Aufgaben

Aufgabe 1. Berechnen Sie :

a. $\left(\frac{21147}{61819}\right)$,

b. $\left(\frac{59727}{62191}\right)$.

Aufgabe 2. Es sei $\zeta_n = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ für $n \in \mathbb{N}$. Für eine Primzahl p sei :

$$G(\zeta_p) = \sum_{x \in \mathbb{F}_p} \left(\frac{x}{p}\right) \zeta_p^x.$$

a. Zeigen Sie, dass für $\mathrm{ggT}(k,p) = 1$ gilt :

$$\sum_{i=1}^{p-1} \left(\frac{i(i-k)}{p}\right) = -1.$$

b. Warum ist $G(\zeta_p)$ wohldefiniert ? Zeigen Sie :

$$G(\zeta_p)^2 = \left(\frac{-1}{p}\right) p.$$

Aufgabe 3. Es seien $a, b, c \in \mathbb{N}$ und $p \neq 2$ eine Primzahl mit $\mathrm{ggT}(a,p) = 1$. Zeigen Sie, dass

$$ax^2 + bx + c \equiv 0 \pmod p$$

genau $1 + \left(\frac{b^2 - 4ac}{p}\right)$ Lösungen in $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ hat. Wieviele Lösungen hat diese Gleichung, wenn $\mathrm{ggT}(a,p) \neq 1$ ist ?

Aufgabe 4. Zeigen sie, dass es unendlich viele Primzahlen p mit

a. $p \equiv\ 2$ oder $-2 \pmod 5$ und

b. $p \equiv -1 \pmod 5$ gibt.

`Die Blätter sollen bis Donnerstag, den 04.12. um 14.15 Uhr in die dafür vorgesehenen Einwurfkästen im Foyer des Mathematischen Instituts abgegeben werden.`