.2) existiert ein $\tilde{f} \in \mathcal{O}_{\tilde{K}}[X]$ mit $g \circ \theta = \tilde{h}\tilde{f}$. Wir erhalten

$$g = (\tilde{h} \circ \theta^{-1}) \cdot (\tilde{f} \circ \theta^{-1}) = (h \circ \theta^{-\varphi}) \cdot (\tilde{f} \circ \theta^{-1}).$$

Wegen $\theta^{-\varphi} \equiv X \pmod{X^2}$ ist g durch h teilbar, was genau die Behauptung ist. \square

(1.3.4) Proposition. *Es seien $h \in \mathcal{F}_{\pi, \tilde{K}}$, $f_1, f_2 \in \mathcal{O}_{\tilde{K}}[X]$, und es sei $f_1 = f_2 \circ h$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:*

$$f_1 \equiv 0 \pmod{\pi^n} \Leftrightarrow f_2 \equiv 0 \pmod{\pi^n},$$

insbesondere also $f_1 = 0 \Leftrightarrow f_2 = 0$.

Beweis. Wir zeigen die Aussage induktiv. Für $n = 0$ ist sie trivial. Sei also $n \geq 1$ und gelte $f_1 \equiv 0 \pmod{\pi^n}$. Dann ist $f_1 \equiv 0 \pmod{\pi^{n-1}}$, nach Induktionsannahme also auch $f_2 \equiv 0 \pmod{\pi^{n-1}}$. Schreiben wir $f_1 = \pi^{n-1}g_1, f_2 = \pi^{n-1}g_2$ mit $g_1, g_2 \in \mathcal{O}_{\tilde{K}}[X]$, so ergibt sich $g_1 = g_2 \circ h$. Wegen $h \equiv X^q \pmod{\pi}$ impliziert dies

$$g_2(X^q) \equiv g_2 \circ h = g_1 \equiv 0 \pmod{\pi},$$

d.h. $g_2 \equiv 0 \pmod{\pi}$. Wir finden deshalb $f_2 = \pi^{n-1}g_2 \equiv 0 \pmod{\pi^n}$. \square

(1.3.5) Proposition. *Sei $h \in \mathcal{F}_{\pi, \tilde{K}}$. Dann gibt es einen eindeutig bestimmten Operator*

$$\mathcal{N}_h : \mathcal{O}_{\tilde{K}}[X] \rightarrow \mathcal{O}_{\tilde{K}}[X],$$

so dass

$$\mathcal{N}_h g \circ h = \prod_{\omega \in W_h^1} g(X + \omega)$$

*für alle $g \in \mathcal{O}_{\tilde{K}}[X]$ gilt. Wir nennen \mathcal{N}_h auch den **Coleman-Normoperator**.*

Beweis. Sei $g \in \mathcal{O}_{\tilde{K}}[[X]]$. Wir setzen

$$g_0 := \prod_{\omega \in W_h^1} g(X + \omega).$$

Da nach (1.2.10) die $\omega \in W_h^1$ alle zueinander konjugiert sind über \tilde{K} , ist $g_0 \in \mathcal{O}_{\tilde{K}}[[X]]$. Wir erhalten für alle $\alpha \in W_h^1$:

$$g_0(X + \alpha) = \prod_{\omega \in W_h^1} g((X + \omega) + \alpha) = \prod_{\omega \in W_h^1} g(X + \omega) = g_0$$

und folgern daraus $(g_0 - g_0(0))(\alpha) = 0$ für alle $\alpha \in W_h^1$. Nach (1.3.3) gilt

$$g_0 - g_0(0) = hg_1$$

mit einem $g_1 \in \mathcal{O}_{\tilde{K}}[[X]]$ und deshalb $g_0 = g_0(0) + hg_1$. Wir berechnen

$$h(X + \alpha)g_1(X + \alpha) = (g_0 - g_0(0))(X + \alpha) = g_0 - g_0(0) = hg_1 = (h + h(\alpha))g_1 = h(X + \alpha)g_1.$$

Dies impliziert $g_1(X + \alpha) = g_1$. Wie eben finden wir ein $g_2 \in \mathcal{O}_{\tilde{K}}[[X]]$ mit

$$g_1 - g_1(0) = hg_2,$$

was $g_0 = g_0(0) + hg_1(0) + h^2g_2$ zur Folge hat. Nun können wir das obige Verfahren iterieren und finden eine Folge von Potenzreihen $g_n \in \mathcal{O}_{\tilde{K}}[[X]]$, so dass

$$g_0 - \sum_{n=0}^{\infty} g_n(0)h^n \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} h^n \mathcal{O}_{\tilde{K}}[[X]] = 0.$$

ist. Wir definieren

$$\mathcal{N}_h g := \sum_{n=0}^{\infty} g_n(0)X^n,$$

und vermöge dieser Definition gilt nun $\mathcal{N}_h g \circ h = g_0$. Die Eindeutigkeit von $\mathcal{N}_h g$ ist eine direkte Folgerung aus (1.3.4). \square

Wir fixieren von jetzt an eine Potenzreihe $h \in \mathcal{F}_{\pi, \tilde{K}}$. Bevor wir zu den Eigenschaften des Coleman-Normoperators kommen, stellen wir noch ein einfaches technisches Lemma bereit.

(1.3.6) Lemma. *Ist γ ein Automorphismus von \tilde{K} , dann gilt:*

$$\left(\prod_{\omega \in W_h^1} (X + \omega) \right)^\gamma = \prod_{\omega \in W_{h^\gamma}^1} (X + \omega).$$

Beweis. Sei γ ein Automorphismus von \tilde{K} . Ist $\tilde{\gamma}$ eine Fortsetzung von γ auf \tilde{K}^1 , dann gilt wegen (1.2.4) für alle $\omega \in W_h^1$:

$$(X + \omega)^\gamma = X + \tilde{\gamma}\omega.$$

Wegen $h^\gamma(\tilde{\gamma}\omega) = \tilde{\gamma}(h(\omega)) = \tilde{\gamma}(0) = 0$ ist $W_{h^\gamma}^1 = \tilde{\gamma}W_h^1$, was die Behauptung impliziert. \square

(1.3.7) Proposition. Sei $g \in \mathcal{O}_{\tilde{K}}[[X]]$. Der Coleman-Normoperator \mathcal{N}_h hat die folgenden Eigenschaften:

(a) Für alle $g_1, g_2 \in \mathcal{O}_{\tilde{K}}[[X]]$ gilt:

$$\mathcal{N}_h(g_1 g_2) = \mathcal{N}_h(g_1) \mathcal{N}_h(g_2), \quad \mathcal{N}_h(1) = 1,$$

\mathcal{N}_h ist also ein Monoidhomomorphismus.

(b) $\mathcal{N}_h g \equiv g^\varphi \pmod{\pi}$,

(c) $\mathcal{N}_{h^\varphi} = \varphi \circ \mathcal{N}_h \circ \varphi^{-1}$,

(d) $g \equiv 1 \pmod{\pi^i} \Rightarrow \mathcal{N}_h g \equiv 1 \pmod{\pi^{i+1}}$,

(e) $g \in X^i \mathcal{O}_{\tilde{K}}[[X]]^\times \Rightarrow \mathcal{N}_h g \in X^i \mathcal{O}_{\tilde{K}}[[X]]^\times$.

Beweis. Die Multiplikativität von \mathcal{N}_h ist eine unmittelbare Konsequenz der Eindeutigkeitsaussage von (1.3.5):

$$\begin{aligned} (\mathcal{N}_h g_1 \mathcal{N}_h g_2) \circ h &= (\mathcal{N}_h g_1 \circ h) \cdot (\mathcal{N}_h g_2 \circ h) = \prod_{\omega \in W_h^1} g_1(X + \omega) \cdot \prod_{\omega \in W_h^1} g_2(X + \omega) \\ &= \prod_{\omega \in W_h^1} g_1 g_2(X + \omega) = \mathcal{N}_h(g_1 g_2) \circ h. \end{aligned}$$

Um (b) zu beweisen, berechnen wir

$$\mathcal{N}_h(X^q) \equiv \mathcal{N}_h g \circ h = \prod_{\omega \in W_h^1} g(X + \omega) \equiv g^q \pmod{\mathfrak{p}_{\tilde{K}^1}},$$

wobei $\mathfrak{p}_{\tilde{K}^1}$ das Bewertungsideal von \tilde{K}^1 bezeichne. Aufgrund von $\mathcal{N}_h g \circ h \in \mathcal{O}_{\tilde{K}}[[X]]$ gilt dann sogar

$$\mathcal{N}_h(X^q) \equiv g^\varphi(X^q) \pmod{\pi}.$$

Aus (1.3.6) ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{h^\varphi} g \circ h &= \prod_{\omega \in W_{h^\varphi}^1} g(X + \omega) = \left(\prod_{\omega \in W_h^1} g^{\varphi^{-1}}(X + \omega) \right)^\varphi = (\mathcal{N}_h(g^{\varphi^{-1}}) \circ h)^\varphi \\ &= ((\varphi \circ \mathcal{N}_h \circ \varphi^{-1})(g)) \circ h^\varphi \end{aligned}$$

und aus der Eindeutigkeit des Coleman-Normoperators somit Aussage (c). Sei $g = 1 + \pi^i g_1$ mit $g_1 \in \mathcal{O}_{\tilde{K}}[[X]]$. Dann erhalten wir

$$\mathcal{N}_h g \circ h = \prod_{\omega \in W_h^1} (1 + \pi^i g_1)(X + \omega) = \prod_{\omega \in W_h^1} (1 + \pi^i g_1) \pmod{\mathfrak{p}_{\tilde{K}^1}},$$

d.h. $\mathcal{N}_h g \circ h \equiv 1 \pmod{\pi^i \mathfrak{p}_{\tilde{K}^1}}$, und mit $\mathcal{N}_h g \circ h \in \mathcal{O}_{\tilde{K}}[[X]]$ schliessen wir

$$\mathcal{N}_h g \circ h \equiv 1 \pmod{\pi^{i+1}}.$$

Setzen wir $\mathcal{N}_h g = 1 + g_2$ mit $g_2 \in \mathcal{O}_{\tilde{K}}[[X]]$, dann ergibt sich $(1 + g_2) \circ h \equiv 1 \pmod{\pi^{i+1}}$, d.h. $g_2 \circ h \equiv 0 \pmod{\pi^{i+1}}$. Vermöge (1.3.4) ist $g_2 \equiv 0 \pmod{\pi^{i+1}}$, und schliesslich

$$\mathcal{N}_h g \equiv 1 \pmod{\pi^{i+1}},$$

was Behauptung (d) liefert. Sei nun $g \in \mathcal{O}_{\tilde{K}}[[X]]^\times$. Dann ist auch $\mathcal{N}_h g \in \mathcal{O}_{\tilde{K}}[[X]]^\times$, denn $g(0) \not\equiv 0 \pmod{\pi}$ impliziert $\mathcal{N}_h g(0) \equiv g^\varphi(0) \not\equiv 0 \pmod{\pi}$. Weiterhin berechnen wir

$$\mathcal{N}_h X \circ h = \prod_{\omega \in W_h^1} (X + \omega) = X \prod_{\omega \in \widetilde{W}_h^1} (X + \omega).$$

Schreiben wir $\mathcal{N}_h X = g_1 X$ mit einem $g_1 \in \mathcal{O}_{\tilde{K}}[[X]]$, was wegen $(\mathcal{N}_h X)(0) = 0$ zulässig ist, dann finden wir

$$h \cdot (g_1 \circ h) = (X \circ h) \cdot (g_1 \circ h) = (g_1 X) \circ h = \mathcal{N}_h X = X \prod_{\omega \in \widetilde{W}_h^1} (X + \omega),$$

und somit

$$\frac{h}{X} \cdot (g_1 \circ h) = \prod_{\omega \in \widetilde{W}_h^1} (X + \omega).$$

Setzen wir in der obigen Gleichung $X = 0$ ein, dann liefert uns das nach (1.2.10)

$$\pi g_1(0) = \prod_{\omega \in \widetilde{W}_h^1} \omega = N_{\widetilde{K}^1 | \widetilde{K}} \gamma$$

für ein $\gamma \in \widetilde{W}_h^1$. Da $\widetilde{K}^1 | \widetilde{K}$ reinverzweigt ist, ist $N_{\widetilde{K}^1 | \widetilde{K}} \gamma$ Primelement von \widetilde{K} , was sofort $g(0) \in U_{\widetilde{K}}$ nach sich zieht und $\mathcal{N}_h X \in X \mathcal{O}_{\tilde{K}}[[X]]^\times$ zur Folge hat. Aus der Multiplikativität von \mathcal{N}_h folgt nun (e). \square

Wir erinnern noch einmal an die Definition

$$h^{(i)} := h^{\varphi^{i-1}} \circ \dots \circ h^\varphi \circ h$$

und setzen

$$\mathcal{N}_h^{(i)} := \mathcal{N}_{h^{\varphi^{i-1}}} \circ \dots \circ \mathcal{N}_{h^\varphi} \circ \mathcal{N}_h.$$

Wir nennen $\mathcal{N}_h^{(i)}$ auch den **Coleman-Normoperator vom Grad i** .

(1.3.8) Proposition. *Sei $i \in \mathbb{N}$, $g \in \mathcal{O}_{\tilde{K}}[[X]]$. Der Coleman-Normoperator vom Grad i hat die folgenden Eigenschaften:*

$$(a) \mathcal{N}_h^{(i)} g \circ h^{(i)} = \prod_{\omega \in W_h^i} g(X + \omega),$$

$$(b) \mathcal{N}_h^{(i)} g \equiv \varphi \circ \mathcal{N}_h^{(i-1)} g \pmod{\pi^i},$$

$$(c) \mathcal{N}_{h^\varphi}^{(i)} g = \varphi \circ \mathcal{N}_h^{(i)} \circ \varphi^{-1},$$

$$(d) \mathcal{N}_h^{(i)} g \equiv g^{\varphi^i} \pmod{\pi},$$

$$(e) g \equiv 1 \pmod{\pi^j} \Rightarrow \mathcal{N}_h^{(i)} g \equiv 1 \pmod{\pi^{i+j}},$$

(f) $g \in X^j \mathcal{O}_{\tilde{K}}[[X]]^\times \Rightarrow \mathcal{N}_h^{(i)} \in X^j \mathcal{O}_{\tilde{K}}[[X]]^\times$.

Beweis. Sei $g \in \mathcal{O}_{\tilde{K}}[[X]]^\times$. Aussage (a) ist im Fall $i = 1$ genau die definierende Gleichung des Coleman-Operators. Sei (a) bereits für $i - 1$ bewiesen. Dann folgt nach Definition und Induktionsannahme

$$(\mathcal{N}_h^{(i)} g) \circ h^{(i)} = \mathcal{N}_{h^\varphi}^{(i-1)} (\mathcal{N}_h g) \circ (h^\varphi)^{(i-1)} \circ h = \prod_{\beta \in W_{h^\varphi}^{i-1}} \mathcal{N}_h g(h + \beta).$$

Ist $\alpha \in W_h^i$, dann folgt $h(\alpha) \in W_{h^\varphi}^{(i-1)}$, schliesslich ist $h^\varphi \circ \dots \circ h^\varphi \circ h(\alpha) = 0$. Wir merken ausserdem an, dass für $\alpha_1 \in W_h^1$ gilt:

$$h(\alpha + \alpha_1) = F_h^\varphi(h(\alpha), h(\alpha_1)) = h(\alpha).$$

Diese Bemerkung liefert uns

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_h^{(i)} g \circ h^{(i)} &= \prod_{\alpha \in W_h^i \bmod W_h^1} \mathcal{N}_h g(h + h(\alpha)) = \prod_{\alpha \in W_h^i \bmod W_h^1} \mathcal{N}_h g \circ h(X + \alpha) \\ &= \prod_{\alpha \in W_h^i \bmod W_h^1} \prod_{\gamma \in W_h^1} g((X + \alpha) + \gamma) = \prod_{\omega \in W_h^i} g(X + \omega). \end{aligned}$$

Damit ist Aussage (a) bewiesen. Mittels (1.3.7) gilt $\mathcal{N}_h g \equiv g^\varphi \pmod{\pi}$. Sei für $i \geq 1$ bereits

$$\mathcal{N}_h^{(i)} g \equiv \varphi \circ \mathcal{N}_h^{(i-1)} g \pmod{\pi^i}$$

bewiesen. Dann folgern wir

$$\mathcal{N}_{h^\varphi} \circ \mathcal{N}_h^{(i)} g \equiv \mathcal{N}_{h^\varphi} \circ \varphi \circ \mathcal{N}_h^{(i-1)} g \pmod{\pi^{i+1}},$$

d.h.

$$\mathcal{N}_h^{(i+1)} g \equiv \varphi \circ \mathcal{N}_{h^{\varphi^{i-1}}} \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \mathcal{N}_h^{(i-1)} g \equiv \varphi \circ \mathcal{N}_h^{(i)} g \pmod{\pi^{i+1}}.$$

Dies ergibt Behauptung (b), und die anderen Aussagen folgen alle unmittelbar durch wiederholtes Anwenden von (1.3.7). \square

(1.3.9) Lemma. *Es seien (g_n) eine Folge von Potenzreihen aus $\mathcal{O}_\Omega[[X]]$, (a_i) eine Folge paarweise verschiedener Elemente aus \mathfrak{p}_Ω mit $\prod_{i=1}^\infty |a_i| = 0$. Es gelte:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(a_i) = 0$$

für alle $i \geq 1$. Dann folgt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n = 0.$$

Beweis. Wir beweisen zunächst die folgende Aussage: Ist $f = \sum c_i X^i \in \mathcal{O}_\Omega[[X]]$, $m \geq 1$, und gilt $|f(a_i)| < A_m$ für alle $1 \leq i \leq m$, wobei A_m gegeben ist durch

$$A_m := \prod_{i=2}^m |a_i| \prod_{1 \leq i < j \leq m} |a_i - a_j|,$$

so folgt

$$|f(0)| < \prod_{i=2}^m |a_i|.$$

Ist $m = 1$ und $|f(a_1)| < 1$, dann erhalten wir $|f(0)| = |c_0| \neq 1$, denn andernfalls ergibt sich wegen $|c_i a_1^i| < 1$ für alle $i \geq 1$ unmittelbar

$$|f(a_1)| = \sup_{i \in \mathbb{N}} |c_i a_1^i| = |c_0| = 1,$$

ein Widerspruch. Sei die Aussage für $m \geq 1$ bewiesen. Wir entwickeln f mittels (1.3.1) um den Punkt a_{m+1} und finden ein $g \in \mathcal{O}_\Omega[[X]]$ mit

$$f = f(a_{m+1}) + (X - a_{m+1})g$$

für alle $1 \leq i \leq m + 1$. Setzen wir in diese Gleichung a_i ein, dann erhalten wir mit der Induktionsvoraussetzung

$$|a_i - a_{m+1}| |g(a_i)| = |f(a_i) - f(a_{m+1})| \leq \max\{|f(a_i)|, |f(a_{m+1})|\} < A_{m+1}$$

und somit

$$|g(a_i)| < \frac{A_{m+1}}{|a_i - a_{m+1}|} < A_m$$

für alle $1 \leq i \leq m$. Nach Induktionsvoraussetzung ist jetzt

$$|g(0)| < \prod_{i=2}^m |a_i|.$$

Setzen wir in der obigen Gleichung $X = 0$, so finden wir

$$\begin{aligned} |f(0)| &= |f(a_{m+1}) - a_{m+1}g(0)| \leq \max\{|f(a_{m+1})|, |a_{m+1}| |g(0)|\} \\ &< \max\{A_{m+1}, \prod_{i=2}^{m+1} |a_i|\} = \prod_{i=2}^{m+1} |a_i|. \end{aligned}$$

Wir kehren nun zur eigentlichen Ausgangssituation des Lemmas zurück. Sei $g_n = \sum_{i \geq 0} g_{n,i} X^i$ sowie $\epsilon > 0$. Wir bestimmen ein $M \in \mathbb{N}$, so dass

$$\prod_{i=2}^M |a_i| < \epsilon$$

gilt. Dazu finden wir ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $|g_n(a_i)| < A_M$ für alle $n \geq N$, $1 \leq i \leq M$ erfüllt ist. Aus den obigen Betrachtungen folgt jetzt

$$|g_{n,0}| = |g_n(0)| < \epsilon$$

für alle $n \geq N$, d.h. $(g_{n,0})$ ist eine Nullfolge. Setzen wir $h_n := \sum_{i \geq 0} g_{n,i+1} X^i$, dann folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h_n(a_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g_n(a_i) - g_n(0)}{a_i} = 0.$$

Mit derselben Argumentation wie eben erhalten wir, dass die $(g_{n,1})$ eine Nullfolge bilden. Induktiv schliessen wir, dass jede der Folgen $(g_{n,i})$ eine Nullfolge ist, d.h. $g_n \rightarrow 0$. \square

(1.3.10) Korollar. *Es sei (g_n) eine Folge von Potenzreihen aus $\mathcal{O}_{\widetilde{K}}[[X]]$. Ausserdem sei (ω_i) eine Folge von Primelementen $\omega_i \in \widetilde{K}^i$ mit*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(\omega_i) = 0$$

für alle $i \geq 1$. Dann gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n = 0.$$

Beweis. Gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(\omega_i) = 0$, dann folgt für alle Konjugierten $\omega_{i,j}$, $1 \leq j \leq q^{i-1}(q-1)$, von ω_i über \widetilde{K} ebenfalls

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(\omega_{i,j}) = 0.$$

Sei (a_i) die Folge

$$\omega_{1,1}, \dots, \omega_{1,q-1}, \omega_{2,1}, \dots, \omega_{2,q(q-1)}, \omega_{3,1}, \dots$$

Ist $\epsilon > 0$, dann existiert ein $r \in \mathbb{N}$ mit $1/q^r < \epsilon$. Ausserdem haben wir

$$\left| \prod_{j=1}^{q^{i-1}(q-1)} \omega_{i,j} \right| = \left| \widetilde{N}_{K^i|K} \omega_i \right| = \frac{1}{q},$$

so dass wir

$$\left| \prod_{i=1}^r \prod_{j=1}^{q^{i-1}(q-1)} \omega_{i,j} \right| = \frac{1}{q^r} < \epsilon$$

erhalten. Damit ist $\prod_{i=1}^{\infty} |a_i| = 0$, und mit (1.3.9) folgt die Behauptung. \square

(1.3.11) Korollar. *Es seien $f, g \in \mathcal{O}_{\widetilde{K}}[[X]]$, $\omega = (\omega_i)$ eine Folge von Primelementen $\omega_i \in \widetilde{K}^i$ mit $f(\omega_i) = g(\omega_i)$ für alle $i \geq 1$. Dann folgt $f = g$.*

Beweis. Offenbar ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f - g)(\omega_i) = 0$$

für alle $i \geq 1$, damit nach obigem $f = g$. \square

(1.3.12) Proposition. *Sei (f_n) eine Folge von Potenzreihen aus $\mathcal{O}_{\Omega}[[X]]$, $f \in \mathcal{O}_{\Omega}[[X]]$ mit $f_n \rightarrow f$. Sei $a \in \mathfrak{p}_{\Omega}$. Dann folgt:*

$$f_n(a) \rightarrow f(a).$$

Beweis. Wir können ohne Einschränkung $f = 0$ annehmen. Sei $\epsilon > 0$. Dann existiert ein $M \in \mathbb{N}$, so dass $|a|^m < \epsilon$ für alle $m > M$ gilt. Seien die f_n gegeben durch $f_n = \sum c_{n,i} X^i$. Nach Voraussetzung sind für jedes $i \in \mathbb{N}$ die $(c_{n,i})$ Nullfolgen, es existiert also ein $s \in \mathbb{N}$, so dass $|c_{s,i}| < \epsilon$ für alle $1 \leq i < M$ und alle $r > s$ gilt. Für alle $r > s$ folgt schliesslich

$$|f_r(a)| \leq \sup |c_{r,i}| |a|^i \leq \epsilon,$$

und somit $f_n(a) \rightarrow 0$. \square

Wir wenden uns nun einem der Hauptergebnisse der Coleman-Theorie zu. Die nächste Proposition verschafft uns eine Abbildung zwischen $\varprojlim \mathcal{O}_{\widetilde{K}^n}$, wobei der projektive Limes bezüglich der Normabbildungen genommen wird, und $\mathcal{O}_{\widetilde{K}}[[X]]$. Zuvor definieren wir noch eine Abbildung

$$v : \varprojlim \mathcal{O}_{\widetilde{K}^n} \rightarrow \mathbb{N}, (\beta_n) \mapsto v_{\widetilde{K}}(N_{\widetilde{K}^1|\widetilde{K}} \beta_1).$$

(1.3.13) Proposition. *Es seien $\beta = (\beta_n) \in \varprojlim \mathcal{O}_{\widetilde{K}^n}, \omega \in \Omega_h$. Dann existiert ein eindeutig bestimmtes $g_\beta \in X^{v(\beta)} \mathcal{O}_{\widetilde{K}}[[X]]^\times$, so dass für alle $n \geq 1$ gilt:*

$$g_\beta^{\varphi^{1-n}}(\omega_n) = \beta_n.$$

Beweis. Aus (1.3.11) folgt direkt die Eindeutigkeitsaussage. Sei nun $m \geq 1$ fixiert. Da ω_m ein Primelement der reinverzweigten Erweiterung $\widetilde{K}^m | \widetilde{K}$ ist, folgt $\mathcal{O}_{\widetilde{K}^m} = \mathcal{O}_{\widetilde{K}}[\omega_m]$, es existiert also ein $q_m \in X^{v(\beta)} \mathcal{O}_{\widetilde{K}}[[X]]^\times$, so dass $q_m(\omega_m) = \beta_m$ gilt. Hierbei haben wir benutzt, dass die Reinverzweigkeit der Erweiterungen $\widetilde{K}^m | \widetilde{K}$ unmittelbar $v_{\widetilde{K}^m}(\beta_m) = v(\beta)$ impliziert. Wir erhalten für alle $1 \leq n \leq m$ unter Benutzung von (1.3.8):

$$(\mathcal{N}_{h\varphi^{1-m}}^{(m-n)} q_m)(\omega_n) = (\mathcal{N}_{h\varphi^{1-m}}^{(m-n)} q_m)(h\varphi^{1-m})^{(m-n)}(\omega_m) = \prod_{\alpha \in W_{h\varphi^{1-m}}^{(m-n)}} q_m(\omega_m + \alpha).$$

Die $\omega_m + \alpha$, $\alpha \in W_{h\varphi^{1-m}}^{m-n}$ sind nach (1.2.10) genau die Konjugierten von $\omega_m \in \widetilde{W}_{h\varphi^{1-m}}^m$ über \widetilde{K}^n , so dass folgt:

$$(\mathcal{N}_{h\varphi^{1-m}}^{(m-n)} q_m)(\omega_n) = N_{\widetilde{K}^m | \widetilde{K}^n} \beta_m = \beta_n.$$

Wir behaupten, dass die Gleichung

$$\frac{\mathcal{N}_{h\varphi^{1-m}}^{(m)} q_m}{(\mathcal{N}_{h\varphi^{1-m}}^{(m-n)} q_m)^{\varphi^{n-1}}} = \mathcal{N}_{h\varphi^{n-m}}^{(m-n)} \left(\frac{\mathcal{N}_{h\varphi^{1-m}}^{(n-1)} q_m}{q_m^{\varphi^{n-1}}} \right)$$

gilt. Dazu verifizieren wir mittels (1.3.8):

$$(\mathcal{N}_{h\varphi^{1-m}}^{(m-n)} q_m)^{\varphi^{n-1}} = \varphi^{n-1} \circ \mathcal{N}_{h\varphi^{1-m}}^{(m-n)} \circ \varphi^{1-n}(q_m^{\varphi^{n-1}}) = \mathcal{N}_{h\varphi^{n-m}}^{(m-n)}(q_m^{\varphi^{n-1}})$$

sowie

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{h\varphi^{n-m}}^{(m-n)}(\mathcal{N}_{h\varphi^{1-m}}^{(n-1)} q_m) &= \mathcal{N}_{(h\varphi^{n-m})\varphi^{m-n-1}} \circ \dots \circ \mathcal{N}_{h\varphi^{n-m}} \circ \mathcal{N}_{(h\varphi^{1-m})\varphi^{n-2}} \circ \dots \circ \mathcal{N}_{h\varphi^{1-m}} q_m \\ &= \mathcal{N}_{h\varphi^{-1}} \circ \dots \circ \mathcal{N}_{h\varphi^{1-m}} q_m = \mathcal{N}_{h\varphi^{1-m}}^{(m)} q_m, \end{aligned}$$

was unsere Behauptung liefert. Vermöge (1.3.8) ist

$$\frac{\mathcal{N}_{h\varphi^{1-m}}^{(n-1)} q_m}{q_m^{\varphi^{n-1}}} \equiv \frac{q_m^{\varphi^{n-1}}}{q_m^{\varphi^{n-1}}} = 1 \pmod{\pi}.$$

Das impliziert wiederum in Verbindung mit (1.3.8)

$$\frac{\mathcal{N}_{h\varphi^{1-m}}^{(m)} q_m}{(\mathcal{N}_{h\varphi^{1-m}}^{(m-n)} q_m)^{\varphi^{n-1}}} \equiv 1 \pmod{\pi^{m-n+1}}.$$

Wir setzen $g_m := \mathcal{N}_{h\varphi^{1-m}}^{(m)} q_m$. Aus obigem ergibt sich für $1 \leq n \leq m$:

$$\frac{g_m^{\varphi^{1-n}}(\omega_n)}{\beta_n} = \left(\frac{\mathcal{N}_{h\varphi^{1-m}}^{(m)} q_m}{(\mathcal{N}_{h\varphi^{1-m}}^{(m-n)} q_m)^{\varphi^{n-1}}} \right)^{\varphi^{1-n}} (\omega_n) \equiv 1 \pmod{\pi^{m-n+1}}.$$

Wir fixieren nun ein $n \leq m$ sowie eine Fortsetzung von φ nach K^{ab} (und damit nach $\widetilde{K^{\text{ab}}}$) und setzen

$$f_m := g_m - g_{m-1}.$$

Mittels der gerade ausgeführten Rechnung erhalten wir

$$f_m(\varphi^{n-1}(\omega_n)) = \varphi^{n-1}(g_m^{\varphi^{1-n}}(\omega_n) - g_{m-1}^{\varphi^{1-n}}(\omega_n)) \equiv \varphi^{n-1}(\beta_n - \beta_n) = 0 \pmod{\pi^{m-n}}$$

für alle $m \geq n$ und somit

$$\lim_{m \rightarrow \infty} f_m(\varphi^{1-n}(\omega_n)) = 0.$$

Vermöge (1.3.10) gilt $\varinjlim_{m \rightarrow \infty} f_m = 0$. Hierbei beachten wir, dass $\varphi^{1-n}(\omega_n)$ ein Primelement der Erweiterung $\widetilde{K^n} | \widetilde{K}$ ist. Ist g_m gegeben durch $\sum c_{m,i} X^i$, dann bilden also die $(c_{m,i})_m$ Cauchyfolgen, sind somit konvergent. Damit konvergiert die Folge der (g_m) , und wir können $g := \lim_{m \rightarrow \infty} g_m$ definieren. Dann folgt aus (1.3.12)

$$\frac{g_\beta^{\varphi^{1-n}}(\omega_n)}{\beta_n} = \frac{(\lim_{m \rightarrow \infty} g_m)^{\varphi^{1-n}}(\omega_n)}{\beta_n} = \frac{(\lim_{m \rightarrow \infty} g_m^{\varphi^{1-n}})(\omega_n)}{\beta_n} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{(g_m^{\varphi^{1-n}}(\omega_n))}{\beta_n} = 1.$$

Wegen $g_m \in X^{v(\beta)} \mathcal{O}_{\widetilde{K}}[[X]]^\times$ ist mittels (1.3.8) auch g_m und somit $g \in X^{v(\beta)} \mathcal{O}_{\widetilde{K}}[[X]]^\times$. \square

Auf $\varinjlim \mathcal{O}_{\widetilde{K^n}}$ haben wir in natürlicher Weise eine Monoidstruktur via komponentenweiser Multiplikation. Wir erhalten

(1.3.14) Korollar. *Unter den Voraussetzungen der letzten Proposition gelten:*

$$(a) \quad g_{\beta\beta'} = g_\beta g_{\beta'}, \quad g_1 = 1,$$

$$(b) \quad \mathcal{N}_h g_\beta = g_\beta^\varphi.$$

Beweis. (a) folgt direkt aus der Eindeutigkeitsaussage von (1.3.13), denn für alle $n \geq 1$ gilt:

$$g_{\beta\beta'}^{\varphi^{1-n}}(\omega_n) = \beta\beta' = g_\beta^{\varphi^{1-n}}(\omega_n) g_{\beta'}^{\varphi^{1-n}}(\omega_n) = (g_\beta^{\varphi^{1-n}} g_{\beta'}^{\varphi^{1-n}})(\omega_n),$$

und nach (1.3.11) somit $g_{\beta\beta'} = g_\beta g_{\beta'}$. Um Aussage (b) zu beweisen, berechnen wir unter Verwendung von (1.2.10) für alle $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} \beta_{n-1} &= N_{\widetilde{K^n} | \widetilde{K^{n-1}}} \beta_n = \prod_{\alpha \in W_{h\varphi^{1-n}}^1} g_\beta^{\varphi^{1-n}}(\omega_n + \alpha) = \mathcal{N}_{h\varphi^{1-n}}(g_\beta^{\varphi^{1-n}}) \circ h^{\varphi^{1-n}}(\omega_n) \\ &= (\mathcal{N}_h g_\beta)^{\varphi^{1-n}} \circ h^{\varphi^{1-n}}(\omega_n) = (\mathcal{N}_h g_\beta)^{\varphi^{1-n}}(\omega_{n-1}). \end{aligned}$$

Andererseits ist $\beta_{n-1} = g_\beta^{\varphi^{2-n}}(\omega_{n-1})$. Die obigen Rechnungen implizieren in Verbindung mit (1.3.11), dass $g_\beta^\varphi = \mathcal{N}_h g_\beta$ gilt. \square

Wir setzen

$$\mathcal{C}(\widetilde{K}, h) := \{g \in \mathcal{O}_{\widetilde{K}}[[X]] \mid \mathcal{N}_h g = g^\varphi\}.$$

Die Elemente aus $\mathcal{C}(\widetilde{K}, h)$ nennen wir auch **Coleman-Potenzreihen**. Die Multiplikation auf $\mathcal{O}_{\widetilde{K}}[[X]]$ induziert eine Monoidstruktur auf $\mathcal{C}(\widetilde{K}, h)$, denn sind $g_1, g_2 \in \mathcal{C}(\widetilde{K}, h)$, dann folgt aus

der Multiplikatilität des Coleman-Normoperators, dass auch $g_1 g_2 \in \mathcal{C}(\tilde{K}, h)$ ist. Die Aussage des letzten Korollars ist also genau die, dass die Abbildung

$$\psi : \varprojlim \mathcal{O}_{\tilde{K}^i} \rightarrow \mathcal{C}(\tilde{K}, h), \quad \beta \mapsto g_\beta,$$

ein Monoidhomomorphismus ist. Wir werden gleich zeigen, dass ψ sogar ein Monoidisomorphismus ist.

(1.3.15) Proposition. *Sind $g \in \mathcal{C}(\tilde{K}, h)$, $\omega \in \Omega_h$, dann ist $\beta = (\beta_n) := (g^{\varphi^{1-n}}(\omega_n))$ eine normkompatible Folge in den $\mathcal{O}_{\tilde{K}^i}$, d.h. $\beta \in \varprojlim \mathcal{O}_{\tilde{K}^i}$.*

Beweis. Wir verifizieren die Normkompatibilität der β_i mit exakt derselben Rechnung wie im Beweis zu (1.3.14):

$$N_{\tilde{K}^n | \tilde{K}^{n-1}} \widetilde{\beta_n} = N_{\tilde{K}^n | \tilde{K}^{n-1}} g^{\varphi^{1-n}}(\omega_n) = (\mathcal{N}_h g)^{\varphi^{1-n}}(\omega_{n-1}) = g^{\varphi^{2-n}}(\omega_{n-1}) = \beta_{n-1},$$

womit die Behauptung gezeigt ist. \square

Die Abbildung $\mathcal{C}(\tilde{K}, h) \rightarrow \varprojlim \mathcal{O}_{\tilde{K}^i}, g \mapsto (g^{\varphi^{1-n}}(\omega_n))$ ist damit offenbar ein zu ψ inverser Monoidhomomorphismus. Wir definieren

$$\mathcal{C}^0(\tilde{K}, h) := \mathcal{C}(\tilde{K}, h) \cap \mathcal{O}_{\tilde{K}}[[X]]^\times.$$

Aus der Multiplikatilität des Coleman-Operators folgt unmittelbar, dass $\mathcal{C}^0(\tilde{K}, h)$ eine Untergruppe von $\mathcal{O}_{\tilde{K}}[[X]]^\times$ ist. Wir wollen im folgenden zeigen, dass die Reduktionsabbildung modulo π , welche wir mit ϱ_K bezeichnen, einen Isomorphismus

$$\varrho_K : \mathcal{C}^0(\tilde{K}, h) \rightarrow \overline{\mathbb{F}_q}[[X]]^\times, g \mapsto g^{\rho_K}$$

induziert.

(1.3.16) Proposition. *Die Abbildung ϱ_K ist injektiv.*

Beweis. Sei $g \in \mathcal{C}(\tilde{K}, h)$ mit $\varrho_K(g) = 1$. Offenbar ist $g \equiv 1 \pmod{\pi}$. Sei $g \equiv 1 \pmod{\pi^i}$ bereits für $i \geq 1$ bewiesen. Dann folgt $g^\varphi = \mathcal{N}_h g \equiv 1 \pmod{\pi^{i+1}}$, und somit $g \equiv 1 \pmod{\pi^{i+1}}$. \square

Die Surjektivität von ϱ_K ist etwas komplizierter zu zeigen. Dazu betrachten wir zu $g \in \mathcal{O}_{\tilde{K}}[[X]]$ die Folge der $\varphi^{-i}(\mathcal{N}_h^{(i)} g)$. Unter Verwendung von (1.3.8) finden wir

$$\varphi^{-i}(\mathcal{N}_h^{(i)} g) - \varphi^{-(i-1)}(\mathcal{N}_h^{(i-1)} g) = \varphi^{-i}(\mathcal{N}_h^{(i)} g - \varphi \mathcal{N}_h^{(i-1)} g) \equiv 0 \pmod{\pi^i},$$

d.h. obige Folge ist konvergent. Wir machen daher die folgende Definition:

$$\mathcal{N}_h^\infty g := \lim_{i \rightarrow \infty} \varphi^{-i}(\mathcal{N}_h^{(i)} g).$$

(1.3.17) Lemma. *Sei $g \in \mathcal{O}_{\tilde{K}}[[X]]^\times$. Dann gelten:*

(a) $\mathcal{N}_h^\infty g \in \mathcal{C}^0(\tilde{K}, h)$,

(b) $\mathcal{N}_h^\infty g \equiv g \pmod{\pi}$.

Beweis. Aus (1.3.8) folgt sofort, dass $\mathcal{N}_h^\infty g \in \mathcal{O}_{\tilde{K}}[[X]]^\times$ ist. Wir müssen noch zeigen, dass $\mathcal{N}_h(\mathcal{N}_h^\infty g) = (\mathcal{N}_h^\infty g)^\varphi$ gilt. Aus der obigen Rechnung folgt

$$\frac{\varphi^{-i}(\mathcal{N}_h^{(i)} g)}{\varphi^{(-i-1)}(\mathcal{N}_h^{(i-1)} g)} \equiv 1 \pmod{\pi^i},$$

in Verbindung mit (1.3.7) also

$$\mathcal{N}_h \frac{\varphi^{-i}(\mathcal{N}_h^{(i)} g)}{\varphi^{(-i-1)}(\mathcal{N}_h^{(i-1)} g)} \equiv 1 \pmod{\pi^{i+1}}.$$

Wir berechnen

$$\mathcal{N}_h(\varphi^{-i}(\mathcal{N}_h^{(i)} g)) \equiv \mathcal{N}_h(\varphi^{(-i-1)}(\mathcal{N}_h^{(i-1)} g)) = \varphi^{-(i-1)} \mathcal{N}_h^{(i)} g = \varphi(\varphi^{-i}(\mathcal{N}_h^{(i)} g)) \pmod{\pi^{i+1}}.$$

Es ergibt sich

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \left(\mathcal{N}_h(\varphi^{-i}(\mathcal{N}_h^{(i)} g)) - \varphi(\varphi^{-i}(\mathcal{N}_h^{(i)} g)) \right) = 0.$$

Aus der oben gemachten Bemerkung folgern wir

$$\varphi^{-i}(\mathcal{N}_h^{(i)} g) \equiv \mathcal{N}_h^\infty g \pmod{\pi^{i+1}},$$

vermöge (1.3.7) gilt

$$\frac{\mathcal{N}_h \varphi^{-i} \mathcal{N}_h^{(i)} g}{\mathcal{N}_h(\mathcal{N}_h^\infty g)} \equiv 1 \pmod{\pi^{i+2}}$$

Wir schliessen

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \mathcal{N}_h(\varphi^{-i} \mathcal{N}_h^{(i)} g) = \mathcal{N}_h(\mathcal{N}_h^\infty g)$$

und damit $\mathcal{N}_h(\mathcal{N}_h^\infty g) = (\mathcal{N}_h^\infty g)^\varphi$. Für jedes $i \geq 1$ gilt ausserdem

$$\varphi^{-i} \mathcal{N}_h^{(i)} g \equiv \varphi^{-i}(g^{\varphi^i}) \equiv g \pmod{\pi},$$

was (b) zur Folge hat. □

(1.3.18) Korollar. Die Abbildung ϱ_K ist surjektiv.

Beweis. Sei $\xi \in \overline{\mathbb{F}_q}[[X]]^\times$. Dann existiert ein $\tilde{g} \in \mathcal{O}_{\tilde{K}}[[X]]^\times$ mit $\varrho_K(\tilde{g}) = \xi$. Wir setzen $g := \mathcal{N}_h^\infty \tilde{g} \in \mathcal{C}^0(\tilde{K}, h)$, und mit (1.3.17) folgt nun $\varrho_K(g) = \varrho_K(\tilde{g}) = \xi$. □

Wir fassen nun die wichtigsten Ergebnisse der Coleman-Theorie, die wir im weiteren benötigen, noch einmal zusammen. Für $g \in \mathcal{O}_{\tilde{K}}[[X]]$ sei dabei $v(g)$ die eindeutig bestimmte natürliche Zahl, so dass $g \in X^{v(g)} \mathcal{O}_{\tilde{K}}[[X]]^\times$ ist, und $\mathcal{C}(K, h)$ sei gegeben durch

$$\mathcal{C}(K, h) := \mathcal{C}(\tilde{K}, h) \cap \mathcal{O}_K[[X]].$$

(1.3.19) Satz. Es sei $\pi \in \tilde{K}$ ein Primelement, $h \in \mathcal{F}_{\pi, \tilde{K}}$, $\omega \in \Omega_h$. Dann gelten:

(a) Die Abbildung

$$\psi_\omega : \varprojlim \mathcal{O}_{\widetilde{K}^i} \rightarrow \mathcal{C}(\widetilde{K}, h), \beta = (\beta_i) \mapsto g_\beta,$$

wobei g_β eindeutig bestimmt ist durch die Vorgabe $g_\beta^{\varphi^{1-i}}(\omega_i) = \beta_i$ für alle $i \geq 1$, ist ein Monoidisomorphismus mit Umkehrabbildung

$$\psi_\omega^{-1} : \mathcal{C}(\widetilde{K}, h) \rightarrow \varprojlim \mathcal{O}_{\widetilde{K}^i}, g \mapsto (g^{\varphi^{1-i}})(\omega_i).$$

Sie induziert einen Gruppenisomorphismus

$$\mathcal{U}(\widetilde{K}) := \varprojlim U_{\widetilde{K}^i} \cong \mathcal{C}^0(\widetilde{K}, h).$$

Es existiert ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \varprojlim \mathcal{O}_{\widetilde{K}^i} & \longrightarrow & \mathcal{C}(\widetilde{K}, h) \\ v \downarrow & & v \downarrow \\ \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \end{array} .$$

(b) Sind $\pi \in K$, $h \in \mathcal{F}_{\pi, K}$, dann ist die Abbildung

$$\psi_\omega : \varprojlim \mathcal{O}_{K_{\pi, i}} \rightarrow \mathcal{C}(K, h), \beta = (\beta_i) \mapsto g_\beta,$$

wobei g_β eindeutig bestimmt ist durch die Vorgabe $g_\beta(\omega_i) = \beta_i$ für alle $i \geq 1$, ein Monoidisomorphismus mit Umkehrabbildung

$$\psi_\omega^{-1} : \mathcal{C}(K, h) \rightarrow \varprojlim \mathcal{O}_{K_{\pi, i}}, g \mapsto g(\omega_i).$$

Es existiert ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \varprojlim \mathcal{O}_{K_{\pi, i}} & \longrightarrow & \mathcal{C}(K, h) \\ v \downarrow & & v \downarrow \\ \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \end{array} .$$

(c) Die Reduktionsabbildung modulo π induziert einen Gruppenisomorphismus

$$\varrho_K : \mathcal{C}^0(\widetilde{K}, h) \rightarrow \overline{\mathbb{F}_q}[[X]]^\times$$

sowie einen Gruppenisomorphismus

$$\varprojlim U_{\widetilde{K}^i} \rightarrow \overline{\mathbb{F}_q}[[X]]^\times.$$

Beweis. Bis auf Aussage (b) ist alles bereits bewiesen worden. Diese Aussage erhalten wir aus unseren Ausführungen dadurch, dass wir die von uns verwendete verallgemeinerte Lubin-Tate-Theorie überall durch die Ergebnisse aus (1.2.7) ersetzen. Aufgrund der Kompaktheit von $\mathcal{O}_K[[X]]$ lassen sich dabei die von uns verwendeten Vollständigkeitsargumente durch einfachere Kompaktheitsschlüsse ersetzen. \square

Es soll an dieser Stelle nicht versäumt werden, auf die Verbindung des letzten Satzes zur Theorie der Normenkörper aus [Wi] hinzuweisen. Darin wird auf

$$\mathcal{K} := \varprojlim \widetilde{K}^{i \times} \cup \{0\}$$

eine Addition definiert und somit \mathcal{K} zu einem Körper gemacht. Schliesslich wird darauf eine diskrete Bewertung eingeführt, und \mathcal{K} wird zu einem vollständig diskret bewerteten Körper der Charakteristik p mit Restklassenkörper $\overline{\mathbb{F}_q}$. Man erhält einen Isomorphismus

$$\mathcal{K} \cong \overline{\mathbb{F}_q}((X)),$$

Aussage (c) des letzten Satzes entspricht hier der Identifikation der Einheitengruppen. Unsere Herangehensweise hat jedoch den Vorteil, expliziter zu sein, und die Menge der Coleman-Potenzreihen mit all ihren Eigenschaften erweist sich als sehr hilfreiches Instrument für unsere weiteren Beweise.

(1.3.20) Definition. Sei $h \in \mathcal{F}_{\pi, \tilde{K}}$, und sei F_h die zu h assoziierte Lubin-Tate-Gruppe. F_h heisst **normiert**, falls $X \in \mathcal{C}(\tilde{K}, h)$ ist, d.h. falls

$$h = \prod_{\omega \in W_h^1} (X + \omega)_{F_h}$$

gilt. Wir setzen

$$\mathcal{F}'_{\pi, \tilde{K}} = \{h \in \mathcal{F}_{\pi, \tilde{K}} \mid F_h \text{ ist normiert}\}.$$

(1.3.21) Lemma. (a) Es seien $h \in \mathcal{F}_{\pi, \tilde{K}}$, $h' \in \mathcal{F}_{\pi', \tilde{K}}$. Sind $F_h, F_{h'}$ normiert, und ist $u \in U_{\tilde{K}}$, dann ist $[u]_{h, h'} \in \mathcal{C}^0(\tilde{K}, h)$.

(b) Ist F_h normiert und γ ein Automorphismus von \tilde{K} , dann ist auch F_{h^γ} normiert.

Beweis. Zum Beweis der Aussage (a) berechnen wir unter Verwendung von (1.2.6) und (1.2.9):

$$\begin{aligned} [u]_{h, h'}^\varphi \circ h &= h' \circ [u]_{h, h'} = \prod_{\omega' \in W_{h'}^1} F_{h'}([u]_{h, h'}, \omega') = \prod_{\omega \in W_h^1} F_{h'}([u]_{h, h'}, [u]_{h, h'}(\omega)) \\ &= \prod_{\omega \in W_h^1} [u]_{h, h'} \circ F_h(X, \omega). \end{aligned}$$

Sei γ ein Automorphismus von \tilde{K} . Für normiertes h ergibt sich aus (1.3.6)

$$X = X^\gamma = \left(\prod_{\omega \in W_h^1} F_h(X, \omega) \right)^\gamma = \prod_{\omega \in W_{h^\gamma}^1} F_{h^\gamma}(X, \omega),$$

und somit folgt Aussage (b). □

(1.3.22) Proposition. Sei $h \in \mathcal{F}_{\pi, K}$. Dann gelten:

(a) F_h ist genau dann normiert, falls jedes $\omega = (\omega_i) \in \Omega_h$ eine normkompatible Folge in den Körpern \tilde{K}^i ist. In diesem Fall ist $\pi = \tilde{N}_{K^1|K} \omega_1$.

(b) Sei $h \in \mathcal{F}_{\pi, \tilde{K}}$, $\omega \in \Omega_h$, und sei β eine normkompatible Sequenz von Primelementen in den Körpern \tilde{K}^i . Dann existiert ein zu F_h isomorphes normiertes Lubin-Tate-Gruppengesetz $F_{h'}$, so dass $\beta \in \Omega_{h'}$ ist. Insbesondere ist $h' \in \mathcal{F}_{\pi', \tilde{K}}$, wobei π' gegeben ist durch $\pi' = \tilde{N}_{K^1|K} \beta_1$.

(c) Ist $\beta = (\beta_i)$ eine normkompatible Folge von Primelementen in \widetilde{K}^i mit $\pi := \widetilde{N}_{K^1|K}(\beta_1)$, dann existiert genau ein $h' \in \mathcal{F}'_{\pi, \widetilde{K}}$, so dass $\beta \in \Omega_{h'}$ ist. Ist $\pi \in K$, (β_i) eine normkompatible Sequenz von Primelementen in den $K_{\pi, i}$, dann ist $h' \in \mathcal{F}_{\pi, K}$.

Beweis. Sei F_h normiert. Dann ist

$$h = \prod_{\omega \in W_h^1} F_h(X, \omega),$$

somit wegen $\omega_i \in \widetilde{W}_{h\varphi^{1-i}}^i$ und (1.3.21), (1.2.7)

$$\widetilde{N}_{K^i|K^{i-1}}\omega_i = \prod_{\omega \in W_{h\varphi^{1-i}}^1} F_{h\varphi^{1-i}}(\omega_i, \omega) = \left(\prod_{\omega \in W_h^1} F_h(X, \omega) \right)^{\varphi^{1-i}}(\omega_i) = h^{\varphi^{1-i}}(\omega_i) = \omega_{i-1}.$$

Sind umgekehrt die ω_i normkompatibel, dann folgt mit derselben Rechnung

$$h^{\varphi^{1-i}}(\omega_i) = \left(\prod_{\omega \in W_h^1} F_h(X, \omega) \right)^{\varphi^{1-i}}(\omega_i).$$

Damit ist nach (1.3.11)

$$h = \prod_{\omega \in W_h^1} F_h(X, \omega),$$

d.h. F_h ist normiert. Es ergibt sich unmittelbar

$$\pi = \frac{h(X)}{X} = \prod_{\omega \in W_h^1 \setminus \{0\}} F_h(0, \omega) = \prod_{\omega \in W_h^1 \setminus \{0\}} \omega = \widetilde{N}_{K^1|K}(\beta_1),$$

damit ist Behauptung (a) bewiesen. Zum Beweis von (b) betrachten wir $h \in \mathcal{F}_{\pi, \widetilde{K}}$, $\omega \in \Omega_h$. Vermöge (1.3.19) finden wir ein $g \in \mathcal{C}(\widetilde{K}, h)$, so dass $\beta_i = g^{\varphi^{1-i}}(\omega_i)$ für alle $i \geq 1$ ist. Da die β_i Primelemente sind, ist dann $v(g) = 1$. Damit können wir nun

$$h' := g^\varphi \circ h \circ g^{-1}$$

setzen. Aus $v(g) = 1$ folgt unmittelbar, dass $h' \equiv \pi' X \pmod{(X^2)}$ ist mit einem Primelement $\pi' \in \widetilde{K}$. Wir erhalten

$$\rho(h') = \rho(g)^q \circ X^q \circ \rho(g^{-1}) = \rho(g \circ g^{-1})^q = X^q,$$

wobei ρ die Reduktionsabbildung modulo π bezeichne. Somit ist $h' \in \mathcal{F}_{\pi', \widetilde{K}}$. Wir werden nun zeigen, dass $\beta = (\beta_i) \in \Omega_{h'}$ ist. Dazu bemerken wir

$$h'^{\varphi^{1-i}}(\beta_i) = (g^\varphi \circ h \circ g^{-1})^{\varphi^{1-i}}(\beta_i) = g^{\varphi^{2-i}} \circ h^{\varphi^{1-i}}(\omega_i) = g^{\varphi^{2-i}}(\omega_{i-1}) = \beta_{i-1}.$$

Durch mehrfaches Anwenden dieser Beziehung erhalten wir

$$\begin{aligned} h' \circ h'^{\varphi^{-1}} \circ \dots \circ h'^{\varphi^{1-i}}(\beta_i) &= g^\varphi \circ h \circ g^{-1} \circ (g^\varphi \circ h \circ g^{-1})^{\varphi^{-1}} \dots \circ (g^\varphi \circ h \circ g^{-1})^{\varphi^{1-i}}(\beta_i) \\ &= g^\varphi \circ h \circ g^{-1} \circ (g^\varphi \circ h \circ g^{-1})^{\varphi^{-1}} \dots \circ (g^\varphi \circ h \circ g^{-1})^{\varphi^{2-i}}(\beta_{i-1}) \\ &= \dots = g^\varphi \circ h \circ g^{-1}(\beta_1) = g^\varphi \circ h(\omega_1) = g^\varphi(0) = 0, \end{aligned}$$

sowie analog

$$h'^{\varphi^{-1}} \circ \dots \circ h'^{\varphi^{1-i}}(\beta_i) = \beta_1 \neq 0.$$

Damit ist in der Tat $\beta \in \Omega_{h'}$. Da β eine normkompatible Folge ist, ergibt sich die Normiertheit von $F_{h'}$. Unter Verwendung von (a) folgt somit auch Aussage (b). Sei nun $\beta = (\beta_i)$ eine normkompatible Sequenz von Primelementen in den \widetilde{K}^i mit $\pi = \widetilde{N}_{K^1|K}(\beta_1)$. Wenden wir (b) auf irgendein $h \in \mathcal{F}'_{\pi, \widetilde{K}}, \omega \in \Omega_h$ an, so erhalten wir ein $h' \in \mathcal{F}'_{\pi, \widetilde{K}}$ mit $\beta \in \Omega_{h'}$. Seien $h, h' \in \mathcal{F}'_{\pi, \widetilde{K}}$ mit $\beta \in \Omega_h \cap \Omega_{h'}$. Dann ist für jedes $i \geq 1$

$$(h^{\varphi^{1-i}} - h'^{\varphi^{1-i}})(\beta_i) = 0,$$

somit gilt nach (1.3.11) $h = h'$. Ist $\pi \in K, \beta \in \varprojlim K_{\pi, i}^\times$ eine normkompatible Sequenz von Primelementen, dann erhalten wir durch Anwenden von (b) auf $h := \pi X + X^q$ ein $h' \in \mathcal{O}_K[[X]]$ mit $\beta \in \Omega_{h'}$, da die im Beweis von (b) verwendete Coleman-Reihe g nach (1.3.19) in $\mathcal{C}(K, h)$ liegt. \square

(1.3.23) Lemma. *Es seien $\pi, \pi' \in \widetilde{K}$ Primelemente, $h \in \mathcal{F}'_{\pi, \widetilde{K}}, h' \in \mathcal{F}'_{\pi', \widetilde{K}}$. Sind $\omega \in \Omega_h, \omega' \in \Omega_{h'}$, dann existiert ein Isomorphismus $\theta : F_h \rightarrow F_{h'}$, so dass $\theta^{\varphi^{1-i}}(\omega_i) = \omega'_i$ für alle $i \geq 1$ ist.*

Beweis. Sei $\eta = [v]_{h, h'} : F_h \rightarrow F_{h'}$ ein Isomorphismus. Mittels (1.2.12) ist $(\widetilde{\omega}_i) := (\eta^{\varphi^{1-i}}(\omega_i)) \in \Omega_{h'}$. Die Abbildung

$$\varinjlim \widetilde{K}^i \rightarrow \varinjlim \widetilde{K}^i, (\widetilde{\omega}_i) \mapsto (\omega'_i)$$

induziert einen Automorphismus von $\widetilde{K}^{\text{ab}}|\widetilde{K}$, wir finden also ein $u \in U_K$, so dass

$$[u]_{h', \varphi^{1-i}}(\widetilde{\omega}_i) = \omega'_i$$

für alle $i \geq 1$ ist. Wir definieren nun $\theta := [uv]_{h, h'}$. Es ergibt sich in Verbindung mit (1.2.6)

$$\theta^{\varphi^{1-i}}(\omega_i) = [uv]_{h, \varphi^{1-i}, h', \varphi^{1-i}}(\omega_i) = [u]_{h', \varphi^{1-i}} \circ [v]_{h, h'}^{\varphi^{1-i}}(\omega_i) = [u]_{h', \varphi^{1-i}}(\widetilde{\omega}_i) = \omega'_i,$$

damit ist θ der gesuchte Isomorphismus. \square

(1.3.24) Lemma. *Es sei eine Fortsetzung von φ nach K^{ab} fixiert. Sei $\pi \in \widetilde{K}, h \in \mathcal{F}'_{\pi, \widetilde{K}}, \omega = (\omega_i) \in \Omega_h$. Dann gibt es für jedes $g \in \mathcal{C}^0(\widetilde{K}, h)$ ein $g_1 \in \mathcal{C}^0(\widetilde{K}, h)$, so dass für jedes $a \in U_K$ und jedes $i \in \mathbb{N}$*

$$\left((g_1 \circ [a]_h)^{\varphi^{1-i}}(\omega_i) \right)^{\varphi^{-1}} = (g \circ [a]_h)^{\varphi^{1-i}}(\omega_i)$$

gilt. Ausserdem erfüllt g_1 die Gleichung

$$g_1(0)^{\varphi^{-1}} = g(0).$$

Sind $\pi \in K, h \in \mathcal{O}_K[[X]]$, und ist φ so gewählt, dass es K_∞ fixiert, dann ist $g_1^{\varphi^{-1}} = g_1$.

Beweis. Nach (1.3.19) ist $\beta = (\beta_i) = (g^{\varphi^{1-i}})(\omega_i)$ eine normkompatible Sequenz von Einheiten in den Körpern \widetilde{K}^i . Vermöge (1.1.2) haben wir eine exakte Sequenz

$$1 \longrightarrow U_{K_{\pi, i}} \longrightarrow U_{\widetilde{K}^i} \xrightarrow{\varphi^{-1}} U_{\widetilde{K}^i} \longrightarrow 1$$

mit einem Primelement $\pi \in K$, es existiert also für jedes $i \geq 1$ ein $\gamma_i \in U_{\widetilde{K}^i}$ mit $\gamma_i^{\varphi^{-1}} = \beta_i$. Die Menge

$$\{\gamma'_i \in U_{\widetilde{K}^i} \mid \gamma'_i{}^{\varphi^{-1}} = \beta_i\} = \gamma_i U_{K\pi, i}$$

ist kompakt. Ausserdem gilt für γ_{i+1} mit $\gamma_{i+1}^{\varphi^{-1}} = \beta_{i+1}$ die Beziehung

$$(\widetilde{N}_{K^{i+1}|K^i} \gamma_{i+1})^{\varphi^{-1}} = \widetilde{N}_{K^{i+1}|K^i} \beta_{i+1} = \beta_i.$$

Wir können aus diesen Gründen $\gamma = (\gamma_i)$ als normkompatible Folge annehmen. Sei $g_1 \in \mathcal{C}^0(\widetilde{K}, h)$ gegeben durch $g_1 := \psi_\omega(\gamma)$, wobei ψ den Isomorphismus aus (1.3.19) bezeichne, d.h. $\gamma_i = g_1^{\varphi^{1-i}}(\omega_i)$ für alle $i \geq 1$. Damit folgt

$$(g_1^{\varphi^{1-i}})^{\varphi^{-1}} = \gamma_i^{\varphi^{-1}} = \beta_i = g^{\varphi^{1-i}}(\omega_i).$$

Sei $a \in U_K$. Dann ist

$$\begin{aligned} \left((g_1 \circ [a]_h)^{\varphi^{1-i}}(\omega_i) \right)^{\varphi^{-1}} &= \left(g_1^{\varphi^{1-i}} \circ [a]_{h\varphi^{1-i}}(\omega_i) \right)^{\varphi^{-1}} = \left(g_1^{\varphi^{1-i}} \circ (a^{-1}, K)(\omega_i) \right)^{\varphi^{-1}} \\ &= \left((a^{-1}, K) \circ g_1^{\varphi^{1-i}}(\omega_i) \right)^{\varphi^{-1}} = \left((a^{-1}, K)(\gamma_i) \right)^{\varphi^{-1}} \\ &= (a^{-1}, K)(\beta_i) = (a^{-1}, K) \left(g^{\varphi^{1-i}}(\omega_i) \right) \\ &= g^{\varphi^{1-i}} \circ (a^{-1}, K)(\omega_i) = g^{\varphi^{1-i}} \circ [a]_{h\varphi^{1-i}}(\omega_i) \\ &= (g \circ [a]_h)^{\varphi^{1-i}}(\omega_i). \end{aligned}$$

Hierbei haben wir verwendet, dass $g, g_1 \in \mathcal{O}_{\widetilde{K}}[[X]]$ sind und somit von (a^{-1}, K) fixiert werden. Sei $\theta : F_h \xrightarrow{\sim} F_{h\varphi}$ mittels (1.3.23) so gewählt, dass $\theta^{\varphi^{1-i}}(\omega_i) = \varphi(\omega_i)$ ist. Dann gilt für alle $i \geq 1$:

$$\begin{aligned} \frac{g_1^\varphi \circ \theta^{\varphi^{1-i}}}{g_1}(\omega_i) &= \frac{g_1^{\varphi^{2-i}} \circ \theta^{\varphi^{1-i}}(\omega_i)}{g_1^{\varphi^{1-i}}(\omega_i)} = \frac{g_1^{\varphi^{2-i}} \circ \varphi(\omega_i)}{g_1^{\varphi^{1-i}}(\omega_i)} = \frac{\varphi(g_1^{\varphi^{1-i}}(\omega_i))}{g_1^{\varphi^{1-i}}(\omega_i)} = (g_1^{\varphi^{1-i}}(\omega_i))^{\varphi^{-1}} \\ &= g^{\varphi^{1-i}}(\omega_i). \end{aligned}$$

Damit folgt mittels (1.3.11)

$$\frac{g_1^\varphi \circ \theta}{g_1} = g,$$

wegen $\theta(0) = 0$ ergibt sich $g_1(0)^{\varphi^{-1}} = g(0)$. Sind $\pi \in K, h \in \mathcal{O}_K[[X]]$, und ist $\varphi|_{K_\infty} = \text{id}_{K_\infty}$, dann ist $\theta = X$ und somit $g_1^{\varphi^{-1}} = g$. \square

II. Metabelsche lokale Klassenkörpertheorie

§1. Galoisgruppen spezieller Erweiterungen

Sei K ein lokaler Körper und L eine endliche Galoiserweiterung von K . Sind keine Verwechslungen zu befürchten, so schreiben wir $\varphi := \varphi_L \in G(L^{\text{nr}}|L)$ für den Frobeniusautomorphismus von L . Wir werden im folgenden die Struktur der Gruppe $G(L^{\text{ab}}|K)$ untersuchen. Eine wichtige Teilerweiterung von $L^{\text{ab}}|K$ ist die Erweiterung $L^{\text{nr}}|K$. Für diese halten wir das folgende Lemma fest:

(2.1.1) Lemma. *Die Gruppe $G(L^{\text{nr}}|K)$ ist eine zentrale Erweiterung von $G(L|K)$ mit $\hat{\mathbb{Z}}$:*

$$1 \longrightarrow \hat{\mathbb{Z}} \longrightarrow G(L^{\text{nr}}|K) \longrightarrow G(L|K) \longrightarrow 1,$$

wobei $1 \in \hat{\mathbb{Z}}$ auf den Frobeniusautomorphismus $\varphi \in G(L^{\text{nr}}|L) \subseteq G(L^{\text{nr}}|K)$ abgebildet wird.

Beweis. Die Exaktheit der obigen Sequenz ist klar. Zu zeigen ist noch, dass φ mit allen Elementen aus $G(L^{\text{nr}}|K)$ kommutiert. Sei also $\sigma \in G(L^{\text{nr}}|K)$. Dann ist

$$(\varphi\sigma)|_L = \varphi|_L\sigma|_L = \sigma|_L = \sigma|_L\varphi|_L = (\sigma\varphi)|_L,$$

und da $G(K^{\text{nr}}|K)$ abelsch ist, gilt auch

$$(\varphi\sigma)|_{K^{\text{nr}}} = \varphi|_{K^{\text{nr}}}\sigma|_{K^{\text{nr}}} = \varphi|_{K^{\text{nr}}}\sigma|_{K^{\text{nr}}} = (\sigma\varphi)|_{K^{\text{nr}}}.$$

Wegen $L^{\text{nr}} = LK^{\text{nr}}$ ergibt sich $\varphi\sigma = \sigma\varphi$. □

Die Operation von $G(L^{\text{nr}}|K)$ auf L^{nr} setzt sich stetig zu einer Operation auf \tilde{L} fort, wobei der Fixkörper von $G(L^{\text{nr}}|K)$ in \tilde{L} durch K gegeben ist, vgl. [Neu1], Kap.V, Lemma (2.1). Wir fixieren von jetzt an ein Primelement $\pi \in \tilde{L}$.

(2.1.2) Definition. *Wir definieren*

$$\mathcal{G}(L|K, \pi) := \{(\gamma, b) \in G(L^{\text{nr}}|K) \times U_{\tilde{L}} \mid b^{\varphi-1} = \pi^{\gamma-1}\}.$$

Auf $\mathcal{G}(L|K, \pi)$ erklären wir eine Verknüpfung durch

$$(\gamma_1, b_1)(\gamma_2, b_2) = (\gamma_1\gamma_2, b_1\gamma_1(b_2)).$$

(2.1.3) Proposition. *Mit der obigen Verknüpfung wird $\mathcal{G}(L|K, \pi)$ zu einer Gruppe mit neutralem Element $(\text{id}_{L^{\text{nr}}}, 1)$. Das inverse Element zu (γ, b) ist gegeben durch $(\gamma^{-1}, \gamma^{-1}(b^{-1}))$. Wir haben die exakte Sequenz*

$$1 \longrightarrow U_L \longrightarrow \mathcal{G}(L|K, \pi) \longrightarrow G(L^{\text{nr}}|K) \longrightarrow 1.$$

Beweis. Seien $(\gamma_1, b_1), (\gamma_2, b_2), (\gamma_3, b_3) \in \mathcal{G}(L|K, \pi)$. Zunächst zeigen wir, dass

$$(\gamma_1, b_1)(\gamma_2, b_2) = (\gamma_1\gamma_2, b_1\gamma_1(b_2)) \in \mathcal{G}(L|K, \pi)$$

ist. Dazu müssen wir uns überlegen, dass $(b_1\gamma_1(b_2))^{\varphi-1} = \pi^{\gamma_1\gamma_2-1}$ gilt. Offenbar ist

$$\begin{aligned} (b_1\gamma_1(b_2))^{\varphi-1} &= b_1^{\varphi-1}(\gamma_1(b_2))^{\varphi-1} = \pi^{\gamma_1-1}\gamma_1(b_2^{\varphi-1}) = \pi^{\gamma_1-1}\gamma_1(\pi^{\gamma_2-1}) = \pi^{\gamma_1-1}\pi^{\gamma_1\gamma_2-\gamma_1} \\ &= \pi^{\gamma_1\gamma_2-1}. \end{aligned}$$

Zum Nachweis des Assoziativgesetzes berechnen wir

$$\begin{aligned} ((\gamma_1, b_1)(\gamma_2, b_2))(\gamma_3, b_3) &= (\gamma_1\gamma_2, b_1\gamma_1(b_2))(\gamma_3, b_3) = (\gamma_1\gamma_2\gamma_3, b_1\gamma_1(b_2)\gamma_1\gamma_2(b_3)) \\ &= (\gamma_1\gamma_2\gamma_3, b_1\gamma_1(b_2\gamma_2(b_3))) = (\gamma_1, b_1)(\gamma_2\gamma_3, b_2\gamma_2(b_3)) \\ &= (\gamma_1, b_1)((\gamma_2, b_2)(\gamma_3, b_3)). \end{aligned}$$

Sei nun $(\gamma, b) \in \mathcal{G}(L|K, \pi)$. Offensichtlich ist $(\gamma, b)(\text{id}_{L^{\text{nr}}}, 1) = (\gamma, b)$, und das Element $(\gamma^{-1}, \gamma^{-1}(b^{-1}))$ liegt in $\mathcal{G}(L|K, \pi)$, denn

$$(\gamma^{-1}(b^{-1}))^{\varphi-1} = \gamma^{-1}((b^{-1})^{\varphi-1}) = \pi^{\gamma-1}.$$

Es gilt:

$$(\gamma, b)(\gamma^{-1}, \gamma^{-1}(b^{-1})) = (\text{id}_{L^{\text{nr}}}, b\gamma\gamma^{-1}(b^{-1})) = (\text{id}_{L^{\text{nr}}}, 1).$$

Damit ist der erste Teil der Behauptung bewiesen, und die Exaktheit der obigen Sequenz folgt aus (1.1.2). Ist nämlich $(\text{id}_{L^{\text{nr}}}, b) \in \mathcal{G}(L|K, \pi)$ mit $b \in U_{\tilde{L}}$, so ergibt sich $b^{\varphi-1} = 1$ und somit $b \in U_L$. \square

Wir haben im ersten Kapitel zum lokalen Körper L den Körperturm der \tilde{L}^i konstruiert, wobei L^i der Klassenkörper zu U_L^i war (vgl. (1.2.8)). Dieser spielt für die Charakterisierung der Gruppe $G(L^{\text{ab}}|K)$ eine entscheidende Rolle.

(2.1.4) Proposition. *Sei $\omega = (\omega_i)$ eine normkompatible Sequenz von Primelementen $\omega_i \in \tilde{L}^i$ mit $\tilde{N}_{L^1|L}(\omega_1) = \pi$. Dann gibt es einen (von ω abhängigen abstrakten) Isomorphismus*

$$v_\omega : \mathcal{G}(L|K, \pi) \cong G(L^{\text{ab}}|K),$$

so dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & U_L & \longrightarrow & \mathcal{G}(L|K, \pi) & \longrightarrow & G(L^{\text{nr}}|K) \longrightarrow 1 \\ & & \downarrow (\cdot^{-1}, L) & & \downarrow v_\omega & & \parallel \\ 1 & \longrightarrow & G(L^{\text{ab}}|L^{\text{nr}}) & \longrightarrow & G(L^{\text{ab}}|K) & \longrightarrow & G(L^{\text{nr}}|K) \longrightarrow 1. \end{array}$$

Die vertikale Abbildung links ist gegeben durch $u \mapsto (u^{-1}, L)$.

Beweis. Sei $h \in \mathcal{F}'_{\pi, \tilde{L}}$ die nach (1.3.22) eindeutig bestimmte Potenzreihe, so dass $\omega \in \Omega_h$ ist, und F_h das zu h assoziierte Lubin-Tate-Gruppengesetz. Sei $(\gamma, b) \in \mathcal{G}(L|K, \pi)$. Dann existiert nach (1.2.6) ein eindeutig bestimmter Isomorphismus $\eta = [b]_{h, h^\gamma} : F_h \cong F_{h^\gamma}$ über $\mathcal{O}_{\tilde{L}}$, welcher

$$h^\gamma \circ \eta = \eta^\varphi \circ h, \quad \eta(X) \equiv bX \pmod{X^2}$$

erfüllt. Wir setzen $\omega'_i := \eta^{\varphi^{1-i}}(\omega_i)$. Nach (1.2.12) ist $\omega' = (\omega'_i) \in \Omega_{h^\gamma}$. Die ω'_i sind ebenfalls Erzeuger der reinverzweigten Erweiterungen $\tilde{L}^i|\tilde{L}$, es existiert also genau eine Fortsetzung σ von γ zu einem Automorphismus von $\cup \tilde{L}^i$ mit $\sigma(\omega) = \omega'$. Der Körper $\cup \tilde{L}^i$ umfasst L^{ab} , und wir setzen

$$\iota_\omega((\gamma, b)) := \sigma|_{L^{\text{ab}}}.$$

Wir müssen nun zeigen, dass ι_ω ein Homomorphismus ist. Seien $\eta_1, \eta_2, \eta_{12}$ bzw. $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_{12}$ die zu $(\gamma_1, b_1), (\gamma_2, b_2), (\gamma_1, b_1)(\gamma_2, b_2)$ konstruierten obigen Potenzreihen bzw. Automorphismen. Dann sind $\sigma_1 \circ \sigma_2$ und σ_{12} Fortsetzungen von $\gamma_1\gamma_2$, und es bleibt zu zeigen, dass $\sigma_1 \circ \sigma_2$ und σ_{12} auf ω übereinstimmen. Wir erhalten

$$\sigma_1 \circ \sigma_2(\omega_i) = \sigma_1(\eta_2^{\varphi^{1-i}}(\omega_i)) = \eta_2^{\varphi^{1-i}\gamma_1}(\sigma_1(\omega_1)) = \eta_2^{\varphi^{1-i}\gamma_1} \circ \eta_1^{\varphi^{1-i}}(\omega_i) = (\eta_2^{\gamma_1} \circ \eta_1)^{\varphi^{1-i}}(\omega_i),$$

da $\eta_2 \in \mathcal{O}_{\tilde{L}}[[X]]$ ist und $\sigma_1|_{\tilde{L}} = \gamma_1$. Es bleibt also zu zeigen, dass $\eta_{12} = \eta_2^{\gamma_1} \circ \eta_1$ ist. Offenbar gilt

$$\eta_{12} \equiv b_1\gamma_1(b_2)X \equiv \eta_2^{\gamma_1} \circ \eta_1 \pmod{X^2}.$$

Aus

$$\begin{aligned} h^{\gamma_1\gamma_2} \circ \eta_2^{\gamma_1} \circ \eta_1 &= (h^{\gamma_2} \circ \eta_2)^{\gamma_1} \circ \eta_1 = (\eta_2^\varphi \circ h)^{\gamma_1} \circ \eta_1 = \eta_2^{\varphi\gamma_1} \circ h^{\gamma_1} \circ \eta_1 = \eta_2^{\varphi\gamma_1} \circ \eta_1^\varphi \circ h \\ &= (\eta_2^{\gamma_1} \circ \eta_1)^\varphi \circ h \end{aligned}$$

folgt, dass $\eta_2^{\gamma_1} \circ \eta_1$ die charakterisierenden Eigenschaften von η_{12} erfüllt, somit also $\eta_2^{\gamma_1} \circ \eta_1 = \eta_{12}$ ist.

Es bleibt die Kommutativität des obigen Diagramms zu zeigen. Da die vertikalen Abbildungen links und rechts Isomorphismen sind, ergibt sich dann, dass auch ι_ω ein Isomorphismus ist. Die Kommutativität des rechten Quadrates, also $\iota_\omega((\gamma, b))|_{L^{\text{nr}}} = \gamma$ ist klar nach der Konstruktion von ι_ω . Zur Kommutativität des linken Quadrates ist zu zeigen, dass $\iota_\omega((\text{id}_{L^{\text{nr}}}, b)) = (b^{-1}, L)$ für alle $b \in U_L$ gilt. Es ist

$$\iota_\omega((\text{id}_{L^{\text{nr}}}, b))|_{L^{\text{nr}}} = \text{id}_{L^{\text{nr}}} = (b^{-1}, L)|_{L^{\text{nr}}}.$$

Wie eben genügt es zu zeigen, dass $\iota_\omega((\text{id}_{L^{\text{nr}}}, b))(\omega_i) = (b^{-1}, L)(\omega_i)$ für alle $i \in \mathbb{N}$ ist. Mit der Lubin-Tate-Theorie erhalten wir

$$(b^{-1}, L)(\omega_i) = [b]_{h^{\varphi^{1-i}}}(\omega_i) = [b]_h^{\varphi^{1-i}}(\omega_i) = \iota_\omega((\text{id}_{L^{\text{nr}}}, b))(\omega_i).$$

Damit ist die Proposition bewiesen. \square

Sei $L' \supseteq L$ eine weitere endliche Galoiserweiterung von K und π' ein Primelement von \tilde{L}' mit $\tilde{N}_{L'|L}(\pi') = \pi$. Nach (1.1.3) existiert solch ein π' in der Tat, denn $\tilde{N}_{L'|L}$ ist surjektiv. Sei $f := f(L'|L)$, so dass also $\varphi_{L'}|_{L^{\text{nr}}} = \varphi^f$ ist.

Wir wollen nun versuchen, die Gruppen $\mathcal{G}(L'|K, \pi')$ und $\mathcal{G}(L|K, \pi)$ in Verbindung zu setzen. Aus der eben gezeigten Proposition ersehen wir, dass die U_L -Komponente von $\mathcal{G}(L|K, \pi)$ genau $G(L^{\text{ab}}|L^{\text{nr}})$ entspricht. Betrachten wir die Funktorialitätsaussage der lokalen Klassentheorie in (1.1.1), so sehen wir, dass eine Abbildung zwischen $\mathcal{G}(L'|K, \pi')$ und $\mathcal{G}(L|K, \pi)$ auf der zweiten Komponente die Normabbildung von U'_L nach U_L induzieren sollte. Eine Abbildung, die dies tut, kennen wir bereits aus (1.1.4). Wir machen daher die folgende Definition.

(2.1.5) Definition. Die Übergangsabbildung

$$r_{L'|L} : \mathcal{G}(L'|K, \pi') \rightarrow \mathcal{G}(L|K, \pi)$$

sei durch

$$(\gamma', b') \mapsto \left(\gamma'|_{L^{\text{nr}}}, \prod_{0 \leq i < f} \varphi_L^i \left(\tilde{N}_{L'|L}(b') \right) \right).$$

definiert

Wir geben jetzt einige Eigenschaften von $r_{L'|L}$ an.

(2.1.6) Proposition. (a) $r_{L'|L}$ ist ein Gruppenhomomorphismus.

(b) Auf der zweiten Komponente induziert die Abbildung $r_{L'|L}$ die Normabbildung von $U_{L'}$ nach U_L , und wir haben ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & U_{L'} & \longrightarrow & \mathcal{G}(L'|K, \pi') & \longrightarrow & G(L'^{\text{nr}}|K) \longrightarrow 1 \\ & & \downarrow N_{L'|K} & & \downarrow r_{L'|L} & & \downarrow \text{res} \\ 1 & \longrightarrow & U_L & \longrightarrow & \mathcal{G}(L|K, \pi) & \longrightarrow & G(L^{\text{nr}}|K) \longrightarrow 1. \end{array}$$

(c) Ist L'' eine endliche Galoisweiterung von K mit $L'' \supseteq L' \supseteq L$, und ist π'' ein Primelement von L'' mit $\tilde{N}_{L''|L}(\pi'') = \pi'$, dann gilt:

$$r_{L'|L} \circ r_{L''|L'} = r_{L''|L}.$$

Beweis. Zunächst verifizieren wir die Wohldefiniertheit von $r_{L'|L}$. Sei $(\gamma', b') \in \mathcal{G}(L'|K, \pi')$. Wir müssen zeigen, dass

$$\left(\prod_{0 \leq i < f} \varphi_L^i \left(\tilde{N}_{L'|L}(b') \right) \right)^{\varphi_L^{-1}} = \pi^{\gamma'|_{L^{\text{nr}}-1}}$$

ist. Dies ist aber der Fall, denn

$$\begin{aligned} \left(\prod_{0 \leq i < f} \varphi_L^i \left(\tilde{N}_{L'|L}(b') \right) \right)^{\varphi_L^{-1}} &= \frac{\varphi_L^f \left(\tilde{N}_{L'|L}(b') \right)}{\tilde{N}_{L'|L}(b')} = \frac{\varphi_{L'}^f \left(\tilde{N}_{L'|L}(b') \right)}{\tilde{N}_{L'|L}(b')} \\ &= \tilde{N}_{L'|L}(b'^{\varphi_{L'}^{-1}}) = \tilde{N}_{L'|L}(\pi'^{\gamma'^{-1}}) \\ &= \pi^{\gamma'|_{L^{\text{nr}}-1}}. \end{aligned}$$

Seien $(\gamma'_1, b'_1), (\gamma'_2, b'_2) \in G(L'|K, \pi)$. Wir finden

$$\begin{aligned}
r((\gamma'_1, b'_1)(\gamma'_2, b'_2)) &= r((\gamma'_1 \gamma'_2, b'_1 \gamma'_1(b'_2))) \\
&= \left((\gamma'_1 \gamma'_2)|_{L^{\text{nr}}}, \prod_{0 \leq i < f} \varphi_L^i \left(\tilde{N}_{L'|L}(b'_1 \gamma'_1(b'_2)) \right) \right) \\
&= \left(\gamma'_1|_{L^{\text{nr}}} \gamma'_2|_{L^{\text{nr}}}, \prod_{0 \leq i < f} \varphi_L^i \left(\tilde{N}_{L'|L}(b'_1) \right) \prod_{0 \leq i < f} \varphi_L^i \left(\tilde{N}_{L'|L}(\gamma'_1(b'_2)) \right) \right) \\
&= \left(\gamma'_1|_{L^{\text{nr}}} \gamma'_2|_{L^{\text{nr}}}, \prod_{0 \leq i < f} \varphi_L^i \left(\tilde{N}_{L'|L}(b'_1) \right) \gamma'_1|_{L^{\text{nr}}} \left(\prod_{0 \leq i < f} \tilde{N}_{L'|L}(b'_2) \right) \right) \\
&= \left(\gamma'_1|_{L^{\text{nr}}}, \prod_{0 \leq i < f} \varphi_L^i \left(\tilde{N}_{L'|L}(b'_1) \right) \right) \left(\gamma'_2|_{L^{\text{nr}}}, \prod_{0 \leq i < f} \varphi_L^i \left(\tilde{N}_{L'|L}(b'_2) \right) \right) \\
&= r((\gamma'_1, b'_1)) r((\gamma'_2, b'_2)).
\end{aligned}$$

Aussage (b) folgt unmittelbar aus (1.1.4). Sei $(\gamma'', b'') \in \mathcal{G}(L''|K, \pi'')$. Mit $f' := f(L''|L')$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
r_{L'|L} \circ r_{L''|L'}(\gamma'', b'') &= r_{L'|L} \left(\left(\gamma''|_{L'^{\text{nr}}}, \prod_{0 \leq j < f'} \varphi_{L'}^j \left(\tilde{N}_{L''|L'}(b'') \right) \right) \right) \\
&= \left(\gamma''|_{L^{\text{nr}}}, \prod_{0 \leq i < f} \varphi_L^i \left(\tilde{N}_{L'|L} \prod_{0 \leq j < f'} \varphi_{L'}^j \left(\tilde{N}_{L''|L'}(b'') \right) \right) \right) \\
&= \left(\gamma''|_{L^{\text{nr}}}, \prod_{0 \leq i < f} \prod_{0 \leq j < f'} \varphi_L^i \varphi_{L'}^j \left(\tilde{N}_{L''|L'}(b'') \right) \right) \\
&= \left(\gamma''|_{L^{\text{nr}}}, \prod_{0 \leq i < f} \prod_{0 \leq j < f'} \varphi_L^{i+fj} \left(\tilde{N}_{L''|L'}(b'') \right) \right) \\
&= \left(\gamma''|_{L^{\text{nr}}}, \prod_{0 \leq i < ff'} \varphi_L^{i+fj} \left(\tilde{N}_{L''|L'}(b'') \right) \right) \\
&= r_{L''|L}(\gamma'', b'')
\end{aligned}$$

und somit Aussage (c). \square

(2.1.7) Definition. Es seien $h \in \mathcal{F}_{\pi, \tilde{L}}^l$, $h' \in \mathcal{F}_{\pi', \tilde{L}'}^l$ sowie $\omega \in \Omega_h$, $\omega' \in \Omega_{h'}$. Dann heissen ω und ω' **normkompatibel** zueinander, falls $L^i \subseteq L'^j$ stets $\tilde{N}_{L^i|L^j} \omega_j = \omega_i$ impliziert.

(2.1.8) Proposition. Es seien $h' \in \mathcal{F}_{\pi', \tilde{L}'}^l$, $\omega' \in \Omega_{h'}$. Dann existieren ein $h \in \mathcal{F}_{\pi, \tilde{L}}^l$ und ein $\omega \in \Omega_h$, so dass ω und ω' normkompatibel zueinander sind.

Beweis. Sei $i \in \mathbb{N}$. Dann ist die Erweiterung $L^i|L$ abelsch, also auch $L'L^i|L'$. Es existiert hiernach ein $j \in \mathbb{N}$ mit $L'^j \supseteq L'L^i$, denn L'^j ist Klassenkörper zu $U_{L'}^j$, und die $U_{L'}^n$ bilden eine

Umgebungsbasis der Eins in L^{j^\times} . Somit haben wir die Inklusion $L^i \subseteq L^j$ und können

$$j(i) := \min\{j \in \mathbb{N} \mid L^j \supseteq L^i\}$$

setzen. Wir definieren nun $\omega_i := \tilde{N}_{L^{j(i)}|L^i} \omega'_{j(i)}$ und erhalten

$$\begin{aligned} \tilde{N}_{L^i|L^{i-1}} \omega_i &= \tilde{N}_{L^i|L^{i-1}} \tilde{N}_{L^{j(i)}|L^i} \omega'_{j(i)} = \tilde{N}_{L^{j(i)}|L^{i-1}} \omega'_{j(i)} = \tilde{N}_{L^{j(i-1)}|L^{i-1}} \tilde{N}_{L^{j(i)}|L^{j(i-1)}} \omega'_{j(i)} \\ &= \tilde{N}_{L^{j(i-1)}|L^{i-1}} \omega'_{j(i-1)} = \omega_{i-1}, \end{aligned}$$

die Folge $\omega := (\omega_i)$ ist damit eine normkompatible Folge von Primelementen in den \tilde{L}^i . Wir berechnen

$$\tilde{N}_{L^1|L} \omega_1 = \tilde{N}_{L^1|L} \tilde{N}_{L^{j(1)}|L^1} \omega'_{j(1)} = \tilde{N}_{L^{j(1)}|L^1} \omega'_{j(1)} = \tilde{N}_{L'|L} \tilde{N}_{L^{j(1)}|L'} \omega'_{j(1)} = \tilde{N}_{L'|L} \pi' = \pi.$$

Aufgrund von (1.3.22) finden wir ein $h \in \mathcal{F}'_{\pi, \tilde{L}}$ mit $\omega \in \Omega_h$. Nach Konstruktion sind ω, ω' normkompatibel zueinander. \square

(2.1.9) Proposition. *Es seien $h \in \mathcal{F}'_{\pi, \tilde{L}}$, $h' \in \mathcal{F}'_{\pi', \tilde{L}'}$ sowie $\omega \in \Omega_h$, $\omega' \in \Omega_{h'}$. Ausserdem existiere ein System \mathcal{L} von endlichen Galoisweiterungen $L''|K$ mit $L \subseteq L' \subseteq L'' \subseteq L^{\text{ab}}$, welches kofinal in $L^{\text{ab}}|K$ ist, und das der folgenden Liftungseigenschaft (L) genügt:*

Ist $L'' \in \mathcal{L}$, dann existieren ein Primelement $\pi'' \in \tilde{L}''$ mit $\tilde{N}_{L''|L'} \pi'' = \pi'$, ein $h'' \in \mathcal{F}'_{\pi'', \tilde{L}''}$ und $\omega \in \Omega_{h''}$, so dass ω'' kompatibel mit ω, ω' ist.

Dann ist das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}(L'|K, \pi') & \xrightarrow{r_{L'|L}} & \mathcal{G}(L|K, \pi) \\ \downarrow \iota_{\omega'} & & \downarrow \iota_{\omega} \\ G(L'^{\text{ab}}|K) & \xrightarrow{\text{res}} & G(L^{\text{ab}}|K) \end{array}$$

kommutativ, wobei res die Einschränkungsabbildung auf $L^{\text{ab}}|K$ bezeichnet.

Beweis. Wir setzen

$$r_{\omega, \omega'} := \iota_{\omega} \circ r_{L'|L} \circ \iota_{\omega'}^{-1}, \quad G' := G(L'^{\text{ab}}|K), \quad G := G(L^{\text{ab}}|K).$$

Ist $L'' \supseteq K$ eine endliche Galoisweiterung von K mit $L \subseteq L'' \subseteq L'$, dann gibt es nach (2.1.8) ein zu ω und ω' normkompatibles ω'' mit einem dazugehörigen Primelement $\pi'' \in \tilde{L}''$. Aufgrund von $r_{\omega, \omega'} = r_{\omega, \omega''} \circ r_{\omega'', \omega'}$ folgt die Behauptung aus den entsprechenden Aussagen für die Erweiterungen $L'|L''$ und $L''|L$. Da $L'|L$ auflösbar ist, können wir somit ohne Einschränkung annehmen, dass $L'|L$ abelsch ist. Wir werden uns nun überlegen, dass es ausreichend ist zu zeigen:

(a) Für alle $\sigma' \in G'$ ist $r_{\omega, \omega'}(\sigma')|_{L'} = \sigma'|_{L'}$.

(b) $r_{\omega, \omega'}$ ist surjektiv.

Sei dazu $L'' \in \mathcal{L}$ mit $G'' := G(L''^{\text{ab}}|K)$. Mittels (L) finden wir ω'', π'' , welche kompatibel mit ω, ω' sind. Wir bezeichnen die Restriktionsabbildungen von G, G', G'' nach $G(L''|K)$ mit

j, j', j'' , und es sei $\iota = \iota_\omega, \iota' = \iota_{\omega'}, \iota'' = \iota_{\omega''}$. Es seien $r : \mathcal{G}(L'|K, \pi') \rightarrow \mathcal{G}(L|K, \pi), r' : \mathcal{G}(L''|K, \pi'') \rightarrow \mathcal{G}(L'|K, \pi')$ die Übergangsabbildungen aus (2.1.5). Wir erhalten das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathcal{G}(L''|K, \pi'') & \xrightarrow{r'} & \mathcal{G}(L'|K, \pi') & \xrightarrow{r} & \mathcal{G}(L|K, \pi) \\
 \downarrow \iota'' & & \downarrow \iota' & & \downarrow \iota \\
 G'' & \xrightarrow{\text{res}_{G''|G}} & G' & \xrightarrow{\text{res}_{G'|G}} & G \\
 & \searrow j'' & \downarrow j' & \swarrow j & \\
 & & G(L''|K) & &
 \end{array}$$

Mittels (a), angewendet auf $L''|L$ und $L''|L'$ finden wir:

$$j \circ r_{\omega, \omega''} = j \circ \iota \circ r \circ r' \circ \iota''^{-1} = j'', \quad j' \circ r_{\omega', \omega''} = j' \circ \iota' \circ r' \circ \iota''^{-1} = j''.$$

Wegen $r' = \iota_{\omega'}^{-1} \circ r_{\omega', \omega''} \circ \iota_{\omega''}$ folgt mit (b), angewendet auf $L''|L'$, und (2.1.4) die Surjektivität von r' . Es ergibt sich $j \circ \iota \circ r = j'' \circ \iota'' \circ r'^{-1} = j' \circ \iota'$. Da L'' beliebig gewählt war, folgt $\iota \circ r = \text{res}_{G'|G} \circ \iota'$. Es verbleibt uns nun, die Aussagen (a) und (b) zu zeigen. Das ist der Inhalt des nächsten, den eigentlichen Kern unserer Ausführungen darstellenden Lemmas. \square

(2.1.10) Lemma. *Gelten die Voraussetzungen der vorangegangenen Proposition, und ist die Erweiterung $L'|L$ abelsch, so folgt:*

(a) Für alle $\sigma' \in G'$ ist $r_{\omega, \omega'}(\sigma')|_{L'} = \sigma'|_{L'}$.

(b) $r_{\omega, \omega'}$ ist surjektiv.

Beweis. Sei $i \in \mathbb{N}$ mit $L' \subseteq L^i$, insbesondere also $N_{L'|L}U_{L'} \supseteq U_L^i$. Da nach Voraussetzung ω, ω' kompatibel sind, gilt

$$\tilde{N}_{L^i|L'}\omega_i = \tilde{N}_{L^i|L'}\tilde{N}_{L^{j(i)}|L^i}\omega_{j(i)} = \tilde{N}_{L^{j(i)}|L'}\omega_{j(i)} = \pi'$$

Unter Benutzung der Surjektivität von ι_ω nach (2.1.4) setzen wir

$$\sigma' = \iota_{\omega'}((\gamma', b')), \quad (\gamma, b) := r_{L'|L}(\gamma', b').$$

mit einem geeigneten $(\gamma', b') \in \mathcal{G}(L'|K, \pi')$. Es bleibt dann zu zeigen, dass

$$\begin{aligned}
 \sigma'|_{L'} &= r_{\omega, \omega'}(\sigma')|_{L'} = r_{\omega, \omega'}(\gamma', b')|_{L'} = r_{\omega, \omega'}(\iota_{\omega'}(\gamma', b'))|_{L'} = \iota_\omega \circ r(\gamma', b')|_{L'} \\
 &= \iota_\omega((\gamma, b))|_{L'}
 \end{aligned}$$

gilt. Nach (2.1.4) ist $\sigma'|_{\cup_{L^i} \tilde{N}_{L^i|L'}} = \iota_\omega((\gamma, u))$ für ein $u \in U_L^i$ mit $u^{\varphi^{-1}} = \pi^{\gamma^{-1}}$. Wenn wir zeigen können, dass $b/u =: \varepsilon \in \tilde{N}_{L'|L}(U_{L'}^i)$ ist, dann folgt die Behauptung, da in diesem Fall

$$\begin{aligned}
 \iota_\omega((\gamma, b))|_{L'} &= \iota_\omega((\gamma, u\varepsilon))|_{L'} = \iota_\omega((\text{id}_{L^{\text{nr}}}, \varepsilon)(\gamma, u))|_{L'} = (\varepsilon^{-1}, L)|_{L'}\iota_\omega((\gamma, u))|_{L'} = \iota_\omega((\gamma, u))|_{L'} \\
 &= \sigma'|_{L'}
 \end{aligned}$$

ist. Wegen (2.1.4) ist $b/u \in U_L$, da (γ, b) und (γ, u) auf dasselbe Element in Γ projizieren. Sei R ein Vertretersystem für $N_{L'|L}U_{L'}/U_L^i$. Das Normrestsymbol (\cdot, L) induziert uns einen Isomorphismus

$$N_{L'|L}U_{L'}/U_L^i \cong G(\tilde{L}^i|\tilde{L}').$$

Somit ist $\{(v^{-1}, L)(\omega_i) \mid v \in R\} = \{[v]_{h\varphi^{1-i}}(\omega_i) \mid v \in R\}$ ein vollständiges System von Konjugierten von ω_i über \tilde{L} . Wegen $\pi' = \tilde{N}_{L^i|L'}(\omega_i)$ erhalten wir

$$\pi' = \prod_{v \in R} [v]_{h\varphi^{1-i}}(\omega_i),$$

somit

$$\gamma'(\pi') = \sigma'(\pi') = \sigma' \left(\prod_{v \in R} [v]_{h\varphi^{1-i}}(\omega_i) \right).$$

Nun ist

$$\sigma'([v]_{h\varphi^{1-i}}(\omega_i)) = [v]_{h\varphi^{1-i}}^{\sigma'}(\sigma'(\omega_i)) = [v]_{h\varphi^{1-i}}^{\gamma}(\sigma'(\omega_i)),$$

denn $[v]_{h\varphi^{1-i}} \in \mathcal{O}_{\tilde{L}}[[X]]$, $\sigma'|_{\tilde{L}} = \gamma$. Nach (1.2.5) und (2.1.1) ist

$$[v]_{h\varphi^{1-i}}^{\gamma} = [\gamma v]_{h\varphi^{1-i}\gamma}.$$

Zusammengefasst ergibt das

$$\gamma'(\pi') = \prod_{v \in R} [\gamma v]_{h\varphi^{1-i}\gamma}(\sigma'(\omega_i)).$$

Wegen $\sigma'|_{\cup \tilde{L}^i} = \iota_{\omega}((\gamma, u))$ haben wir

$$\sigma'(\omega_i) = [u]_{h,h\gamma}^{\varphi^{1-i}}(\omega_i) = [\varphi^{1-i}u]_{h\varphi^{1-i}, h\varphi^{1-i}\gamma}(\omega_i).$$

Insgesamt finden wir also

$$\gamma'(\pi') = \prod_{v \in R} [\gamma v]_{h\varphi^{1-i}\gamma} \circ [\varphi^{1-i}u]_{h\varphi^{1-i}, h\varphi^{1-i}\gamma}(\omega_i),$$

d.h. in Verbindung mit (1.2.6)

$$\gamma'(\pi') = \prod_{v \in R} [\gamma v \varphi^{1-i}u]_{h\varphi^{1-i}, h\varphi^{1-i}\gamma}(\omega_i).$$

Da $L'|K$ galoissch ist, bilden die $\{\gamma v \mid v \in R\}$ wieder ein Vertretersystem von $N_{L'|L}U_{L'}/U_{L'}^i$, somit ergibt sich

$$\gamma'(\pi') = \prod_{v \in R} [v \varphi^{1-i}u]_{h\varphi^{1-i}, h\varphi^{1-i}\gamma}(\omega_i).$$

Wir berechnen

$$\frac{\varphi'(b')}{b'} = \frac{\gamma'(\pi')}{\pi'} = \frac{\prod_{v \in R} [v \varphi^{1-i}u]_{h\varphi^{1-i}, h\varphi^{1-i}\gamma}}{\prod_{v \in R} [v]_{h\varphi^{1-i}}(\omega_i)}.$$

Nun ist wegen $v \in L$ und (1.2.6)

$$[v \varphi^{1-i}u]_{h\varphi^{1-i}, h\varphi^{1-i}\gamma} = ([vu]_{h,h\gamma})^{\varphi^{1-i}} = ([u]_{h,h\gamma} \circ [v]_h)^{\varphi^{1-i}},$$

d.h.

$$\frac{\varphi'(b')}{b'} = \frac{\prod_{v \in R} ([u]_{h,h\gamma} \circ [v]_h)^{\varphi^{1-i}}(\omega_i)}{\prod_{v \in R} [v]_{h\varphi^{1-i}}(\omega_i)} = \prod_{v \in R} \left(\frac{[u]_{h,h\gamma} \circ [v]_h}{[v]_h} \right)^{\varphi^{1-i}}(\omega_i) = \prod_{v \in R} (g \circ [v]_h)^{\varphi^{1-i}}(\omega_i),$$

wobei wir $g(X) := [u]_{h,h\gamma}(X)/X$ gesetzt haben. Nach (1.3.21) ist $g \in \mathcal{C}^0(\tilde{L}, h)$, d.h. g ist eine Coleman-Potenzreihe. Wir wählen eine Fortsetzung von φ nach L^{ab} , so dass $\varphi' := \varphi_{L'} = \varphi^f|_{L'^{\text{nr}}}$ gilt. Nach (1.3.24) gibt es eine Coleman-Potenzreihe $g_1 \in \mathcal{C}^0(\tilde{L}, h)$, so dass für jedes $v \in U_L$

$$\left((g_1 \circ [v]_h)^{\varphi^{1-i}}(\omega_i) \right)^{\varphi^{-1}} = (g \circ [v]_h)^{\varphi^{1-i}}(\omega_i)$$

gilt, und dieses g_1 erfüllt $g_1^{\varphi^{-1}}(0) = g(0) = u$. Die $(g_1 \circ [v]_h)^{\varphi^{1-i}}(\omega_i), v \in R$, sind genau die Konjugierten von $g_1^{\varphi^{1-i}}(\omega_i)$ über \tilde{L}' , denn g_1 wird von \tilde{L}' -Automorphismen fixiert, und die Konjugierten von ω_i sind genau die $[v]_h^{\varphi^{1-i}}(\omega_i)$. Damit haben wir

$$\prod_{v \in R} (g_1 \circ [v]_h)^{\varphi^{1-i}}(\omega_i) = \tilde{N}_{L^i|L'} \left(g_1^{\varphi^{1-i}}(\omega_i) \right) \in U_{\tilde{L}'}$$

Unter Benutzung von (1.1.4) wählen wir ein $u' \in U_{\tilde{L}'}$ mit

$$\prod_{0 \leq k < f} \varphi^k(u') = \prod_{v \in R} (g_1 \circ [v]_h)^{\varphi^{1-i}}(\omega_i).$$

Es ergibt sich

$$\frac{\varphi'(u')}{u'} = \left(\prod_{0 \leq k < f} \varphi^k(u') \right)^{\varphi^{-1}} = \prod_{v \in R} \left((g_1 \circ [v]_h)^{\varphi^{1-i}}(\omega_i) \right)^{\varphi^{-1}} = \prod_{v \in R} (g \circ [v]_h)^{\varphi^{1-i}}(\omega_i) = \frac{\varphi'(b')}{b'},$$

mit (1.1.2) ist also $b'/u' \in U_{L'}$. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \prod_{0 \leq k < f} \varphi^k(\tilde{N}_{L^i|L} u') &= \tilde{N}_{L^i|L} \left(\prod_{v \in R} (g_1 \circ [v]_h)^{\varphi^{1-i}}(\omega_i) \right) = \tilde{N}_{L^i|L} \tilde{N}_{L^i|L'} \left(g_1^{\varphi^{1-i}}(\omega_i) \right) \\ &= \tilde{N}_{L^i|L} \left(g_1^{\varphi^{1-i}}(\omega_i) \right) = \tilde{N}_{L^i|L} (g_1(\omega_1)), \end{aligned}$$

da die $g_1^{\varphi^{1-i}}(\omega_i)$ normkompatibel sind nach (1.3.19). Es ergibt sich

$$\begin{aligned} \tilde{N}_{L^i|L} (g_1^{\varphi^{1-i}}(\omega_1)) &= \prod_{\omega \in W_h^1 \setminus 0} g_1(\omega) = \frac{1}{g_1(0)} \prod_{\omega \in W_h^1} g_1(\omega) = \frac{1}{g_1(0)} \prod_{\omega \in W_h^1} g_1(0 + \omega) = \frac{\varphi g_1(0)}{g_1(0)} \\ &= g_1^{\varphi^{-1}}(0) = u, \end{aligned}$$

da g_1 eine Coleman-Potenzreihe ist. Zusammengefasst haben wir daher unter Verwendung von $(\gamma, b) = r(\gamma', b'), b'/u' \in U_{L'}$ und (1.1.4)

$$\frac{b}{u} = \prod_{0 \leq k < f} \varphi^k(\tilde{N}_{L^i|L} \frac{b'}{u'}) = N_{L^i|L} \frac{b'}{u'}$$

Damit ist Aussage (a) des Lemmas bewiesen. Für Aussage (b) betrachten wir das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & N_{L^i|L} U_{L'} & \longrightarrow & \mathcal{G}(L|K, \pi) & \longrightarrow & \mathcal{G}(L|K, \pi)/N_{L^i|L} U_{L'} & \longrightarrow & 1 \\ & & \downarrow \cong & & \downarrow i_\omega & & \downarrow \cong & & \\ 1 & \longrightarrow & G(L^{\text{ab}}|L'^{\text{nr}}) & \longrightarrow & G & \longrightarrow & G(L'^{\text{nr}}|K) & \longrightarrow & 1. \end{array}$$

Das Bild von $r_{\omega, \omega'}$ in G projiziert surjektiv auf $G(L'^{\text{nr}}|K)$, da für jedes $\sigma \in G(L'^{\text{nr}}|K)$ die Gleichungen $r_{\omega, \omega'}(\sigma)|_{L'} = \sigma|_{L'}$ und

$$r_{\omega, \omega'}(\sigma)|_{L^{\text{nr}}} = \iota_{\omega} \circ r \circ \iota_{\omega'}^{-1}(\sigma)|_{L^{\text{nr}}} = \iota_{\omega} \circ r(\sigma, 1)|_{L^{\text{nr}}} = \sigma|_{L^{\text{nr}}}$$

gelten. Auf $U_{L'} \subseteq G(L'|K, \pi)$ stimmt r wegen (2.1.6)(b) mit $N_{L'|L}$ überein, damit enthält das Bild von $r_{\omega, \omega'}$ auch $G(L^{\text{ab}}|L'^{\text{nr}})$, d.h. $r_{\omega, \omega'}(G') = G$. \square

§2. Lubin-Tate-Spaltungen

(2.2.1) Definition. Eine **Lubin-Tate-Spaltung** ist eine Spaltung der exakten Sequenz

$$1 \longrightarrow G(K^{\text{sep}}|K^{\text{nr}}) \longrightarrow G(K^{\text{sep}}|K) \longrightarrow \hat{\mathbb{Z}} \longrightarrow 1,$$

entspricht also der Auswahl eines Frobeniusautomorphismus $\varphi \in G(K^{\text{sep}}|K)$. Eine **Lubin-Tate-Nummerierung** über K ist die Wahl eines Primelementes $\pi_L \in \hat{L}$ für jede endliche Galoiserweiterung $L|K$, so dass für jede endliche Galoiserweiterung $M|K$ mit $M \supseteq L$ gilt: $\tilde{N}_{M|L}(\pi_M) = \pi_L$.

Ist $\varphi \in G(K^{\text{sep}}|K)$ ein Frobeniusautomorphismus, dann bezeichnen wir den Fixkörper von φ in K^{sep} mit K_{φ} . K_{φ} ist eine maximal reinverzweigte Erweiterung von K mit $K_{\varphi}K^{\text{nr}} = K^{\text{sep}}$.

(2.2.2) Lemma. Es seien $M, L \subseteq K_{\varphi}$ Erweiterungen K mit $M^{\text{nr}} \supseteq L^{\text{nr}}$. Dann folgt $M \supseteq L$.

Beweis. Sei $\alpha \in L$. Dann ist $M(\alpha) \subseteq K_{\varphi}$, d.h. $M(\alpha)|K$ und somit $M(\alpha)|M$ sind reinverzweigt. Andererseits folgt wegen $\alpha \in L$ auch $\alpha \in M^{\text{nr}}$, was zur Folge hat, dass $M(\alpha)|M$ unverzweigt ist. Damit ergibt sich $M(\alpha) = M$, was $\alpha \in M$ impliziert. \square

(2.2.3) Definition. Sei $K'|K$ endlich. K' heisst **kompatibel** zu (K, φ) , falls K' von φ^f fixiert wird, wobei $f = f(K'|K)$ ist. In diesem Fall setzen wir $\varphi' := \varphi^f$, und es ist $K'_{\varphi'} \supseteq K_{\varphi}$.

(2.2.4) Lemma. Es sei eine Lubin-Tate-Spaltung über K fixiert. Sei $L|K$ endlich galoissch. Dann gelten:

- (a) L besitzt eine endliche unverzweigte Erweiterung, welche zu (K, φ) kompatibel ist.
- (b) Es existiert ein $L' \subseteq K_{\varphi}$ mit $L'^{\text{nr}} = L^{\text{nr}}$.
- (c) Ist L kompatibel mit (K, φ) , dann ist $L' \subseteq L$.

Beweis. Sei $r := \text{ord}_{G(L|K)}(\varphi)$. Setzen wir $M := LK_r^{\text{nr}}$, dann ist $f(M|K) = r$, und M wird von φ^r fixiert, d.h. M ist kompatibel zu (K, φ) . Für $L' := M \cap K_{\varphi}$ erhalten wir $L'K_r^{\text{nr}} = M$, denn

$$[M : L'] = r = [K_r^{\text{nr}} : K] = [K_r^{\text{nr}} : L' \cap K_r^{\text{nr}}] = [L'K_r^{\text{nr}} : L'].$$

Ist L kompatibel mit (K, φ) , dann ist $M = L$, insbesondere also $L' \subseteq L$. \square

(2.2.5) Lemma. Es sei eine Lubin-Tate-Spaltung über K fixiert. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte normkompatible Sequenz von Primelementen

$$\{\pi_L \in L^{\times} \mid K \subseteq L \subseteq K_{\varphi}, [L : K] < \infty\}.$$

Beweis. Sei $L|K$ eine endliche Erweiterung mit $L \subseteq K_\varphi$. Dann ist $L_\infty := L^{\text{ab}} \cap K_\varphi$ eine maximal reinverzweigte abelsche Erweiterung von L . Für die Gruppe der universellen Normen von L_∞ erhalten wir

$$N(L_\infty|L) = \bigcap_{L \subseteq L' \subseteq L_\infty} N_{L'|L}(\hat{L}'^\times) = \pi_L^{\hat{\mathbb{Z}}}$$

mit einem eindeutig bestimmten Primelement $\pi_L \in L$. Damit existiert höchstens ein $\pi_L \in L$, welches universelle Norm von K_φ ist. Da dies für jedes L gilt, gibt es höchstens eine Sequenz normkompatibler Primelemente. Die Menge der Sequenzen normkompatibler Primelemente steht offenbar in Bijektion zu $\varprojlim U_L$, wobei der Limes über alle $K \subseteq L \subseteq K_\varphi$ bezüglich der Normabbildungen gebildet wird. Als projektiver Limes nichtleerer Kompakta ist diese Menge jedoch nichtleer, was die Behauptung impliziert. \square

(2.2.6) Korollar. *Jede Lubin-Tate-Spaltung über K bestimmt eine Lubin-Tate-Nummerierung über K .*

Beweis. Sei $L|K$ endlich galoissch. Dann existiert nach (2.2.4) ein $L' \subseteq K_\varphi$, so dass $L'^{\text{nr}} = L^{\text{nr}}$ ist. Insbesondere ist also $\tilde{L}' = \tilde{L}$. Wir setzen dann $\pi_L := \pi_{L'}$. Ist $M|K$ galoissch mit $M \supseteq L$, dann ergibt sich mit (1.1.4)

$$\tilde{N}_{M|L}\pi_M = \tilde{N}_{M'|L'}\pi_{M'} = N_{M'|L'}\pi_{M'} = \pi_{L'} = \pi_L,$$

da $M'|L'$ reinverzweigt ist. \square

(2.2.7) Korollar. *K_φ hat keine nichttrivialen Automorphismen.*

Beweis. Jeder Automorphismus von K_φ bildet die obige normkompatible Sequenz von Primelementen auf eine normkompatible Sequenz von Primelementen ab, also auf sich selbst. Die Primelemente π_L erzeugen jedoch die reinverzweigten Erweiterungen $L|K$, deswegen muss jeder Automorphismus von K_φ die Identität sein. \square

Im folgenden sei eine Lubin-Tate-Spaltung φ über K fixiert.

(2.2.8) Definition. *Für $L \subseteq K_\varphi$, $[L : K] < \infty$, bezeichne L_n den Klassenkörper zu $\langle \pi_L \rangle U_L^n$, wobei π_L dasjenige Primelement aus L ist, welches uns durch die Lubin-Tate-Spaltung geliefert wird.*

Mit (1.2.7) sehen wir, dass L_n eine reinverzweigte abelsche Erweiterung von L mit $[L_n : L] = q^{n-1}(q-1)$, $L_n \subseteq K_\varphi$ ist. Vermöge (2.2.5) erhalten wir eine normkompatible Sequenz von Primelementen π_{L_n} aus L_n . Wenden wir in dieser Situation (1.3.22) an, dann erhalten wir ein eindeutig bestimmtes $f_L \in \mathcal{F}_{\pi_L, L}^1$, so dass $(\pi_{L_n}) \in \Omega_{f_L}$ ist. Nun sind wir in der Lage, die Ergebnisse des letzten Abschnittes noch etwas umzuformulieren.

(2.2.9) Korollar. *Es sei eine Lubin-Tate-Spaltung über K fixiert, und $L|K$ sei endlich galoissch. Dann gibt es einen kanonischen Isomorphismus*

$$\iota_{L|K} : \mathcal{G}(L|K, \pi_L) \cong G(L^{\text{ab}}|K).$$

Beweis. Um (2.1.4) anwenden zu können, müssen wir zu L eine normkompatible Sequenz von Primelementen $\omega_i \in \tilde{K}^i$ konstruieren. Dazu bestimmen wir zunächst mittels (2.2.4) ein $L' \subseteq K_\varphi$ mit $L'^{\text{nr}} = L^{\text{nr}}$. Die Lubin-Tate-Spaltung liefert uns nach (2.2.6) ein Primelement $\pi_L =$

$\pi_{L'} \in \widetilde{L}$. Wie eben erläutert, erhalten wir eine normkompatible Sequenz von Primelementen $\pi_{L'_i} \in L'_i$. Damit finden wir aufgrund von $L'_i = L'(\pi_{L'_i})$:

$$\widetilde{L}'_i = \widetilde{L}'(\widetilde{\pi_{L'_i}}) = \widetilde{L}'(\pi_{L'_i}) = \widetilde{L}(\pi_{L'_i}) = \widetilde{L}^i,$$

denn $\pi_{L'_i} \in \widetilde{W}_{f_L}^i$, $f_L := f_{L'} \in \mathcal{F}_{\pi_{L'}, L'} \subseteq \mathcal{F}_{\pi_L, \widetilde{L}}$, die Anwendung von (1.2.10) ergibt also die letzte Gleichheit. Setzen wir also $\omega_i := \pi_{L'_i}$, dann ist $\omega_i \in L'_i \subseteq \widetilde{L}'_i = \widetilde{L}^i$. Die Folge der ω_i ist auch normkompatibel in den Körpern \widetilde{L}^i , denn durch Anwenden von (1.1.4) sehen wir:

$$\widetilde{N}_{L^i|L^{i-1}}(\omega_i) = \widetilde{N}_{L'_i|L'_{i-1}}(\pi_{L'_i}) = N_{L'_i|L'_{i-1}}(\pi_{L'_i}) = \pi_{L'_{i-1}} = \omega_{i-1}.$$

Wenden wir nun (2.1.4) auf die Folge der ω_i an, so folgt die Behauptung. \square

Ist L kompatibel mit (K, φ) , dann ist nach (2.2.4) sogar $\pi_L \in L$. In diesem Fall setzen wir für alle $i \geq 1$:

$$L_i := L_{\pi_L, i}, \quad L_\infty := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} L_i$$

(vgl. (1.2.7)). Es ist dann aufgrund von (2.2.4) $f_L \in \mathcal{F}_{\pi_{L'}, L'} \subseteq \mathcal{F}_{\pi_L, L}$, und somit gilt wegen $\omega_i \in \widetilde{W}_{f_L}^i$ mit (1.2.7): $L_i = L(\omega_i)$ für jedes $i \geq 1$. Insbesondere ist $(\omega_n) \in \varprojlim L_n$, und die Potenzreihe $h \in \mathcal{F}_{\pi_L}$ mit $\omega \in \Omega_h$ ist durch $f_{L'}$ gegeben, welches bereits in $\mathcal{F}_{\pi_{L'}}$ liegt. Ausserdem berechnen wir

$$L^i = L_i L^{\text{nr}} = L^{\text{nr}}(\omega_i) = L'^{\text{nr}}(\omega_i) = (L'_i)^{\text{nr}}.$$

Wir wollen nun (2.1.9) unter Benutzung des letzten Korollars umformulieren. Dazu fixieren wir uns endliche, zu (K, φ) kompatible Galoiserweiterungen $M|K$, $L|K$ mit $M \supseteq L$. Wie wir eben gesehen haben, bestimmt uns eine Lubin-Tate-Spaltung zu diesen Galoiserweiterungen normkompatible Folgen $(\omega'_n) \in \Omega_{f_M}$, $(\omega_n) \in \Omega_{f_L}$. Diese sind normkompatibel zueinander, denn aus $M^j \supseteq L^i$ folgt nach der obigen Rechnung $(M'_j)^{\text{nr}} \supseteq (L'_i)^{\text{nr}}$ und mit (2.2.2) finden wir $M'_j \supseteq L'_i$. Aus der Reinverzweigtheit von $M'_j|L'_i$ in Verbindung mit (1.1.4) schliessen wir

$$\widetilde{N}_{M^j|L^i} \omega'_j = \widetilde{N}_{M'_j|L'_i} \omega'_j = N_{M'_j|L'_i} \pi_{M'_j} = \pi_{L'_i} = \omega_i.$$

Wir müssen nun noch das System \mathcal{L} aus (2.1.9) konstruieren. Ist $F|K$ endlich galoissch mit $L \subseteq M \subseteq F \subseteq L^{\text{ab}}$, dann finden wir mit (2.2.4) eine zu (K, φ) kompatible Galoiserweiterung $E|K$ mit $L \subseteq M \subseteq E \subseteq L^{\text{ab}}$. Das System der Erweiterungen $E|K$ ist natürlich kofinal in $L^{\text{ab}}|K$, und jede der Erweiterungen $E|K$ ist mit einer Folge $(\omega''_n) \in \Omega_{f_E}$ ausgestattet. Die Normkompatibilität dieser Folge mit (ω'_n) , (ω_n) erhalten wir mit derselben Argumentation wie oben. Damit ist die Liftungseigenschaft (L) erfüllt. Wir erhalten:

(2.2.10) Korollar. *Ist eine Lubin-Tate-Spaltung (K, φ) fixiert, und sind $M|K$, $L|K$ endliche, zu (K, φ) kompatible Galoiserweiterungen mit $M \supseteq L$, dann ist das Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}(M|K, \pi_M) & \xrightarrow{r_{M|L}} & \mathcal{G}(L|K, \pi_L) \\ \downarrow \iota_{M|K} & & \downarrow \iota_{L|K} \\ G(M^{\text{ab}}|K) & \xrightarrow{\text{res}} & G(L^{\text{ab}}|K) \end{array}$$

kommutativ.

\square

§3. Die Gruppe $\mathfrak{G}(K, \varphi)$ und die metabelsche Normabbildung

Ab jetzt sei eine Lubin-Tate-Spaltung φ über K fixiert. Wir haben im letzten Abschnitt gesehen, dass uns dies ein Primelement $\pi \in K$, eine normkompatible Folge von Primelementen $\pi_i \in K_i$ sowie eine Potenzreihe $f_K \in \mathcal{F}_{\pi, K}$ mit $(\pi_i) \in \Omega_{f_K}$ liefert. Für $a \in \mathcal{O}_K$ setzen wir

$$[a]_K := [a]_{f_K}, \quad \{a\}_K := \rho_K([a]_K) \in \mathbb{F}_q[[X]],$$

wobei ρ_K die Reduktion modulo π bezeichne.

(2.3.1) Definition. *Wir setzen*

$$\mathfrak{G}_d(K, \varphi) := \left\{ (a, \xi) \in \hat{K}^\times \times \overline{\mathbb{F}_q}[[X]]^\times \mid a = u\pi^\nu, u \in U_K, \nu \in \hat{\mathbb{Z}}, \frac{\xi^{\varphi^d}}{\xi} = \frac{\{u\}_K}{X} \right\}$$

und erklären auf $\mathfrak{G}_d(K, \varphi)$ eine Verknüpfung mittels

$$(a_1, \xi_1)(a_2, \xi_2) = \left(a_1 a_2, \xi_1 \cdot (\xi_2^{\varphi^{-\nu_1}} \circ \{u_1\}_K) \right),$$

wobei $a_1 = u_1 \pi_K^{\nu_1}$, $u_1 \in U_K$ ist.

(2.3.2) Proposition. *Mit der obigen Verknüpfung wird $\mathfrak{G}_d(K, \varphi)$ eine Gruppe mit neutralem Element $(1, 1)$. Das inverse Element zu (a, ξ) ist gegeben durch*

$$(a^{-1}, 1/(\xi^{\varphi^\nu} \circ \{u^{-1}\}_K)).$$

Ferner existiert eine exakte Sequenz

$$1 \longrightarrow \mathbb{F}_{q^d}[[X]]^\times \longrightarrow \mathfrak{G}_d(K, \varphi) \longrightarrow \hat{K}^\times \longrightarrow 1.$$

Beweis. Seien $(a_1, \xi_1), (a_2, \xi_2), (a_3, \xi_3) \in \mathfrak{G}_d(K, \varphi)$. Wir beweisen zunächst die Wohldefiniertheit unserer Verknüpfung. Dazu müssen wir zeigen, dass $(a_1 a_2, \xi_1 \cdot (\xi_2^{\varphi^{-\nu_1}} \circ \{u_1\}_K))$ der definierenden Relation von $\mathfrak{G}_d(K, \varphi)$ genügt, dass also

$$\frac{(\xi_1 \cdot (\xi_2^{\varphi^{-\nu_1}} \circ \{u_1\}_K))^{\varphi^d}}{\xi_1 \cdot (\xi_2^{\varphi^{-\nu_1}} \circ \{u_1\}_K)} = \frac{\{u_1 u_2\}_K}{X}$$

gilt. Wir berechnen

$$\begin{aligned} \frac{(\xi_1 \cdot (\xi_2^{\varphi^{-\nu_1}} \circ \{u_1\}_K))^{\varphi^d}}{\xi_1 \cdot (\xi_2^{\varphi^{-\nu_1}} \circ \{u_1\}_K)} &= \frac{\xi_1^{\varphi^d}}{\xi_1} \cdot \frac{(\xi_2^{\varphi^{-\nu_1}} \circ \{u_1\}_K)^{\varphi^d}}{\xi_2^{\varphi^{-\nu_1}} \circ \{u_1\}_K} = \frac{\{u_1\}_K}{X} \cdot \left(\left(\frac{\xi_2^{\varphi^d}}{\xi_2} \right)^{\varphi^{-\nu_1}} \circ \{u_1\}_K \right) \\ &= \frac{\{u_1\}_K}{X} \cdot \left(\frac{\{u_2\}_K}{X} \circ \{u_1\}_K \right) = \frac{\{u_1\}_K}{X} \cdot \frac{\{u_2\}_K \circ \{u_1\}_K}{\{u_1\}_K} \\ &= \frac{\{u_1 u_2\}_K}{X}, \end{aligned}$$

wobei wir verwendet haben, dass $\{u_1\}_K, \{u_2\}_K$ Elemente von $\mathbb{F}_q[[X]]$ sind und von φ fixiert werden. Der Nachweis des Assoziativgesetzes ergibt sich wie folgt:

$$\begin{aligned}
((a_1, \xi_1)(a_2, \xi_2))(a_3, \xi_3) &= \left(a_1 a_2, \xi_1 \cdot (\xi_2^{\varphi^{-\nu_1}} \circ \{u_1\}_K) \right) (a_3, \xi_3) \\
&= \left(a_1 a_2 a_3, \xi_1 \cdot (\xi_2^{\varphi^{-\nu_1}} \circ \{u_1\}_K) \cdot (\xi_3^{\varphi^{-(\nu_1+\nu_2)}} \circ \{u_1 u_2\}) \right) \\
&= \left(a_1 a_2 a_3, \xi_1 \cdot \left((\xi_2^{\varphi^{-\nu_1}} \cdot (\xi_3^{\varphi^{-(\nu_1+\nu_2)}} \circ \{u_2\}_K)) \circ \{u_1\}_K \right) \right) \\
&= \left(a_1 a_2 a_3, \xi_1 \cdot \left((\xi_2 \cdot (\xi_3^{\varphi^{-\nu_2}} \circ \{u_2\}_K))^{\varphi^{-\nu_1}} \circ \{u_1\}_K \right) \right) \\
&= \left(a_1, \xi_1 \right) (a_2 a_3, \xi_2 \cdot (\xi_3^{\varphi^{-\nu_2}} \circ \{u_2\}_K)) \\
&= (a_1, \xi_1) ((a_2, \xi_2)(a_3, \xi_3)).
\end{aligned}$$

Sei $(a, \xi) \in \mathfrak{G}_d(K, \varphi)$. Das Element $(a^{-1}, 1/(\xi^{\varphi^\nu} \circ \{u^{-1}\}_K))$ liegt ebenfalls in $\mathfrak{G}_d(K, \varphi)$, denn

$$\begin{aligned}
\frac{1/(\xi^{\varphi^\nu} \circ \{u^{-1}\}_K)}{1/(\xi^{\varphi^\nu} \circ \{u^{-1}\}_K)} &= \frac{\xi^{\varphi^\nu} \circ \{u^{-1}\}_K}{(\xi^{\varphi^\nu})^{\varphi^d} \circ \{u^{-1}\}_K} = \frac{\xi^{\varphi^\nu}}{(\xi^{\varphi^\nu})^{\varphi^d}} \circ \{u^{-1}\}_K = \frac{\xi}{\xi^{\varphi^d}} \circ \{u^{-1}\}_K \\
&= \frac{X}{\{u\}_K} \circ \{u^{-1}\}_K = \frac{\{u^{-1}\}_K}{X}.
\end{aligned}$$

Des weiteren erhalten wir

$$\begin{aligned}
(a, \xi) \left(a^{-1}, \frac{1}{\xi^{\varphi^\nu} \circ \{u^{-1}\}_K} \right) &= \left(1, \xi \cdot \left(\left(\frac{1}{\xi^{\varphi^\nu} \circ \{u^{-1}\}_K} \right)^{\varphi^{-\nu}} \circ \{u\}_K \right) \right) \\
&= \left(1, \xi \cdot \left(\frac{1}{\xi \circ \{u^{-1}\}_K} \circ \{u\}_K \right) \right) \\
&= \left(1, \xi \cdot \frac{1}{\xi \circ \{u^{-1}\}_K \circ \{u\}_K} \right) \\
&= (1, 1).
\end{aligned}$$

Damit ist $\mathfrak{G}_d(K, \varphi)$ in der Tat eine Gruppe. Zum Nachweis der Exaktheit der obigen Sequenz bemerken wir zunächst, dass $\xi^{\varphi^d-1} = 1$ stets $\xi \in \mathbb{F}_{q^d}[[X]]^\times$ impliziert. Ist $a \in \hat{K}^\times$, dann lässt sich eine Potenzreihe $\xi \in \overline{\mathbb{F}_q}[[X]]^\times$ mit $(a, \xi) \in \mathfrak{G}_d(K, \varphi)$ finden, da sich die Koeffizienten von ξ sukzessive durch Lösen polynomialer Gleichungen gewinnen lassen. \square

Wir werden nun $\mathfrak{G}_d(K, \varphi)$ dergestalt mit einer Topologie versehen, dass $\mathfrak{G}_d(K, \varphi)$ diesbezüglich eine topologische Gruppe wird. Dies werden wir im folgenden durch die Angabe eines vollständigen Systems von Umgebungen der Eins in $\mathfrak{G}_d(K, \varphi)$ erreichen.

(2.3.3) Definition. Die Mengen $\mathfrak{G}_d(K, \varphi)^{(i,j)}$ seien für $i, j \in \mathbb{N}$ mit $j < q^i$ definiert als

$$\mathfrak{G}_d(K, \varphi)^{(i,j)} := \{(a, \xi) \in \mathfrak{G}_d(K, \varphi) \mid a \in \langle \pi^{q^i(q-1)d} \rangle U_K^i, \xi \equiv 1 \pmod{(X^j)}\},$$

wobei wir $U_K^0 := U_K$ setzen.

(2.3.4) Proposition. Es seien $i, j \in \mathbb{N}$ mit $j < q^i$. Dann ist $\mathfrak{G}_d(K, \varphi)^{(i,j)}$ ein abstrakter Normalteiler von $\mathfrak{G}_d(K, \varphi)$.

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass $\mathfrak{G}_d(K, \varphi)^{(i,j)}$ eine Untergruppe von $\mathfrak{G}_d(K, \varphi)$ ist. Offenbar ist $(1, 1) \in \mathfrak{G}_d(K, \varphi)^{(i,j)}$. Sei $(a, \xi) \in \mathfrak{G}_d(K, \varphi)^{(i,j)}$, mit $a = \pi^{rd}u, u \in U_K^i$. Dann ist $a^{-1} = \pi^{-rd}$, und aufgrund von $\{u^{-1}\}_K \equiv 0 \pmod{X}$ gilt auch

$$\xi^{\varphi^\nu} \circ \{u^{-1}\}_K \equiv \xi^{\varphi^\nu} \equiv 1 \pmod{X^j},$$

d.h. $(a, \xi)^{-1} \in \mathfrak{G}_d(K, \varphi)^{(i,j)}$. Sind $(a_1, \xi_1), (a_2, \xi_2) \in \mathfrak{G}_d(K, \varphi)^{(i,j)}$, dann finden wir

$$(a_1, \xi_1)(a_2, \xi_2) = \left(a_1 a_2, \xi_1 \cdot (\xi_2^{\varphi^{-\nu_1}} \circ \{u_1\}_K) \right) \in \mathfrak{G}_d(K, \varphi)^{(i,j)},$$

denn $a_1 a_2 \in \langle \pi^d \rangle U_K^i, \xi_1 \cdot (\xi_2^{\varphi^{-\nu_1}} \circ \{u_1\}_K) \equiv 1 \cdot 1 \pmod{X^j}$. Es verbleibt uns nun, die Normalität von $\mathfrak{G}_d(K, \varphi)^{(i,j)}$ in $\mathfrak{G}_d(K, \varphi)$ zu zeigen. Dafür bemerken wir zunächst, dass $u \in U_K^i$ stets $\{u\}_K \equiv X \pmod{X^j}$ impliziert. Es ist nämlich vermöge (1.2.5)

$$[u]_K = [1 + c\pi^i]_K = F_K([1]_K, [c]_K \circ [\pi^i]_K).$$

Nun gilt $[\pi^i] = f_K^{(i)} := f_K \circ \dots \circ f_K$. Wegen $f_K \equiv X^q \pmod{\pi}$ folgt $f_K^{(i)} \equiv X^{q^i} \pmod{\pi}$, somit wegen $j \leq q^i$: $f_K^{(i)} \equiv 0 \pmod{(\pi, X^j)}$. Daraus schliessen wir

$$[u]_K = F_K(X, [c]_K \circ f_K^{(i)}) \equiv X \pmod{(\pi, X^j)},$$

d.h. $\{u\}_K \equiv X \pmod{X^j}$. Seien nun $(a, \xi) \in \mathfrak{G}_d(K, \varphi), (\tilde{a}, \tilde{\xi}) \in \mathfrak{G}_d(K, \varphi)^{(i,j)}, a = u\pi^\nu, \tilde{a} = \tilde{u}\pi^{\tilde{\nu}}$. Dann ergibt sich

$$\begin{aligned} (a, \xi)(\tilde{a}, \tilde{\xi})(a, \xi)^{-1} &= (a, \xi)(\tilde{a}, \tilde{\xi}) \left(a^{-1}, \frac{1}{\xi^{\varphi^\nu} \circ \{u^{-1}\}_K} \right) \\ &= \left(a\tilde{a}, \xi \cdot (\tilde{\xi}^{\varphi^{-\nu}} \circ \{u\}_K) \right) \left(a^{-1}, \frac{1}{\xi^{\varphi^\nu} \circ \{u^{-1}\}_K} \right) \\ &= \left(\tilde{a}, \left(\xi \cdot (\tilde{\xi}^{\varphi^{-\nu}} \circ \{u\}_K) \right) \cdot \left(\left(\frac{1}{\xi^{\varphi^\nu} \circ \{u^{-1}\}_K} \right)^{\varphi^{-(\nu+\tilde{\nu})}} \circ \{u\tilde{u}\}_K \right) \right) \\ &= \left(\tilde{a}, \frac{\xi \cdot (\tilde{\xi}^{\varphi^{-\nu}} \circ \{u\}_K)}{\xi^{\varphi^{-\tilde{\nu}}} \circ \{u^{-1}\}_K \circ \{u\}_K \circ \{\tilde{u}\}_K} \right) = \left(\tilde{a}, \xi \cdot \frac{\tilde{\xi}^{\varphi^{-\nu}} \circ \{u\}_K}{\xi^{\varphi^{-\tilde{\nu}}} \circ \{\tilde{u}\}_K} \right). \end{aligned}$$

Wie oben erkennen wir $\tilde{\xi}^{\varphi^{-\nu}} \circ \{u\}_K \equiv 1 \pmod{X^j}$, und mittels der eben gemachten Bemerkung schliessen wir

$$\xi^{\varphi^{-\tilde{\nu}}} \circ \{\tilde{u}\}_K \equiv \xi^{\varphi^{-\tilde{\nu}}} \pmod{X^j}.$$

Aufgrund von $(a, \xi) \in \mathfrak{G}_d(K, \varphi)$ gilt $\xi^{\varphi^d} = \xi \cdot \{u\}/X$. Daraus erhalten wir induktiv für alle $m \in \mathbb{Z}$

$$\xi^{\varphi^{md}} = \xi \cdot \left(\frac{\{u\}_K}{X} \right)^m.$$

Nach Voraussetzung ist $\tilde{\nu} = rq^i(q-1)d$ mit einem $r \in \mathbb{Z}$. Wir finden somit

$$\xi^{\varphi^{-\tilde{\nu}}} = \xi \cdot \left(\frac{\{u\}_K}{X} \right)^{-rq^i(q-1)}$$

Wir setzen $\eta := (\{u\}_K/X)^{-r}$. Offenbar ist $\eta \in \mathbb{F}_q[[X]]^\times$. Daraus schliessen wir $\eta^{q-1} \equiv 1 \pmod{X}$, und somit

$$\eta^{q^i(q-1)} \equiv 1 \pmod{X^{q^i}}.$$

Wegen $j < q^i$ erhalten wir schliesslich

$$\xi^{\varphi^{-\bar{v}}} = \xi \eta^{q^i(q-1)} \equiv \xi \pmod{X^j},$$

insgesamt also $(a, \xi)(\tilde{a}, \tilde{\xi})(a, \xi)^{-1}(a, \xi) \in \mathfrak{G}_d(K, \varphi)^{(i,j)}$, d.h. $\mathfrak{G}_d(K, \varphi)^{(i,j)}$ ist Normalteiler in $\mathfrak{G}_d(K, \varphi)$. \square

Das System der $\mathfrak{G}_d(K, \varphi)^{(i,j)}$ erfüllt ausserdem $\bigcap_{i,j} \mathfrak{G}_d(K, \varphi)^{(i,j)} = 1$ sowie

$$\mathfrak{G}_d(K, \varphi)^{(i_1, j_1)} \cap \mathfrak{G}_d(K, \varphi)^{(i_2, j_2)} = \mathfrak{G}_d(K, \varphi)^{(\max\{i_1, i_2\}, \min\{j_1, j_2\})}.$$

In Verbindung mit (2.3.4) folgt, dass die $\mathfrak{G}_d(K, \varphi)^{(i,j)}$ ein vollständiges System von Umgebungen der Eins im Sinne von [Po], §18, Satz 9 bilden. Auf diese Weise wird $\mathfrak{G}_d(K, \varphi)$ zu einer topologischen Gruppe.

(2.3.5) Definition. Seien $d, e \in \mathbb{N}$. Mit $\chi_{de,e}$ werde die Übergangsabbildung

$$\chi_{de,e} : \mathfrak{G}_{de}(K, \varphi) \rightarrow \mathfrak{G}_d(K, \varphi), (a, \xi) \mapsto \left(a, \prod_{0 \leq i < e} \xi^{\varphi^{di}} \right)$$

bezeichnet.

(2.3.6) Proposition. Es seien $d, e \in \mathbb{N}$. Die Abbildung $\chi_{de,e}$ ist ein stetiger Gruppenhomomorphismus.

Beweis. Die Abbildung $\chi_{de,e}$ ist wohldefiniert, denn mit $(a, \xi) \in \mathfrak{G}_{de}(K, \varphi)$, $a = u\pi^\nu$ erhalten wir

$$\frac{\left(\prod_{0 \leq i < e} \xi^{\varphi^{di}} \right)^{\varphi^d}}{\prod_{0 \leq i < e} \xi^{\varphi^{di}}} = \xi^{\varphi^{de} - 1} = \frac{\{u\}_K}{X},$$

und somit $\chi_{de,e}(a, \xi) \in \mathfrak{G}_d(K, \varphi)$. Seien $(a_1, \xi_1), (a_2, \xi_2) \in \mathfrak{G}_d(K, \varphi)$, $a_1 = u_1\pi^{\nu_1}$, $u_1 \in U_K$. Wir berechnen

$$\begin{aligned} \chi_{de,e}((a_1, \xi_1)(a_2, \xi_2)) &= \chi_{de,e}\left(a_1 a_2, \xi_1 \cdot (\xi_2^{\varphi^{-\nu_1}} \circ \{u_1\}_K)\right) \\ &= \left(a_1 a_2, \prod_{0 \leq i < e} \left(\xi \cdot (\xi_2^{\varphi^{-\nu_1}} \circ \{u_1\}_K) \right)^{\varphi^{di}} \right) \\ &= \left(a_1 a_2, \prod_{0 \leq i < e} \xi_1^{\varphi^{di}} \cdot \left(\left(\prod_{0 \leq i < e} \xi_2^{\varphi^{di}} \right)^{\varphi^{-\nu_1}} \circ \{u_1\}_K \right) \right) \\ &= \left(a_1, \prod_{0 \leq i < e} \xi_1^{\varphi^{di}} \right) \left(a_2, \prod_{0 \leq i < e} \xi_2^{\varphi^{di}} \right) \\ &= \chi_{de,e}(a_1, \xi_1) \chi_{de,e}(a_2, \xi_2). \end{aligned}$$

Zum Beweis der Stetigkeit merken wir an, dass offenbar

$$\chi_{de}(\mathfrak{G}_{de}(K, \varphi)^{(i,j)}) \subseteq \mathfrak{G}_d(K, \varphi)^{(i,j)}$$

für alle $i, j \in \mathbb{N}$ mit $j < q^i$ gilt. \square

(2.3.7) Definition. Bezüglich der Übergangsabbildungen $\chi_{de,e}$ setzen wir

$$\mathfrak{G}(K, \varphi) := \varprojlim \mathfrak{G}_d(K, \varphi)$$

und versehen $\mathfrak{G}(K, \varphi)$ mit der Limestopologie.

(2.3.8) Korollar. Für alle $d, e \in \mathbb{N}$ existiert ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & \mathbb{F}_{q^{de}}[[X]]^\times & \longrightarrow & \mathfrak{G}_{de}(K, \varphi) & \longrightarrow & \hat{K}^\times \longrightarrow 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ 1 & \longrightarrow & \mathbb{F}_{q^d}[[X]]^\times & \longrightarrow & \mathfrak{G}_d(K, \varphi) & \longrightarrow & \hat{K}^\times \longrightarrow 1. \end{array}$$

Beweis. Es genügt anzumerken, dass $\xi \in \mathbb{F}_{q^{de}}[[X]]$ stets

$$\left(\prod_{0 \leq i < e} \xi^{\varphi^{di}} \right)^{\varphi^d} = \prod_{0 \leq i < e} \xi^{\varphi^{di}} \in \mathbb{F}_{q^d}[[X]]$$

zur Folge hat. □

Sei $L|K$ eine endliche galoissche, mit (K, φ) kompatible Erweiterung. Wir erhalten durch die Lubin-Tate-Spaltung ein Primelement $\pi_L \in \tilde{L}$, eine normkompatible Sequenz von Primelementen $\omega = (\omega_i) \in \varprojlim L_i^\times$ und eine Potenzreihe $f_L \in \mathcal{F}_{\pi_L, L}$ mit $\omega \in \Omega_{f_L}$. Nach (1.3.19) erhalten wir einen Isomorphismus

$$\Psi_L : \mathcal{U}(\tilde{L}) := \varprojlim U_{\tilde{L}^i} \rightarrow \mathcal{C}^0(\tilde{L}, f_L), \quad (u_m) \mapsto g, \quad \left(g^{\varphi_L^{1-m}}(\omega_m) \right) = (u_m).$$

Bezeichnet ρ_L die Reduktion mod π_L , dann liefert uns Ψ_L einen weiteren Isomorphismus

$$\bar{\Psi}_L : \mathcal{U}(\tilde{L}) \rightarrow \overline{\mathbb{F}_q}[[X]]^\times, \quad (u_m) \mapsto \Psi_L((u_m))^{\rho_L}.$$

(2.3.9) Lemma. Sei $K'|K$ eine endliche, mit (K, φ) kompatible Erweiterung. Dann existiert zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $m \in \mathbb{N}$, so dass $K_n \subseteq K'_m$ gilt.

Beweis. Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $K_n K'|K'$ eine abelsche, reinverzweigte Erweiterung. Aus der Kompatibilität von K' mit (K, φ) folgt $\pi_{K'} \in K'$, und für hinreichend grosses $m \in \mathbb{N}$ ergibt sich

$$N_{K_n K'|K'}(K_n K')^\times \supseteq \langle \pi_{K'} \rangle U_{K'}^m = N_{K'_m|K'} K'_m{}^\times,$$

d.h. $K_n \subseteq K'_m$. □

(2.3.10) Definition. Sei $K'|K$ eine endliche Erweiterung, welche kompatibel mit (K, φ) ist. Sei $f = f(K'|K)$. Wir definieren, vgl. (1.3.19):

$$\mathfrak{M}_{K'|K}^d : \mathcal{U}(\tilde{K}') \rightarrow \mathcal{U}(\tilde{K}), \quad (u'_m) \mapsto (u_n),$$

$$u_n = \prod_{0 \leq l < f} \varphi^{ld} \left(\tilde{N}_{K'_m|K_n}(u'_m) \right), \quad m \gg n,$$

wobei $m \gg n$ bedeute, dass m vermöge (2.3.9) hinreichend gross gewählt sei, so dass $K'_m \supseteq K_n$ ist. Unter Beachtung der eben gemachten Bemerkung definieren wir Abbildungen

$$\mathcal{M}_{K'|K}^d := \bar{\Psi}_K \circ \mathfrak{M}_{K'|K}^d \circ \bar{\Psi}_{K'}^{-1} : \bar{\mathbb{F}}_q[[X]]^\times \rightarrow \bar{\mathbb{F}}_q[[X]]^\times$$

und

$$M_{K'|K}^d : \mathfrak{G}_d(K', \varphi') \rightarrow \mathfrak{G}_d(K, \varphi), \quad (a', \xi') \mapsto (N_{K'|K} a', \mathcal{M}_{K'|K}^d(\xi')).$$

(2.3.11) Proposition. (a) Die Abbildung $M_{K'|K}^d$ ist wohldefiniert.

(b) Wir haben für jedes $e > 1$ ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{G}_{de}(K', \varphi') & \xrightarrow{M_{K'|K}^{de}} & \mathfrak{G}_{de}(K, \varphi) \\ \chi_{de,e} \downarrow & & \downarrow \chi_{de,e} \\ \mathfrak{G}_d(K', \varphi') & \xrightarrow{M_{K'|K}^d} & \mathfrak{G}_d(K, \varphi). \end{array}$$

Beweis. Sei $(a', \xi') \in \mathfrak{G}_d(K', \varphi')$. Wir müssen zeigen, dass $(N_{K'|K} a', \mathcal{M}_{K'|K}^d(\xi')) \in \mathfrak{G}_d(K, \varphi)$ ist. Ist $a' = u' \pi'^{\nu'}$, dann erhalten wir $N_{K'|K} a' = N_{K'|K}(u') \pi'^{\nu' f}$. Zu zeigen ist also

$$\frac{\mathcal{M}_{K'|K}^d(\xi')^{\varphi^d}}{\mathcal{M}_{K'|K}^d(\xi')} = \frac{\{N_{K'|K} u'\}_K}{X}.$$

Sei (u'_m) das eindeutig bestimmte Element aus $\mathcal{U}(K')$ mit $\bar{\Psi}'_K((u'_m)) = \xi'$. Wir finden für $m \gg n$:

$$\begin{aligned} \left(\mathfrak{M}_{K'|K}^d(u'_m) \right)_n^{\varphi^d - 1} &= \left(\prod_{0 \leq l < f} \varphi^{ld} \left(\tilde{N}_{K'_m|K_n} u'_m \right) \right)^{\varphi^d - 1} = \left(\tilde{N}_{K'_m|K_n} u'_m \right)^{\varphi^d - 1} \\ &= \tilde{N}_{K'_m|K_n} u'_m \varphi^{d-1}. \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung ist

$$\frac{\xi'^{\varphi^d}}{\xi'} = \frac{\{u'\}_{K'}}{X},$$

somit

$$\bar{\Psi}_{K'}^{-1} \left(\frac{\xi'^{\varphi^d}}{\xi'} \right) = \bar{\Psi}_{K'}^{-1} \left(\frac{\{u'\}_{K'}}{X} \right).$$

Offenbar ist

$$\bar{\Psi}_{K'}^{-1} \left(\frac{\xi'^{\varphi^d}}{\xi'} \right) = \left(u'_m \varphi^{d-1} \right),$$

denn nach Konstruktion von $\Psi_{K'}$ folgt

$$\left(\Psi_{K'}((u'_m)) \right)^{\varphi^{1-l}} (\pi_{K'_l}) = u'_l.$$

Das impliziert

$$\left(\frac{\Psi_{K'}((u'_m))^{\varphi'^d}}{\Psi_{K'}((u'_m))} \right)^{\varphi'^{1-l}} (\pi_{K'_l}) = \frac{(\Psi_{K'}((u'_m))^{\varphi'^{1-l}})^{\varphi'^d}}{\Psi_{K'}((u'_m))^{\varphi'^{1-l}}} (\pi_{K'_l}) = u'_l{}^{\varphi'^d-1},$$

somit also

$$\Psi_{K'}((u'_m{}^{\varphi'^d-1})) = \frac{(\Psi_{K'}((u'_m)))^{\varphi'^d}}{\Psi_{K'}((u'_m))}.$$

Damit ergibt sich

$$\bar{\Psi}_{K'}^{-1} \left(\frac{\xi'^{\varphi'^d}}{\xi'} \right) = (u'_m{}^{\varphi'^d-1}),$$

was genau die obige Behauptung ist. Wir erhalten

$$(u'_m{}^{\varphi'^d-1}) = \bar{\Psi}_{K'}^{-1} \left(\frac{\{u'\}_{K'}}{X} \right).$$

Nach (1.3.21) ist die Reihe $[u]_{K'}/X \in \mathcal{C}^0(\widetilde{K}', f_{K'})$ die eindeutig bestimmte Coleman-Potenzreihe, welche modulo π' auf $\{u\}_{K'}/X$ abgebildet wird. Wir berechnen

$$([u]_{K'})^{\varphi'^{1-m}} ((u', K')(\pi_{K'_m})) = [u]_{K'}^{\varphi'^{1-m}} \circ [u^{-1}]_{K'}^{\varphi'^{1-m}} (\pi_{K'_m}) = \pi_{K'_m},$$

d.h. $\Psi((u', K')(\pi_{K'_m})) = [u]_{K'}$. Trivialerweise ist $\Psi((\pi_{K'_m})) = X$. Zusammengefasst haben wir also

$$\bar{\Psi}_{K'}^{-1} \left(\frac{\{u'\}_{K'}}{X} \right) = \left(\frac{(u', K')(\pi_{K'_m})}{\pi_{K'_m}} \right).$$

Setzen wir dies in unsere obige Rechnung ein, dann erhalten wir

$$\begin{aligned} \left(\mathfrak{M}_{K'|K}^d(u'_m) \right)_n^{\varphi^d-1} &= \tilde{N}_{K'_m|K_n} u'_m{}^{\varphi'^d-1} = \tilde{N}_{K'_m|K_n} \frac{(u', K')(\pi_{K'_m})}{\pi_{K'_m}} = \frac{(u', K')(\pi_{K_n})}{\pi_{K_n}} \\ &= \frac{(N_{K'|K} u', K)(\pi_{K_n})}{\pi_{K_n}}. \end{aligned}$$

Mit denselben Argumenten wie eben finden wir

$$\begin{aligned} \frac{(\mathcal{M}_{K'|K}^d(\xi'))^{\varphi^d}}{\mathcal{M}_{K'|K}^d(\xi')} &= \frac{((\mathcal{M}_{K'|K}^d \circ \bar{\Psi}_{K'})((u'_m)))^{\varphi^d}}{(\mathcal{M}_{K'|K}^d \circ \bar{\Psi}_{K'})((u'_m))} = \frac{((\bar{\Psi}_K \circ \mathfrak{M}_{K'|K}^d)(u'_m))^{\varphi^d}}{(\bar{\Psi}_K \circ \mathfrak{M}_{K'|K}^d)(u'_m)} \\ &= \bar{\Psi}_K \left(\left(\mathfrak{M}_{K'|K}^d((u'_m)) \right)^{\varphi^d-1} \right) = \bar{\Psi}_K \left(\frac{(N_{K'|K} u', K)(\pi_{K_n})}{\pi_{K_n}} \right) \\ &= \frac{\{N_{K'|K} u'\}_K}{X}, \end{aligned}$$

damit ist Aussage (a) bewiesen. Sei $(a', \xi') \in \mathfrak{G}_{de}(K', \varphi')$. Es ergibt sich

$$M_{K'|K}^d(\chi_{de,e}(a', \xi')) = M_{K'|K}^d \left(a, \prod_{0 \leq i < e} \xi'^{\varphi'^{di}} \right) = \left(N_{K'|K} a, \mathcal{M}_{K'|K}^d \left(\prod_{0 \leq i < e} \xi'^{\varphi'^{di}} \right) \right).$$

Sei $(u'_m) \in \mathcal{U}(K')$ mit $\bar{\Psi}_{K'}((u'_m)) = \xi'$. Dann gilt für $m \gg n$:

$$\begin{aligned}
\Psi_K^{-1} \left(\mathcal{M}_{K'|K}^d \left(\prod_{0 \leq i < e} \xi'^{\varphi'^{di}} \right) \right)_n &= \mathfrak{M}_{K'|K}^d \left(\left(\prod_{0 \leq i < e} u'_m \varphi'^{di} \right) \right)_n \\
&= \prod_{0 \leq l < f} \varphi^{ld} \tilde{N}_{K'_m|K_n} \prod_{0 \leq i < e} u'_m \varphi'^{di} \\
&= \prod_{0 \leq i < e} \prod_{0 \leq l < f} \varphi^{(l+i)d} \tilde{N}_{K'_m|K_n} u'_m = \prod_{0 \leq j < ef} \varphi^j \tilde{N}_{K'_m|K_n} u'_m \\
&= \prod_{0 \leq i < e} \prod_{0 \leq l < f} \varphi^{(le+i)d} \tilde{N}_{K'_m|K_n} u'_m \\
&= \prod_{0 \leq i < e} \left(\prod_{0 \leq l < f} \varphi^{lde} \tilde{N}_{K'_m|K_n} u'_m \right)^{\varphi^{di}} \\
&= \prod_{0 \leq i < e} \left((\mathfrak{M}_{K'|K}^{de}(u'_m))_n \right)^{\varphi^{di}}.
\end{aligned}$$

Es ergibt sich

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{K'|K}^d \left(\prod_{0 \leq i < e} \xi'^{\varphi'^{di}} \right) &= \prod_{0 \leq i < e} \bar{\Psi}_K \left(\mathfrak{M}_{K'|K}^{de}((u'_m)) \right)^{\varphi'^{di}} = \prod_{0 \leq i < e} \mathcal{M}_{K'|K}^{de}(\bar{\Psi}_{K'}(u'_m))^{\varphi'^{di}} \\
&= \prod_{0 \leq i < e} \mathcal{M}_{K'|K}^{de}(\xi')^{\varphi'^{di}}.
\end{aligned}$$

Zusammengefasst ergibt sich

$$\begin{aligned}
M_{K'|K}^d(\chi_{d,e}(a', \xi')) &= \left(N_{K'|K} a, \mathcal{M}_{K'|K}^d \left(\prod_{0 \leq i < e} \xi'^{\varphi'^{di}} \right) \right) \\
&= \left(N_{K'|K} a, \prod_{0 \leq i < e} \mathcal{M}_{K'|K}^{de}(\xi')^{\varphi'^{di}} \right) \\
&= \chi_{d,e} \left(\mathcal{M}_{K'|K}^{de}(a', \xi') \right).
\end{aligned}$$

Damit ist die Proposition bewiesen. \square

(2.3.12) Definition. Wir definieren die **metabelsche Normabbildung** $M_{K'|K}$ für endliche, mit (K, φ) kompatible Erweiterungen $K'|K$ als

$$M_{K'|K} := \varprojlim M_{K'|K}^d : \mathfrak{G}(K', \varphi') \rightarrow \mathfrak{G}(K, \varphi).$$

(2.3.13) Proposition. Seien (K'', φ'') , (K', φ') kompatibel zu (K, φ) . Dann ist (K'', φ'') auch kompatibel zu (K', φ') , und es gilt

$$M_{K'|K} \circ M_{K''|K'} = M_{K''|K}.$$

Beweis. Die erste Aussage ist trivial, da K' offensichtlich von $\varphi^{f(K''|K)} = \varphi'^{f(K''|K')}$ fixiert wird. Für den Rest genügt es, die Aussage $M_{K'|K}^d \circ M_{K''|K'}^d = M_{K''|K}^d$ für alle $d \geq 1$ zu beweisen, und dafür wiederum genügt es zu zeigen, dass

$$\mathcal{M}_{K'|K}^d \circ \mathcal{M}_{K''|K'}^d = \mathcal{M}_{K''|K}^d$$

für alle $d \geq 1$ ist, da in der ersten Komponente von $M_{K''|K}$ lediglich die herkömmliche Normabbildung steht. Sei $\xi'' \in \overline{\mathbb{F}_q}[[X]]$, $(u_k'') = \bar{\Psi}_{K''}^{-1}(\xi'')$. Dann erhalten wir

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}_K^{-1} \circ \mathcal{M}_{K'|K}^d \circ \mathcal{M}_{K''|K'}^d(\xi'') &= \mathfrak{M}_{K'|K}^d \circ \bar{\Psi}_{K'}^{-1} \circ \mathcal{M}_{K''|K'}^d(\xi'') \\ &= \mathfrak{M}_{K'|K}^d \circ \mathfrak{M}_{K''|K}^d \circ \bar{\Psi}_{K''}^{-1}(\xi'') = \mathfrak{M}_{K'|K}^d \circ \mathfrak{M}_{K''|K}^d((u_m'')) \\ &= \mathfrak{M}_{K'|K}^d \left(\left(\prod_{0 \leq l < f(K''|K')} \varphi'^{ld} \left(\tilde{N}_{K'_k|K'_m} u_k'' \right) \right)_m \right) \\ &= \left(\prod_{0 \leq p < f(K'|K)} \varphi^{pd} \tilde{N}_{K'_m|K_n} \prod_{0 \leq l < f} \varphi'^{ld} \tilde{N}_{K'_k|K'_m} u_k'' \right)_n \\ &= \left(\prod_{0 \leq p < f(K'|K)} \prod_{0 \leq l < f} \varphi^{f(K'|K)ld+pd} \tilde{N}_{K'_k|K_n} u_k'' \right)_n \\ &= \left(\prod_{0 \leq q < f(K''|K)} \varphi^{qd} \tilde{N}_{K''_k|K_n} u_k'' \right)_n \\ &= \mathfrak{M}_{K''|K}^d(u_m'') = \mathfrak{M}_{K''|K}^d \bar{\Psi}_{K''}^{-1}(\xi'') \\ &= \bar{\Psi}_K^{-1} \mathcal{M}_{K''|K}^d(\xi''), \end{aligned}$$

wobei in den Umformungen $k \gg m \gg n$ benutzt wurde. \square

(2.3.14) Definition. Sei (K', φ') kompatibel zu (K, φ) . Wir setzen

$$M(K'|K) := M_{K'|K}(\mathfrak{G}(K', \varphi')).$$

§4. Der Hauptsatz der metabelschen Klassenkörpertheorie

Im ganzen Abschnitt sei eine Lubin-Tate-Spaltung (K, φ) fixiert. Wie im letzten Abschnitt gesehen, liefert uns dies zu jedem mit (K, φ) kompatiblen L ein Primelement $\pi_L \in L$, die Lubin-Tate-Gruppe F_L , welche zu π_L assoziiert ist, und $f_L = [\pi_L]$. Ausserdem erhalten wir die Lubin-Tate-Erweiterungen L_i und Erzeuger der Tate-Moduln von F_L .

(2.4.1) Proposition. (a) Es gibt einen kanonischen topologischen Isomorphismus

$$\iota_d : \mathfrak{G}_d(K, \varphi) \cong G((K_\infty K_d^{\text{nr}})^{\text{ab}}|K),$$

der nur von der Wahl von φ abhängt.

(b) Der Isomorphismus ι_d induziert ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & \mathbb{F}_{q^d}[[X]]^\times & \longrightarrow & \mathfrak{G}_d(K, \varphi) & \longrightarrow & \hat{K}^\times & \longrightarrow & 1 \\ & & \downarrow \mu & & \downarrow \iota_d & & \downarrow (\cdot^{-1}, K) & & \\ 1 & \longrightarrow & G(L_d^{\text{ab}}|K^{\text{ab}}) & \longrightarrow & G(L_d^{\text{ab}}|K) & \longrightarrow & G(K^{\text{ab}}|K) & \longrightarrow & 1, \end{array}$$

wobei wir $L_d := K_\infty K_d^{\text{nr}}$ gesetzt haben, und die Abbildung μ gegeben ist durch $\mu : \xi \mapsto \iota_d(1, \xi)$.

Beweis. Sei $(a, \xi) \in \mathfrak{G}_d(K, \varphi)$, und sei g_ξ die Coleman-Potenzreihe aus $\mathcal{C}^0(\tilde{K}, f_K)$ mit $g_\xi^{\rho_K} = \xi$, wobei ρ_K die Reduktionsabbildung modulo π_K bezeichne. Die π_{K_i} bilden nach Konstruktion einen Erzeuger des Tate-Moduls von F_K . Wir werden zeigen, dass die Abbildung

$$\kappa_{i,d} : \mathfrak{G}_d(K, \varphi) \rightarrow \mathcal{G}(K_i K_d^{\text{nr}} | K, \pi_{K_i}) \quad (a, \xi) \mapsto \left((a^{-1}, K) |_{K^i}, g_\xi^{\varphi^{1-i}}(\pi_{K_i}) \right)$$

ein Homomorphismus ist. Sei dazu $(a, \xi) \in \mathfrak{G}_d(K, \varphi)$. Wir setzen $(\gamma, \beta) := \kappa_{i,d}(a, \xi)$ und beweisen als erstes, dass (γ, β) tatsächlich in $\mathcal{G}(K_i K_d^{\text{nr}} | K, \pi_{K_i})$ liegt, d.h.

$$\beta^{\varphi^d - 1} = \pi_{K_i}^{\gamma - 1}.$$

Schreiben wir $a = u\pi_K^\nu$ mit $u \in U_K$, dann bemerken wir

$$\rho_K \left(\frac{g_\xi^{\varphi^d}}{g_\xi} \right) = \frac{\xi^{\varphi^d}}{\xi} = \frac{\{u\}_K}{X} = \rho_K \left(\frac{[u]_K}{X} \right).$$

Die Reihen $g_\xi^{\varphi^d}/g_\xi$ und $[u]_K/X$ stimmen also vermöge (1.3.19) überein. Somit ergibt sich

$$\beta^{\varphi^d - 1} = \frac{\left(g_\xi^{\varphi^{1-i}}(\pi_{K_i}) \right)^{\varphi^d}}{g_\xi^{\varphi^{1-i}}(\pi_{K_i})} = \left(\frac{g_\xi^{\varphi^d}(\pi_{K_i})}{g_\xi(\pi_{K_i})} \right)^{\varphi^{1-i}},$$

da $\varphi(\pi_{K_i}) = \pi_{K_i}$ ist. Wir erhalten

$$\beta^{\varphi^d - 1} = \left(\frac{g_\xi^{\varphi^d}(\pi_{K_i})}{g_\xi(\pi_{K_i})} \right)^{\varphi^{1-i}} = \frac{[u]_K(\pi_{K_i})}{X(\pi_{K_i})} = \frac{[u]_K(\pi_{K_i})}{\pi_{K_i}},$$

denn $[u](X) \in \mathcal{O}_K[[X]]$ wird von φ fixiert. Weiterhin finden wir

$$\frac{[u]_K(\pi_{K_i})}{\pi_{K_i}} = \frac{(u^{-1}, K)(\pi_{K_i})}{\pi_{K_i}} = \frac{\gamma(\pi_{K_i})}{\pi_{K_i}}.$$

Hierbei haben wir verwendet, dass

$$(u^{-1}, K)(\pi_{K_i}) = ((a^{-1}, K) \circ (\pi_K^\nu, K))(\pi_{K_i}) = (a^{-1}, K)(\pi_{K_i})$$

ist, da π_K^ν wegen $N_{K_i|K}\pi_K^\nu = \pi_K^\nu$ ein Normelement von $K_i|K$ ist. Damit haben wir gefunden, dass $(\gamma, \beta) \in \mathcal{G}(K_i K_d^{\text{nr}} | K, \pi_{K_i})$ gilt. Wir verifizieren nun, dass $\kappa_{i,d}$ ein Homomorphismus ist. Seien dazu $(a_1, \xi_1), (a_2, \xi_2) \in \mathfrak{G}_d(K, \varphi)$, wobei $a_1 = u_1\pi_K^{\nu_1}$ sei. Dann ist

$$\begin{aligned} \kappa_{i,d}((a_1, \xi_1)(a_2, \xi_2)) &= \kappa_{i,d} \left(a_1 a_2, \xi_1 \cdot (\xi_2^{\varphi^{-\nu_1}} \circ \{u_1\}_K) \right) \\ &= \left(((a_1 a_2)^{-1}, K) |_{K^i}, g_{\xi_1 \cdot (\xi_2^{\varphi^{-\nu_1}} \circ \{u_1\}_K)}^{\varphi^{1-i}}(\pi_{K_i}) \right) \\ &= \left((a_1^{-1}, K) |_{K^i} \circ (a_2^{-1}, K) |_{K^i}, g_{\xi_1}^{\varphi^{1-i}}(\pi_{K_i}) g_{\xi_2^{\varphi^{-\nu_1}} \circ \{u_1\}_K}^{\varphi^{1-i}}(\pi_{K_i}) \right), \end{aligned}$$

wobei wir für die letzte Gleichheit (1.3.19) verwendet haben. Andererseits finden wir

$$\begin{aligned}\kappa_{i,d}(a_1, \xi_1)\kappa_{i,d}(a_2, \xi_2) &= \left((a_1^{-1}, K), g_{\xi_1}^{\varphi^{1-i}}(\pi_{K_i}) \right) \left((a_2^{-1}, K), g_{\xi_2}^{\varphi^{1-i}}(\pi_{K_i}) \right) \\ &= \left(((a_1 a_2)^{-1}, K) |_{K^i}, g_{\xi_1}^{\varphi^{1-i}}(\pi_{K_i}) \cdot (a_1^{-1}, K) \left(g_{\xi_2}^{\varphi^{1-i}}(\pi_{K_i}) \right) \right).\end{aligned}$$

Wenn es uns also gelingt, zu zeigen, dass

$$(a_1^{-1}, K) \left(g_{\xi_2}^{\varphi^{1-i}}(\pi_{K_i}) \right) = g_{\xi_2^{\varphi^{-\nu_1}} \circ \{u_1\}_K}^{\varphi^{1-i}}(\pi_{K_i})$$

ist, dann ist $\kappa_{i,d}$ in der Tat ein Homomorphismus. Wir berechnen

$$\begin{aligned}(a_1^{-1}, K) \left(g_{\xi_2}^{\varphi^{1-i}}(\pi_{K_i}) \right) &= g_{\xi_2}^{\varphi^{1-i} \circ (a_1^{-1}, K)} \left((a_1^{-1}, K)(\pi_{K_i}) \right) \\ &= g_{\xi_2}^{\varphi^{1-i} \circ (u_1^{-1}, K) \circ (\pi_{\bar{K}^{-\nu_1}}, K)} \left((u_1^{-1}, K)(\pi_{K_i}) \right) \\ &= g_{\xi_2}^{\varphi^{1-i} \circ \varphi^{-\nu_1}} \left([u_1]_K(\pi_{K_i}) \right) \\ &= g_{\xi_2^{\varphi^{-\nu_1}}}^{\varphi^{1-i}} \left([u_1]_K(\pi_{K_i}) \right) \\ &= g_{\xi_2^{\varphi^{-\nu_1}} \circ \{u_1\}_K}^{\varphi^{1-i}}(\pi_{K_i}).\end{aligned}$$

Hierbei haben wir benutzt, dass $g_\xi \in \mathcal{O}_{\bar{K}}[[X]]$ ist und $(u^{-1}, K)|_{\bar{K}} = \text{id}_{\bar{K}}$ sowie $(\pi, K)|_{\bar{K}} = \varphi$ ist. Sei

$$r_{i-1,d}^{i,d} : \mathcal{G}(K_i K_d^{\text{nr}} | K, \pi_{K_i}) \rightarrow \mathcal{G}(K_{i-1} K_d^{\text{nr}} | K, \pi_{K_{i-1}})$$

die Übergangsabbildung aus (2.1.5). Wir haben ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{G}_d(K, \varphi) & \xlongequal{\quad} & \mathfrak{G}_d(K, \varphi) \\ \kappa_{i,d} \downarrow & & \downarrow \kappa_{i-1,d} \\ \mathcal{G}(K_i K_d^{\text{nr}} | K, \pi_{K_i}) & \xrightarrow{r_{i-1,d}^{i,d}} & \mathcal{G}(K_{i-1} K_d^{\text{nr}} | K, \pi_{K_{i-1}}), \end{array}$$

denn eine kurze Rechnung ergibt

$$\begin{aligned}r_{i-1,d}^{i,d}(\kappa_{i,d}(a, \xi)) &= r_{i-1,d}^{i,d} \left((a^{-1}, K) |_{K^i}, g_\xi^{\varphi^{1-i}}(\pi_{K_i}) \right) \\ &= \left((a^{-1}, K) |_{K^{i-1}}, \tilde{N}_{K_i K_d^{\text{nr}} | K_{i-1} K_d^{\text{nr}}} g_\xi^{\varphi^{1-i}}(\pi_{K_i}) \right) \\ &= \left((a^{-1}, K) |_{K^{i-1}}, g_\xi^{\varphi^{2-i}}(\pi_{K_{i-1}}) \right) \\ &= \kappa_{i-1,d}(a, \xi),\end{aligned}$$

da die $g_\xi^{\varphi^{1-i}}(\pi_{K_i})$ nach (1.3.19) eine normkompatible Folge in den Körpern \tilde{K}^i bilden. Vermöge (2.2.10) ist das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}(K_i K_d^{\text{nr}} | K, \pi_{K_i}) & \xrightarrow{r_{i-1,d}^{i,d}} & \mathcal{G}(K_{i-1} K_d^{\text{nr}} | K, \pi_{K_{i-1}}) \\ \downarrow \wr_{K_i K_d^{\text{nr}} | K} & & \downarrow \wr_{K_{i-1} K_d^{\text{nr}} | K} \\ G((K_i K_d^{\text{nr}})^{\text{ab}} | K) & \xrightarrow{\text{res}} & G((K_{i-1} K_d^{\text{nr}})^{\text{ab}} | K) \end{array}$$

kommutativ, da die Erweiterungen $K_i K_d^{\text{nr}}|K$ bzw. $K_{i-1} K_d^{\text{nr}}|K$ kompatibel mit (K, φ) sind. Wir können also

$$\iota_d := \varprojlim \iota_{K_i K_d^{\text{nr}}|K} \circ \kappa_{i,d} : \mathfrak{G}_d(K, \varphi) \rightarrow \varprojlim G(K_i K_d^{\text{nr}})^{\text{ab}}|K = G((K_\infty K_d^{\text{nr}})^{\text{ab}}|K)$$

setzen. Wir wollen nun zeigen, dass das Diagramm aus Aussage (b) kommutiert. Die Kommutativität des rechten Quadrates erkennen wir an der einfachen Rechnung

$$\begin{aligned} \iota_d(a, \xi)|_{K^i} &= \left(\iota_{K_i K_d^{\text{nr}}|K} \circ \kappa_{i,d}(a, \xi) \right) |_{K^i} = \iota_{K_i K_d^{\text{nr}}|K} \left((a, K)|_{K^i}, g_\xi^{\varphi^{1-i}}(\pi_{K_i}) \right) |_{K^i} \\ &= (a^{-1}, K)|_{K^i}, \end{aligned}$$

wobei wir nur die Definition der beteiligten Abbildungen benutzt haben. Hieraus folgt unter Verwendung von $K^{\text{ab}} = \cup K^i$, dass $\iota_d(a, \xi)|_{K^{\text{ab}}} = (a^{-1}, K)$ ist. Damit ergibt sich auch $\iota_d(1, \xi)|_{K^{\text{ab}}} = \text{id}_{K^{\text{ab}}}$, insbesondere ist μ wohldefiniert, und das linke Quadrat kommutiert. Es bleibt nun zu zeigen, dass ι_d ein Isomorphismus ist. Sei $\iota_d(a, \xi) = \text{id}_{(K_\infty K_d^{\text{nr}})^{\text{ab}}}$, d.h.

$$\iota_{K_i K_d^{\text{nr}}|K} \circ \kappa_{i,d}(a, \xi) = \text{id}_{(K_i K_d^{\text{nr}})^{\text{ab}}} \quad \text{für alle } i \in \mathbb{N}.$$

Dann ist $\kappa_{i,d}(a, \xi) = (\text{id}_{K_i K_d^{\text{nr}}}, 1)$ für alle $i \in \mathbb{N}$, da die $\iota_{K_i K_d^{\text{nr}}|K}$ Isomorphismen sind. Wir finden für alle $i \in \mathbb{N}$ die Beziehung

$$\left((a^{-1}, K)|_{K^i}, g_\xi^{\varphi^{1-i}} \pi_{K_i} \right) = (\text{id}_{K_i K_d^{\text{nr}}}, 1),$$

woraus sich unmittelbar $a = 1$ ergibt. Ausserdem ist $g_\xi = 1$, da dies eine Colemanreihe in $\mathcal{C}^0(\tilde{K}, f_K)$ ist mit $g_\xi^{\varphi^{1-i}}(\pi_{K_i}) = 1$, und g_ξ nach (1.3.19) eindeutig bestimmt ist. Somit ist $(a, \xi) = (1, 1)$, d.h. ι_d ist injektiv. Sei

$$(\gamma_i, \beta_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \varprojlim \mathcal{G}(K_i K_d^{\text{nr}}|K, \pi_{K_i}).$$

Dann existieren eine Coleman-Potenzreihe $g \in \mathcal{C}^0(\tilde{K}, f_K)$ mit $g^{\varphi^{1-i}}(\pi_{K_i}) = \beta_i$ und ein $a \in \hat{K}^\times$, so dass $\gamma_i = (a^{-1}, K^i|K)$ für alle $i \in \mathbb{N}$ ist. Wir setzen $\xi := \rho_K(g)$. Wenn es gelingt zu zeigen, dass

$$\frac{\xi^{\varphi^d}}{\xi} = \frac{\{u\}_K}{X}$$

ist, dann folgt die Surjektivität von ι_d , da somit $(a, \xi) \in \mathfrak{G}_d(K, \varphi)$ ist und offenbar $\iota_d(a, \xi) = (\gamma_i, \beta_i)$ gilt. Mit derselben Rechnung wie im Beweis zu Aussage (a) erhalten wir

$$\left(\frac{g^{\varphi^d}}{g} \right)^{\varphi^{1-i}}(\pi_{K_i}) = \beta_i^{\varphi^d - 1} = \pi_{K_i}^{\gamma_i - 1} = \frac{(u^{-1}, K^i|K)(\pi_{K_i})}{\omega_i} = \frac{[u]_K(\pi_{K_i})}{\pi_{K_i}} = \frac{[u]_K^{\varphi^{1-i}}(\pi_{K_i})}{\pi_{K_i}},$$

dies ergibt

$$\left(\frac{g^{\varphi^d}}{g} \right)(\pi_{K_i}) = \frac{[u]_K(\pi_{K_i})}{\pi_{K_i}}.$$

Vermöge (1.3.11) folgt dann $g^{\varphi^d}/g = [u]_K/X$.

Wir wollen jetzt noch nachweisen, dass ι_d ein Homöomorphismus ist. Aufgrund der Kompaktheit von $G((K_\infty K_d^{\text{nr}})^{\text{ab}}|K)$ genügt es zu zeigen, dass ι_d^{-1} stetig ist. Seien $i, j \in \mathbb{N}$, $j < q^i$, $s := q^i(q-1)d$. Die Erweiterung $K_i K_d^{\text{nr}}$ ist kompatibel mit (K, φ) , wir können also den Körper

$$L_{i,j} := (K_i K_d^{\text{nr}})_j K_s^{\text{nr}}$$

betrachten. Wir behaupten, dass die Beziehung

$$\iota_d^{-1} \left(G \left((K_\infty K_d^{\text{nr}})^{\text{ab}} | L_{i,j} \right) \right) \subseteq \mathfrak{G}_d(K, \varphi)^{(i,j)}$$

gilt. Die $G \left((K_\infty K_d^{\text{nr}})^{\text{ab}} | L_{i,j} \right)$ sind Umgebungen der Eins in $G \left((K_\infty K_d^{\text{nr}})^{\text{ab}} | K \right)$, und damit folgt die Stetigkeit von ι_d^{-1} . Sei nun

$$\sigma \in G \left((K_\infty K_d^{\text{nr}})^{\text{ab}} | L_{i,j} \right), \quad (\gamma_i, b_i) := \iota_{K_i K_d^{\text{nr}} | K}^{-1}(\sigma).$$

Dann ist $\gamma_i|_{K_i} = \text{id}_{K_i}$ und somit $b_i^{\varphi^{-1}} = \pi_{K_i}^{\gamma_i^{-1}} = 1$, d.h. $b_i \in U_{K_i K_d^{\text{nr}}}$. Aus der Kompatibilität von $K_i K_d^{\text{nr}}$ zu (K, φ) ergibt sich $f_{K_i K_d^{\text{nr}}} \in \mathcal{O}_{K_i K_d^{\text{nr}}}[X]$, was $f_{K_i K_d^{\text{nr}}}^{\gamma_i} = f_{K_i K_d^{\text{nr}}}$ impliziert. Aus der Konstruktion von $\iota_{K_i K_d^{\text{nr}} | K}$ im Beweis zu (2.1.4) ersehen wir nun

$$\pi_{(K_i K_d^{\text{nr}})_j} = \sigma \left(\pi_{(K_i K_d^{\text{nr}})_j} \right) = [b_i]_{f_{K_i K_d^{\text{nr}}}}^{\varphi^{1-j}} \left(\pi_{(K_i K_d^{\text{nr}})_j} \right) = (b_i^{-1}, K_i K_d^{\text{nr}}) \left(\pi_{(K_i K_d^{\text{nr}})_j} \right).$$

Somit ist nach lokaler Klassenkörpertheorie $b_i \in \langle \pi_{K_i K_d^{\text{nr}}} \rangle U_{K_i K_d^{\text{nr}}}^j$ und nach obigem sogar $b_i \in U_{K_i K_d^{\text{nr}}}^j$. Sei $(a, \xi) := \iota_d^{-1}(\sigma)$. Aus $\sigma|_{K_i K_d^{\text{nr}}} = \text{id}_{K_i K_d^{\text{nr}}}$ schliessen wir $a \in \langle \pi^s \rangle U_K^i$. Es bleibt zu zeigen, dass $\xi \equiv 1 \pmod{X^j}$ gilt. Nun ist nach Konstruktion und dem eben Gezeigten

$$b_i = g_\xi^{\varphi^{1-i}}(\pi_{K_i}) \in U_{K_i K_d^{\text{nr}}}^j \subseteq U_{\widetilde{K}^i}^j,$$

wobei $g_\xi \in \mathcal{C}^0(\widetilde{K}, f_K)$ ist mit $\rho_K(g_\xi) = \xi$. Wir schreiben

$$g_\xi^{\varphi^{1-i}} = \sum_{i \geq 0} c_i X^i.$$

mit $c_0 \in U_{\widetilde{K}}, c_i \in \mathcal{O}_{\widetilde{K}}[[X]]$ für alle $i \geq 1$. Wegen $g_\xi^{\varphi^{1-i}}(\pi_{K_i}) \equiv 1 \pmod{\pi_{K_i}}$ ergibt sich $c_0 = 1$, und aufgrund von

$$g_\xi^{\varphi^{1-i}}(\pi_{K_i}) - 1 \in \pi_{K_i}^j \mathcal{O}_{\widetilde{K}^i}$$

folgt unmittelbar $c_i \equiv 0 \pmod{\pi_K}$. Schliesslich erhalten wir $g_\xi^{\varphi^{1-i}} \equiv 1 \pmod{(\pi_K, X^j)}$, woraus wir direkt

$$\xi = \rho_K(g_\xi) = \left(\rho_K \left(g_\xi^{\varphi^{1-i}} \right) \right)^{\varphi^{i-1}} \equiv 1 \pmod{X^j}$$

folgern. Damit ist ι_d ein Homöomorphismus, und die Proposition ist bewiesen. \square

Damit sind insbesondere die Gruppen $\mathfrak{G}_d(K, \varphi)$ kompakt, und wir erhalten aus (2.3.8) unmittelbar durch Limesbildung

(2.4.2) Korollar. *Die Sequenz*

$$1 \longrightarrow \varprojlim \mathbb{F}_{q^d}[[X]]^\times \longrightarrow \mathfrak{G}(K, \varphi) \xrightarrow{\text{pr}_1} \widehat{K}^\times \longrightarrow 1$$

ist exakt. \square

(2.4.3) Proposition. *Wir haben ein kommutatives Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{G}_{de}(K, \varphi) & \xrightarrow{\chi_{de,e}} & \mathfrak{G}_d(K, \varphi) \\ \iota_{de} \downarrow & & \downarrow \iota_d \\ G((K_\infty K_{de}^{\text{nr}})^{\text{ab}} | K) & \xrightarrow{\text{res}} & G((K_\infty K_d^{\text{nr}})^{\text{ab}} | K) . \end{array}$$

Beweis. Es genügt offenbar zu zeigen, dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{G}_{de}(K, \varphi) & \xrightarrow{\chi_{de,e}} & \mathfrak{G}_d(K, \varphi) \\ \kappa_{i,de} \downarrow & & \kappa_{i,d} \downarrow \\ \mathcal{G}(K_i K_{de}^{\text{nr}} | K, \pi_{K_i}) & \xrightarrow{r_{i,d}^{i,de}} & \mathcal{G}(K_i K_d^{\text{nr}} | K, \pi_{K_i}) \end{array}$$

für alle $i \in \mathbb{N}$ kommutiert, wobei $r_{i,d}^{i,de}$ die Übergangsabbildung aus (2.1.5) bezeichne. Sei $(a, \xi) \in \mathfrak{G}_{de}(K, \varphi)$. Dann erhalten wir

$$\begin{aligned} r_{i,d}^{i,de}(\kappa_{i,de}(a, \xi)) &= r_{i,d}^{i,de} \left((a^{-1}, K) |_{K^i}, g_\xi^{\varphi^{1-i}}(\pi_{K_i}) \right) \\ &= \left((a^{-1}, K) |_{K^i}, \prod_{0 \leq j < e} \varphi_{K_i K_d^{\text{nr}}}^j \tilde{N}_{K_i K_{de}^{\text{nr}} | K_i K_d^{\text{nr}}} g_\xi^{\varphi^{1-i}}(\pi_{K_i}) \right) \\ &= \left((a^{-1}, K) |_{K^i}, \prod_{0 \leq j < e} \varphi^{dj} \left(g_\xi^{\varphi^{1-i}}(\pi_{K_i}) \right) \right) \\ &= \left((a^{-1}, K) |_{K^i}, \prod_{0 \leq j < e} \left(g_\xi^{\varphi^{1-i}} \right)^{\varphi^{dj}}(\pi_{K_i}) \right) \\ &= \left((a^{-1}, K) |_{K^i}, \prod_{0 \leq j < e} g_{\xi^{\varphi^{dj}}}^{\varphi^{1-i}}(\pi_{K_i}) \right) \\ &= \left((a^{-1}, K) |_{K^i}, g_\xi^{\varphi^{1-i}}(\pi_{K_i}) \right), \end{aligned}$$

wobei $\tilde{\xi} := \prod_{0 \leq j < e} \xi^{\varphi^{dj}}$ ist und wir für den letzten Schritt (1.3.19) benutzt haben. Umgekehrt erhalten wir

$$\kappa_{i,d}(\chi_{d,e}(a, \xi)) = \kappa_{i,d} \left(\prod_{0 \leq j < e} \xi^{\varphi^{dj}} \right) = \kappa_{i,d}(a, \tilde{\xi}) = \left((a^{-1}, K) |_{K^i}, g_\xi^{\varphi^{1-i}}(\pi_{K_i}) \right),$$

was die Behauptung impliziert. \square

Die vorangegangene Proposition ermöglicht es uns nun, die Abbildungen ι_d zusammzusetzen.

(2.4.4) Definition. *Wir definieren*

$$\iota_K := \varprojlim \iota_d : \mathfrak{G}(K, \varphi) \rightarrow \varprojlim G((K_\infty K_d^{\text{nr}})^{\text{ab}} | K) = G((K^{\text{ab}})^{\text{ab}} | K).$$

Aus der Kompaktheit der $\mathfrak{G}_d(K, \varphi)$ und (2.4.1) folgt unmittelbar, dass ι_K ein topologischer Isomorphismus ist. Wir haben die folgende

(2.4.5) Proposition. *Sei $K' | K$ eine endliche Galoiserweiterung, so dass (K', φ') kompatibel zu (K, φ) ist. Dann kommutiert das Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{G}(K', \varphi') & \xrightarrow{\iota_{K'}} & G((K'^{\text{ab}})^{\text{ab}} | K') \\ M_{K' | K} \downarrow & & \downarrow \text{res} \\ \mathfrak{G}(K, \varphi) & \xrightarrow{\iota_K} & G((K^{\text{ab}})^{\text{ab}} | K) \end{array} .$$

Beweis. Wir beschränken uns zunächst auf den Fall einer abelschen Erweiterung $K'|K$. Da (K', φ') kompatibel mit (K, φ) ist, haben wir nach (2.2.4) eine Zerlegung $K' = LK'_j^{\text{nr}}$ mit $f := f(K'|K)$, $L := K' \cap K_\varphi$. $L|K$ ist eine reinverzweigte abelsche Erweiterung, und wir haben

$$N_{L|K}L^\times = N_{L|K}\langle\pi_L\rangle U_L = \langle\pi_K\rangle N_{L|K}U_L \supseteq \langle\pi_K\rangle U_K^i = N_{K_i|K}K_i^\times,$$

wobei i hinreichend gross ist, d.h. es ist dann $L \subseteq K_i$. K_i ist wiederum eine reinverzweigte abelsche Erweiterung von L , und wir erhalten für hinreichend grosses j

$$N_{K_i|L}K_i^\times = N_{K_i|L}\langle\pi_{K_i}\rangle U_{K_i} = \langle\pi_L\rangle N_{K_i|L}U_{K_i} \supseteq \langle\pi_K\rangle U_L^j = N_{L_j|L}L_j^\times,$$

somit also $K_i \subseteq L_j = L(\pi_{L_j}) = L(\pi_{K'_j}) \subseteq K'_j$. Gilt $f(K'|K) \mid d$, dann haben wir einen Körperturm

$$K \subseteq K' \subseteq K_i K_d^{\text{nr}} \subseteq K'_j K_d^{\text{nr}}.$$

Wir erhalten aus (2.2.10) ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}(K'_j K_d^{\text{nr}}|K', \pi_{K'_j}) & \xrightarrow{\iota_{K'_j K_d^{\text{nr}}|K'}} & G((K'_j K_d^{\text{nr}})^{\text{ab}}|K') \\ r \downarrow & & \downarrow \text{res} \\ \mathcal{G}(K_i K_d^{\text{nr}}|K', \pi_{K_i}) & \xrightarrow{\iota_{K_i K_d^{\text{nr}}|K'}} & G((K_i K_d^{\text{nr}})^{\text{ab}}|K') \end{array},$$

denn aus der Kompatibilität von (K', φ') mit (K, φ) folgt $K_i \subseteq K_\varphi \subseteq K'_{\varphi'}$, somit ist $K_i K_d^{\text{nr}}$ kompatibel zu (K', φ') . Definieren wir überdies

$$s : \mathcal{G}(K_i K_d^{\text{nr}}|K', \pi_{K_i}) \rightarrow \mathcal{G}(K_i K_d^{\text{nr}}|K, \pi_{K_i}), (\gamma, b) \mapsto (\gamma, b),$$

dann kommutiert auch

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}(K_i K_d^{\text{nr}}|K', \pi_{K_i}) & \xrightarrow{\iota_{K_i K_d^{\text{nr}}|K'}} & G((K_i K_d^{\text{nr}})^{\text{ab}}|K') \\ s \downarrow & & \downarrow \text{res} \\ \mathcal{G}(K_i K_d^{\text{nr}}|K, \pi_{K_i}) & \xrightarrow{\iota_{K_i K_d^{\text{nr}}|K'}} & G((K_i K_d^{\text{nr}})^{\text{ab}}|K) \end{array},$$

was sich unmittelbar aus der Definition von s ergibt. Damit erhalten wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}(K'_j K_d^{\text{nr}}|K', \pi_{K'_j}) & \xrightarrow{\iota_{K'_j K_d^{\text{nr}}|K'}} & G((K'_j K_d^{\text{nr}})^{\text{ab}}|K') \\ \text{sor} \downarrow & & \downarrow \text{res} \\ \mathcal{G}(K_i K_d^{\text{nr}}|K, \pi_{K_i}) & \xrightarrow{\iota_{K_i K_d^{\text{nr}}|K'}} & G((K_i K_d^{\text{nr}})^{\text{ab}}|K) \end{array}.$$

Wir werden zeigen, dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{G}_d(K', \varphi') & \xrightarrow{\kappa'_{j,d}} & \mathcal{G}(K'_j K_d^{\text{nr}}|K', \pi_{K'_j}) \\ M_{K'|K} \downarrow & & \downarrow \text{sor} \\ \mathfrak{G}_d(K, \varphi) & \xrightarrow{\kappa_{i,d}} & \mathcal{G}(K_i K_d^{\text{nr}}|K, \pi_{K_i}) \end{array}$$

kommutiert, dann folgt die Behauptung der Proposition im abelschen Fall durch Limesbildung, zunächst über j , dann über d . Hierbei beachten wir, dass die $d \in \mathbb{N}$ mit $f(K'|K) \mid d$ ein

kofinales System in \mathbb{N} versehen mit der Teilbarkeithalbordnung sind. Sei $(a', \xi') \in \mathfrak{G}_d(K', \varphi')$. Wir finden

$$\kappa_{i,d}(M_{K'|K}(a', \xi')) = \kappa_{i,d}\left(N_{K'|K}a, \mathcal{M}_{K'|K}^d(\xi')\right) = \left((N_{K'|K}a'^{-1}, K)|_{K^i}, g_{\mathcal{M}_{K'|K}^d(\xi')}^{\varphi^{1-i}}(\pi_{K^i})\right).$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned} s \circ r(\kappa'_{j,d}(a', \xi')) &= s \circ r\left((a'^{-1}, K')|_{K'^i}, g_{\xi'}^{\varphi'^{1-j}}(\pi_{K'_j})\right) \\ &= \left((a'^{-1}, K')|_{K^i}, \prod_{0 \leq j < f(K'|K)} \varphi_{K_i K_d^{\text{nr}}}^i \tilde{N}_{K'_j K_d^{\text{nr}}|K_i K_d^{\text{nr}}} g_{\xi'}^{\varphi'^{1-j}}(\pi_{K'_j})\right) \\ &= \left((N_{K'|K}a'^{-1}, K)|_{K^i}, \prod_{0 \leq j < f(K'|K)} \varphi^{di} \tilde{N}_{K'_j|K_i}(g_{\xi'}^{\varphi'^{1-j}})\right). \end{aligned}$$

Es bleibt also

$$g_{\mathcal{M}_{K'|K}^d(\xi')}^{\varphi^{1-i}}(\pi_{K^i}) = \prod_{0 \leq j < f(K'|K)} \varphi^{di} \tilde{N}_{K'_j|K_i}(g_{\xi'}^{\varphi'^{1-j}})$$

zu zeigen. Nun ist nach Definition

$$\mathcal{M}_{K'|K}^d(\xi') = \Psi_K \circ \mathcal{M}_{K'|K}^d \circ \Psi_{K'}^{-1}(\xi'),$$

d.h.

$$\begin{aligned} g_{\mathcal{M}_{K'|K}^d(\xi')}^{\varphi^{1-i}}(\pi_{K^i}) &= \left(\Psi_K^{-1} \circ \mathcal{M}_{K'|K}^d(\xi')\right)_i = \left(\mathcal{M}_{K'|K}^d \circ \Psi_{K'}^{-1}(\xi')\right)_i \\ &= \prod_{0 \leq j < f(K'|K)} \varphi^{di} \tilde{N}_{K'_j|K_i}\left(\left(\Psi_{K'}^{-1}(\xi')\right)_j\right) \\ &= \prod_{0 \leq j < f(K'|K)} \varphi^{di} \tilde{N}_{K'_j|K_i}(g_{\xi'}^{\varphi'^{1-j}}). \end{aligned}$$

Wir betrachten nun den Fall einer beliebigen, mit (K, φ) kompatiblen Galoiserweiterung $K'|K$. Aufgrund der Auflösbarkeit von $G(K'|K)$ können wir einen Körperturm $K = M_1 \subseteq M_2 \subseteq \dots \subseteq M_n = K'$ finden, so dass $M_{i+1}|M_i$ jeweils abelsch ist. Da K' kompatibel mit (K, φ) ist, sind offenbar auch die M_i kompatibel mit (K, φ) und kompatibel untereinander. Die Behauptung folgt dann aus dem abelschen Fall durch wiederholtes Anwenden der Kommutativität des obigen Diagrammes für die $M_{i+1}|M_i$ in Verbindung mit (2.3.13). \square

Mit Hilfe dieser Proposition erhalten wir unmittelbar

(2.4.6) Korollar. *Erfüllt K' die Voraussetzungen der Proposition, dann ist die Abbildung*

$$M_{K'|K} : \mathfrak{G}(K', \varphi') \rightarrow \mathfrak{G}(K, \varphi)$$

ein stetiger Homomorphismus.

Wir bemerken ausserdem, dass für jedes metabelsche $K'|K$, welches kompatibel zu (K, φ) ist, gilt:

$$\begin{aligned} M(K'|K) &= M_{K'|K}(\mathfrak{G}(K', \varphi')) = \iota_K^{-1} \circ \text{res} \circ \iota_{K'}(\mathfrak{G}(K', \varphi')) = \iota_K^{-1} \circ \text{res}\left(G((K'^{\text{ab}})^{\text{ab}}|K')\right) \\ &= \iota_K^{-1}\left(G((K^{\text{ab}})^{\text{ab}}|K)\right). \end{aligned}$$

Das gibt uns Anlass zu der folgenden Definition:

(2.4.7) Definition. Für metabelsches $K'|K$ setzen wir

$$M(K'|K) := {}_K^{-1} \left(G((K^{\text{ab}})^{\text{ab}}|K') \right).$$

Wir fassen nun die Hauptergebnisse der metabelschen Klassenkörpertheorie noch einmal zusammen.

(2.4.8) Satz. Es sei eine Lubin-Tate-Spaltung (K, φ) fixiert.

(a) (Reziprozitätsgesetz) Ist $L|K$ metabelsch, dann existiert eine exakte Sequenz

$$1 \longrightarrow M(L|K) \longrightarrow \mathfrak{G}(K, \varphi) \longrightarrow G(L|K) \longrightarrow 1,$$

insbesondere gibt es einen Isomorphismus

$$\mathfrak{G}(K, \varphi) \cong G((K^{\text{ab}})^{\text{ab}}|K).$$

Ausserdem erhalten wir Isomorphismen

$$\mathfrak{G}_d(K, \varphi) \cong G((K_\infty K_d^{nr})^{\text{ab}}|K).$$

(b) (Existenzsatz) Die Korrespondenz $L|K \mapsto M(L|K)$ ist eine ordnungsumkehrende Bijektion zwischen allen metabelschen Erweiterungen von K und den abgeschlossenen Untergruppen von $\mathfrak{G}(K, \varphi)$. Die Gruppe $M(L|K)$ ist von endlichem Index, falls $L|K$ endlich ist, und dann gilt

$$[L : K] = (\mathfrak{G}(K, \varphi) : M(L|K)).$$

(c) (Funktorialität) Ist $K'|K$ eine endliche galoissche, zu (K, φ) kompatible Erweiterung, dann kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{G}(K', \varphi') & \xrightarrow{{}_K^{-1}} & G((K'^{\text{ab}})^{\text{ab}}|K') \\ M_{K'|K} \downarrow & & \downarrow \text{res} \\ \mathfrak{G}(K, \varphi) & \xrightarrow{{}_K^{-1}} & G((K^{\text{ab}})^{\text{ab}}|K) \end{array} .$$

(d) (Zusammenhang zur abelschen Klassenkörpertheorie) Ist $L|K$ metabelsch und kompatibel mit (K, φ) , dann gilt

$$N(L|K) = \text{pr}_1(M(L|K)),$$

und die abelsche Erweiterung, welche Klassenkörper zu $N(L|K)$ ist, ist die maximal abelsche Erweiterung von K innerhalb von L .

Beweis. Sei $L|K$ eine metabelsche Erweiterung. Wir erhalten unmittelbar aus der vorangegangenen Definition

$$G(L|K) \cong G((K^{\text{ab}})^{\text{ab}}|K) / G((K^{\text{ab}})^{\text{ab}}|L) \cong \mathfrak{G}(K, \varphi) / M(L|K).$$

Damit ergibt sich Aussage (a), und für endliches metabelsches $L|K$ folgt

$$[L : K] = (\mathfrak{G}(K, \varphi) : M(L|K)).$$

Da ι ein Homöomorphismus ist, erhalten wir Aussage (b). Behauptung (c) haben wir bereits bewiesen. Sei nun $L|K$ eine metabelsche, mit (K, φ) kompatible Erweiterung. Wir haben ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc}
 G((K^{\text{ab}})^{\text{ab}}|L) & \longleftarrow & G((L^{\text{ab}})^{\text{ab}}|L) & \xrightarrow{\iota_L^{-1}} & \mathfrak{G}(L, \varphi') & \xrightarrow{\text{pr}_1} & \hat{L}^\times \\
 \parallel & & \downarrow \text{res} & & \downarrow M_{L|K} & & \downarrow N_{L|K} \\
 G((K^{\text{ab}})^{\text{ab}}|L) & \longrightarrow & G((K^{\text{ab}})^{\text{ab}}|K) & \xrightarrow{\iota_K^{-1}} & \mathfrak{G}(K, \varphi) & \xrightarrow{\text{pr}_1} & \hat{K}^\times .
 \end{array}$$

Aufgrund dessen erhalten wir

$$\begin{aligned}
 \text{pr}_1 M(L|K) &= \text{pr}_1 \iota_K^{-1} \left(G((K^{\text{ab}})^{\text{ab}}|L) \right) = \text{pr}_1 \iota_K^{-1} \text{res} \left(G((L^{\text{ab}})^{\text{ab}}|L) \right) \\
 &= \text{pr}_1 M_{L|K} \iota_L^{-1} \left(G((L^{\text{ab}})^{\text{ab}}|L) \right) = N_{L|K} \text{pr}_1 \iota_L^{-1} \left(G((L^{\text{ab}})^{\text{ab}}|L) \right) \\
 &= N_{L|K} \text{pr}_1 \mathfrak{G}(L, \varphi') = N_{L|K} \hat{L}^\times \\
 &= N(L|K),
 \end{aligned}$$

wobei wir die Surjektivität von pr_1 aus (2.4.2) verwendet haben. □

Literaturverzeichnis

- [Co] Coleman, R.: *Division values in local fields*. Inv. Math. 53(1979), 91-116
- [dS] de Shalit, E.: *Iwasawa Theory of Elliptic Curves with Complex Multiplication*. Perspectives in Math. Vol. 3, Academic Press, Boston 1987
- [Fe] Fesenko, I.: *Local noncommutative reciprocity cycles*. preprint
- [Iw] Iwasawa, K.: *Local class field theory*. Oxford University Press, Oxford-NewYork 1966
- [KdS] Koch, H., de Shalit, E.: *Metabelian local class field theory*. J. Reine Angew. Math. 478(1996), 85-106
- [Ko] Koch, H.: *Local class field theory for metabelian extensions*. Behara, Minaketan (ed.) et al., *Proceedings of the 2nd Gauss symposium. Conference A: Mathematics and theoretical physics, Munich, Germany, August 2-7, 1993*. Berlin: Walter de Gruyter. Symposia Gaussiana. 287-300 (1995).
- [Neu1] Neukirch, J.: *Algebraische Zahlentheorie*. Springer 1992
- [Neu2] Neukirch, J.: *Klassenkörpertheorie*. Bibliographisches Institut, Mannheim 1969
- [Po] Pontrjagin, L.S.: *Topologische Gruppen*. Teubner 1957
- [Se] Serre, J.P.: *Local fields*. GTM 67, Springer 1979
- [Wi] Wintenberger, J.P.: *Le corps des normes de certaines extensions infinies de corps locaux; applications*. Ann. Sci. Éc. Norm. Sup. 16(1983), 59-89