

Aufgaben

Aufgabe 1. Sei φ die Eulersche φ -Funktion.

- Berechnen Sie $\varphi(855)$,
- Zeigen Sie $d|n \Rightarrow \varphi(d)|\varphi(n)$,
- Bestimmen Sie alle natürlichen Zahlen n mit $\varphi(n) = 8$,
- Für welche $n \in \mathbb{N}$ gilt $\varphi(2n) = \varphi(3n)$?

Aufgabe 2. Der General Ezéchiel De Mélac will vor der Zerstörung des Heidelbergers Schlosses die Stärke seiner Armee berechnen. Dazu lässt er seine Soldaten nacheinander in 17er, 23er bzw. 29er-Reihen antreten und zählt jeweils nur die Soldaten, die übrig bleiben. Bei den drei Zählungen bleiben 1, 20 und 8 Soldaten übrig. Vor der letzten Schlacht hatte die Armee 8466 Mann. Bestimmen Sie die Größe seiner Armee.

Aufgabe 3. Es seien $a, b \in \mathbb{N}$ nicht teilerfremd. Zeigen Sie, dass die Gruppen :

$$\mathbb{Z}/ab\mathbb{Z} \text{ und } \mathbb{Z}/a\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/b\mathbb{Z}$$

nicht isomorph sind.

Aufgabe 4. Sei φ die Eulersche φ -Funktion.

- Zeigen Sie :

$$\sum_{d|n} \varphi(d) = n.$$

- Beweisen Sie durch eine vollständige Induktion (und unter Verwendung von (a)), dass für $m, n \in \mathbb{N}$ teilerfremd gilt :

$$\varphi(mn) = \varphi(n)\varphi(m).$$

Die Blätter sollen bis Donnerstag, den 20.11. um 14.15 Uhr in die dafür vorgesehenen Einwurfkästen im Foyer des Mathematischen Instituts abgegeben werden.