Blatt 10 : Die Kettenbruchentwicklung reeller Zahlen.

Aufgabe 1.

a. Geben Sie eine rationale Zahl r mit Nenner kleiner als 300000 an, die dieselben ersten 10 dezimalen Nachkommastellen wie π hat. Sie können für diese Frage Beispiel 12.17 (c) der Vorlesung verwenden.

b. Es sei $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass es unendlich viele rationale Zahlen $r = \frac{p}{q}$ mit $\text{ggT}(p,q) = 1$, $q > 0$ und $|x - \frac{p}{q}| \leq \frac{1}{q^2}$ gibt.

Aufgabe 2. Es sei $[a_0, a_1, ..., a_n] = \frac{p_n}{q_n}$ wie in Proposition 12.11. und Satz 12.12. der Vorlesung. Zeigen Sie :

a. $[a_n, a_{n-1}, ..., a_0] = \frac{p_n}{p_{n-1}}$,

b. $[a_n, a_{n-1}, ..., a_1] = \frac{q_n}{q_{n-1}}$.

Aufgabe 3.

a. Seien $p, q, r \in \mathbb{Z}$ mit $\text{ggT}(p,q) = 1$, $q > 0$ und $p \cdot q \cdot r \neq 0$. Sei die Kettenbruchentwicklung von $\frac{p}{q}$ gegeben durch :

$$\frac{p}{q} = [a_0, a_1, ..., a_n].$$

Sei $\frac{p_i}{q_i}$ der i-te Näherungsbruch von $[a_0, a_1, ..., a_n]$. Zeigen Sie, dass die Menge der ganzzahligen Lösungen (x, y) der Gleichung $px - qy = r$ genau die Menge

$$\{(mq + (-1)^{n+1} r q_{n-1}, mp + (-1)^{n+1} r p_{n-1}) | m \in \mathbb{Z}\}$$

ist.

b. Finden Sie alle ganzzahligen Lösungen der Gleichung $-10x + 18y = 4$.

Aufgabe 4. Sei $p \equiv 1 \pmod 4$ eine Primzahl und $a \in \mathbb{Z}$ mit $a^2 \equiv -1 \bmod p$. Sei $\frac{a}{p} = [a_0, a_1, ..., a_k]$ und $\frac{p_i}{q_i}$ wie in Aufgabe 2. Sei $n := \text{Max}\{i \in \mathbb{N} | q_i \leq \sqrt{p}\}$, $x := q_n$ und $y := p_n p - a q_n$. Zeigen Sie :

a. so ein a existiert und $n < k$,

b. $|y| \leq \sqrt{p}$,

c. $x^2 + y^2 = p$.

d. Finden Sie eine ganzzahlige Lösung von $x^2 + y^2 = 9901$. (Hinweis : es ist $1000000 \equiv -1 \bmod 9901$).

Insbesondere liefert diese Aufgabe einen dritten Beweis des Satzes 10.3 der Vorlesung.

Die Blätter sollen bis Donnerstag, den 08.01. um 14.15 Uhr in die dafür vorgesehenen Einwurfkästen im Foyer des Mathematischen Instituts abgegeben werden.