Aufgaben

Aufgabe 1.

a. Bestimmen Sie jeweils eine Primitivwurzel in $\mathbb{F}_p$ für $p = 13, 17$ und 19.

b. Es sei p eine beliebige Primzahl. Zeigen Sie, dass 4 in $\mathbb{F}_p$ nicht primitiv ist.

Aufgabe 2. Es seien $P, Q \in \mathbb{Z}[X]$. Zeigen Sie :

a. Teilt die Primzahl p jeden Koeffizienten von PQ so teilt p jeden Koeffizienten von P oder jeden Koeffizienten von Q.

b. $c(PQ) = c(P)c(Q)$, wobei für $R \in \mathbb{Z}[X],\ R \neq 0$, $c(R)$ den größten gemeinsamen Teiler der Koeffizienten von R bezeichnet (und $c(0) = 0$).

Aufgabe 3. Für eine reelle Zahl x bezeichne $[x]$ die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich x ist :

$$[x] = \max\{k \in \mathbb{Z} :\ k \leq x\}.$$

a. Es sei p eine beliebige Primzahl und $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie :

$$v_p(n!) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left[\frac{n}{p^k}\right],$$

wobei v_p die p-Bewertung bezeichne.

b. Es sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie :

$$\frac{(30n)!n!}{(15n)!(10n)!(6n)!} \in \mathbb{N}.$$

Aufgabe 4. Es sei G eine endliche abelsche Gruppe. Zeigen Sie, dass ein $g \in G$ existiert, so dass gilt :

$$\exp(G) = \mathrm{ord}(g).$$

`Die Blätter sollen bis Donnerstag, den 13.11. um 14.15 Uhr in die dafür vorgesehenen Einwurfkästen im Foyer des Mathematischen Instituts abgegeben werden.`